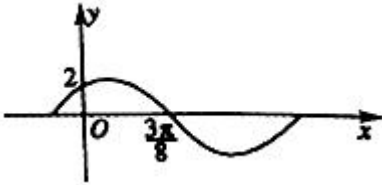
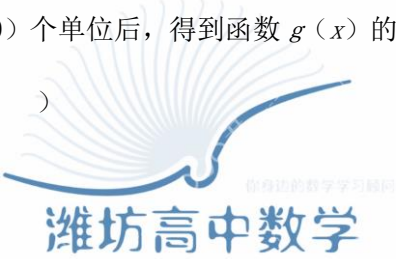


专题三 三角函数与解三角形

一、单项选择题

- (2021 潍坊二模 1) $\sin 20^\circ \sin 10^\circ - \cos 20^\circ \cos 10^\circ = (\quad)$
 A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (2021 日照二模 3) 若 α 为第二象限角, 则 $(\quad)$
 A. $\sin \alpha - \cos \alpha < 0$ B. $\tan \alpha < 0$
 C. $\sin(\frac{\pi}{2} + 2\alpha) > 0$ D. $\cos(\pi - 2\alpha) > 0$
- (2021 济南二模 3) $\triangle ABC$ 中, “ $\sin A = \frac{1}{2}$ ” 是 “ $A = \frac{\pi}{6}$ ” 的 $(\quad)$
 A. 充要条件 B. 充分不必要条件
 C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件
- (2021 淄博二模 6) 若 $\tan \alpha > \sin \alpha > \sin 2\alpha (-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2})$, 则 $\alpha \in (\quad)$.
 A. $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6})$ B. $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ C. $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ D. $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$
- (2021 济南二模 5) 将函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则下列关于 $g(x)$ 的说法正确的是 $(\quad)$
 A. 最小正周期为 π B. 最小值为 -1
 C. 图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ 中心对称 D. 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
- (2021 聊城二模 5) 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{2}\sin(\omega x + \phi)$ ($\omega > 0, |\phi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 将 $f(x)$ 的图象向右平移 a ($a > 0$) 个单位后, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若对于任意的 $x \in \mathbb{R}, g(x) \leq |g(\frac{\pi}{24})|$, 则 a 的值可以为 $(\quad)$


 A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{5\pi}{12}$ D. $\frac{\pi}{2}$
- (2021 青岛三模 7) 若将函数 $f(x) = 2\sin(2x + \phi)$ ($|\phi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到的

图象关于 y 轴对称, 则函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 ()

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. (2021 菏泽二模 5) 已知函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3}) \cos x - \frac{\sqrt{3}}{4}$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 再将图像上所有点的横坐标缩小到原来的一半, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若 $g(x_1) \cdot g(x_2) = \frac{1}{4} (x_1 \neq x_2)$,

则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

9. (2021 淄博三模 6) 已知锐角 α, β 满足 $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$, 则 $\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta}$ 的最小值为 ()

- A. 4 B. $4\sqrt{3}$ C. 8 D. $8\sqrt{3}$

10. (2021 潍坊二模 7) 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$, 若函数 $g(x) = f(x) - a (a \in \mathbb{R})$ 在 $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ 上恰有三个零点 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$, 则 $x_3 - x_1$ 的值是 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

二、多项选择题

11. (2021 烟台适应性练习一 9) 设函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$, 则 ()

- A. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增
B. $x = \frac{\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴
C. $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心
D. $y = 2 \cos x$ 的图象可由 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到

12. (2021 烟台三模 9) 若函数 $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{3})$ 两条对称轴之间的最小距离为 $\frac{\pi}{2}$, 则下列说法正确的

的是 ()

- A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π
B. 函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减

C. 将函数 $f(x)$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后所得图象关于 y 轴对称

D. 若 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 则 $f(x_1 + x_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

13. (2021 临沂二模 9) 设函数 $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象为曲线 E , 则 ()

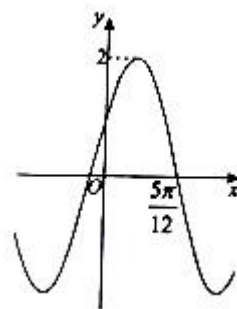
A. 将曲线 $y = \cos 2x$ 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后与曲线 E 重合

B. 将曲线 $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 则与曲线 E 重合

C. 将曲线 $f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 后所得图象对应的函数为奇函数

D. 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$

14. (2021 日照二模 11) 若函数 $f(x) = A \sin(2x + \phi)$ ($A > 0$, $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图像如图所示, 则下列叙述正确的是 ()



A. $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增

D. 函数 $f(x)$ 的图像可由 $y = A \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位得

到

15. (2021 聊城三模 10) 将函数 $y = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 再将所有点的

横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则下面对函数 $g(x)$ 的叙述中正确的

是 ()

A. 函数 $g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

B. 函数 $g(x)$ 图象关于点 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 对称

C. 函数 $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 内单调递增

D. 函数 $g(x)$ 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称

16. (2021 烟台适应性练习二 11) 关于函数 $f(x) = \sin x \cos 2x$ 的下列结论正确的是 ()

A. $x = \frac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴

B. $(\pi, 0)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心

C. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$

D. $f(x)$ 的最小正周期为 π

17. (2021 省实验中学二模 10) 已知 $f(x) = 2\cos^2 \omega x + \sqrt{3}\sin 2\omega x - 1$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π , 则下列说法正确的有 ()

A. $\omega = 2$

B. 函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上为增函数

C. 直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴

D. 点 $(\frac{5}{12}\pi, 0)$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一个对称中心

18. (2021 泰安二模 10) 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 ()

A. 函数 $f(x) + g(x)$ 的图象的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{8}, 0)$

B. 函数 $f(x) \cdot g(x)$ 是奇函数

C. 函数 $f(x) + g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的单调递减区间是 $[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}]$

D. 函数 $f(x) \cdot g(x)$ 的图象的一个对称轴方程为 $x = -\frac{\pi}{8}$

19. (2021 潍坊三模 11) 已知函数 $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$, 则下列结论正确的是 ()

A. $f(x)$ 的周期为 2π

B. $y = f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

C. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $f(x)$ 在区间 $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ 上单调递减

20. (2021 青岛二模 10) 已知函数 $f(x) = (2\cos^2 \omega x - 1) \sin 2\omega x + \frac{1}{2}\cos 4\omega x$ ($\omega > 0$), 则下列说法正确的是 ()

A. 若 $f(x)$ 的两个相邻的极值点之差的绝对值等于 $\frac{\pi}{4}$, 则 $\omega = 2$

B. 当 $\omega = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{2}$

C. 当 $\omega = 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ 上单调递增

D. 当 $\omega = 1$ 时, 将 $f(x)$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到 $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(4x - \frac{\pi}{4})$ 的图象

21. (2021 济宁二模 10) 函数 $f(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{6}) + 1 (x \in \mathbb{R})$, 则下列说法正确的是 ()

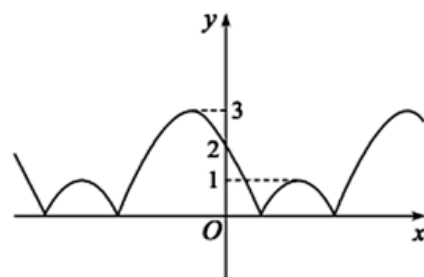
- A. 若 $f(x_1) = f(x_2) = 3$, 则 $x_1 - x_2 = k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- B. 函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上为增函数
- C. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3}, 1)$ 对称
- D. 函数 $f(x)$ 的图象可以由 $g(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 1 (x \in \mathbb{R})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到

22. (2021 枣庄二模 10) 已知函数 $f(x) = |\sin x| + \sqrt{3} \left| \sin(x - \frac{\pi}{2}) \right|$, 则

- A. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上的最小值是 1
- B. $f(x)$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$
- C. 直线 $x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 是 $f(x)$ 图象的对称轴
- D. 直线 $y = \frac{2}{\pi}x$ 与 $f(x)$ 的图象恰有 2 个公共点

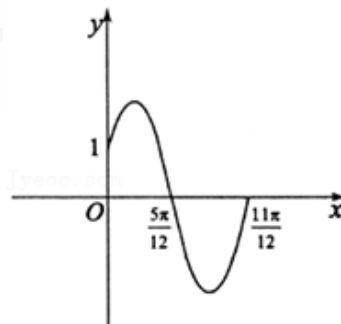
23. (2021 德州二模 10) 已知函数 $f(x) = A\cos(x + \varphi) + 1 (A > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$, 若函数 $y = |f(x)|$ 的部分图象如图所示, 则下列说法正确的是 ().

- A. 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称
- B. 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(-\frac{5}{6}\pi, 1)$ 对称
- C. 将函数 $y = 2\sin x + 1$ 的图像向左平移 $\frac{5}{6}\pi$ 个单位可得函数 $f(x)$ 的图像
- D. 函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的值域为 $[\sqrt{3} + 1, 3]$



24. (2021 滨州二模 11) 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \phi) (A > 0, \omega > 0, 0 < \phi < \pi)$ 的部分图象如图所示, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π
- B. $f(x)$ 的最大值为 2
- C. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$ 上单调递增
- D. $f(x + \frac{\pi}{6})$ 为偶函数

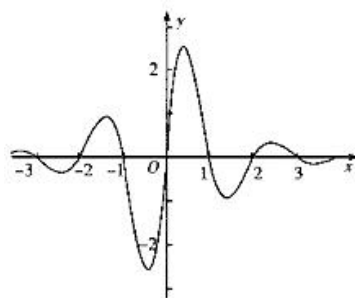


25. (2021 潍坊四县 5 月联考 11) 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) - \sin(\pi + x)$, 则有 ()

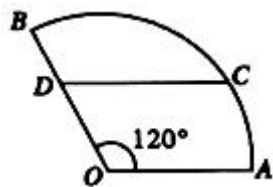
- A. $f(\frac{\pi}{6}) \geq f(x)$
- B. $f(\frac{\pi}{6}+x) = f(\frac{\pi}{6}-x)$
- C. $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的对称中心
- D. 方程 $f(x) = \log_{2\pi} x$ 有三个实根

三、填空题

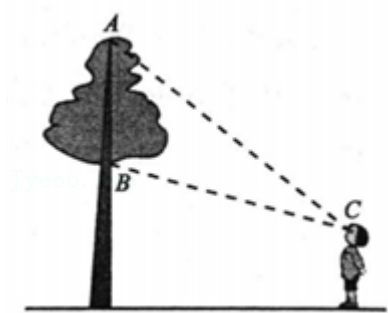
26. (2021 济宁二模 14) 已知 $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{2}$, 则 $\cos 2\alpha =$ _____.
27. (2021 泰安二模 14) $\sin 20^\circ \sin 80^\circ - \cos 160^\circ \sin 10^\circ =$ _____.
28. (2021 省实验中学二模 14) 已知 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{8}$, 且 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})}$ 的值为 _____.
29. (2021 烟台三模 13) 已知 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$, 则 $1 - \cos 2\alpha =$ _____.
30. (2021 青岛三模 14) 若 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{5}$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\cos 2\alpha =$ _____.
31. (2021 烟台适应性练习二 13) 已知 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, 则 $\tan(\pi - 2\alpha)$ 的值为 _____.
32. (2021 潍坊四县 5 月联考 14) 公元前 6 世纪, 古希腊的毕达哥拉斯学派通过研究正五边形和正十边形的作图, 发现了黄金分割值约为 0.618, 这一数值也可以表示为 $m = 2\sin 18^\circ$, 若 $m^2 + n = 4$, 则 $\frac{m + \sqrt{n}}{\sin 63^\circ} =$ _____.
33. (2021 日照二模 15) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \phi)$ ($\omega > 0$) 振幅为 2, 满足 $x_2 - x_1 = 2$, 且 $f(x_2) = f(x_1) = \sqrt{3}$, 则在 $(0, 102)$ 上 $f(x)$ 零点个数最少为 _____.
34. (2021 烟台适应性练习一 15) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且满足 $f(x+1) = f(x-1)$, $f(1-x) + f(x) = 1$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 _____, $f(x)$ 的一个解析式可以为 _____.
35. (2021 淄博三模 15) 已知函数 $f(x) = \frac{4\cos(\omega x + \phi)}{e^{|x|}}$ ($\omega > 0, 0 < \phi < \pi$) 的部分图象如图所示, $\omega + \phi =$ _____.
36. (2021 日照三模 14) 已知 M, N 是函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \phi)$ ($\omega > 0$) 图象与直线 $y = \sqrt{3}$ 的两个不同的交点. 若 $|MN|$ 的最小值是 $\frac{\pi}{12}$, 则 $\omega =$ _____.



37. (2021 聊城二模 14) 如图是某商业小区的平面设计图, 初步设计该小区为半径是 200 米, 圆心角是 120° 的扇形 AOB . O 为南门位置, C 为东门位置, 小区里有一条平行于 AO 的小路 CD , 若 $OD = \frac{200\sqrt{6}}{3}$ 米, 则圆弧 $\widehat{AC}$ 的长为_____米.



38. (2021 滨州二模 16) 最大视角问题是 1471 年德国数学家米勒提出的几何极值问题, 故最大视角问题一般称为“米勒问题”. 如图, 树顶 A 离地面 a 米, 树上另一点 B 离地面 b 米, 在离地面 c ($c < b$) 米的 C 处看此树, 离此树的水平距离为_____米时看 A, B 的视角最大.

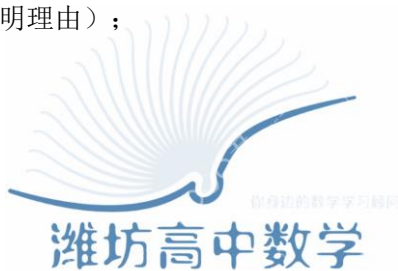


四、解答题

39. (2021 济南二模 17) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 恰好满足下列四个条件中的三个: ① $\cos A = \frac{1}{2}$; ② $\cos B = -\frac{1}{2}$; ③ $a = \sqrt{3}$; ④ $b = 1$.

(1) 请指出这三个条件 (不必说明理由);

(2) 求边 c .



40. (2021 潍坊四县 5 月联考 17) 在① $\sqrt{2}a\sin C=c\cos(\frac{\pi}{4}-A)$, ② $\sqrt{2}c\cos A=a\cos B+b\cos A$, ③ $b^2+c^2=a^2+\sqrt{2}bc$ 这三个条件中任选一个补充在下面问题中, 并解答问题.

问题: 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 已知 $b=3$, $\triangle ABC$ 的面积为 3, ____, 求 a .

41. (2021 日照二模 17) 向量 $\vec{m}=(2\sin x, \sqrt{3})$, $\vec{n}=(\cos x, \cos 2x)$, 已知函数 $f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递减区间;

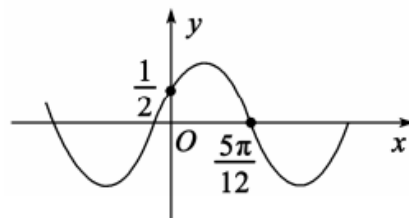
(2) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 其中 $a=7$, 若锐角 A 满足 $f(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$, 且 $\sin B+\sin C=\frac{13\sqrt{3}}{14}$, 求 $b+c$ 的值.



42. (2021 枣庄二模 18) 若 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{5\pi}{12}) = 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 若 $A > B$, $f(\frac{A-B}{2} - \frac{\pi}{12}) = \frac{3}{5}$, 求 $\cos \frac{A-B}{2}$, 并证明 $\sin A > \frac{2\sqrt{5}}{5}$.



43. (2021 临沂二模 17) 在① $x = -\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴, ② $\frac{\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点, ③

函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 且 $b - a$ 的最大值为 $\frac{\pi}{2}$, 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中,

并解答.

已知函数 $f(x) = 2\sin \omega x \cos(\omega x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$, ($0 < \omega < 2$), _____, 求 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的单调递减

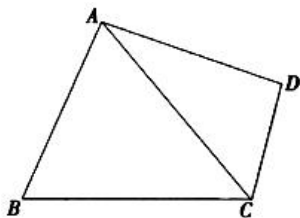
区间.



44. (2021 省实验中学二模 17) 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$, $BC = 4$.

(1) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$, 求 AC ;

(2) 若 $AD = 3\sqrt{3}$, $\angle ACB = \angle ACD + \frac{\pi}{3}$, 求 $\tan \angle ACD$.



45. (2021 菏泽二模 17) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $b^2 = c$, $\sin C = \sqrt{3} \sin B$,

_____ .

$$\textcircled{1} \sin C - \cos A \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A$$

$$\textcircled{2} \frac{b \cos B}{c} = \sin B$$

$$\textcircled{3} a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{3} ac$$

从以上三个条件中选择一个条件补充在题干中, 完成下列问题.

(1) 求 B ;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

(注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分)



46. (2021 日照三模 17) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{c}{b} < \cos A$.

(1) 求证: B 是钝角;

(2) 请从下列四个条件中选择三个;

① $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ② $a = 2$; ③ $c = \sqrt{2}$; ④ $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

是否存在 $\triangle ABC$ 满足您选择的这三个条件, 若存在, 求边长 b 的值; 若不存在, 请说明理由.

47. (2021 淄博三模 17) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\cos(\frac{\pi}{3} - B) \cdot \sin(\frac{\pi}{6} + B) = \frac{3}{4}$,

$a + c = 2$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 求 $\triangle ABC$ 外接圆面积的最小值.



48. (2021 聊城三模 17) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 且 $10\sin^2\frac{A+C}{2} = 7 - \cos 2B$,

(1) 求角 B 的大小;

(2) 已知点 D 满足 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, 且 $AB > BD$, 若 $S_{\triangle ABD} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $AD = \sqrt{7}$, 求 AC .

49. (2021 滨州二模 17) 在 ① $\sqrt{3}b \cos A = 2c \sin C - \sqrt{3}a \cos B$, ② $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + C\right) + \cos C = \frac{5}{4}$, ③

$a \sin \frac{A+B}{2} = c \sin A$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并解答.

问题: 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 已知_____.

(1) 求角 C ;

(2) 若 $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$, 内角 C 的平分线 CE 交边 AB 于点 E , 求 CE 的长.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.



50. (2021 烟台三模 18) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 且满足

$$4\cos^2 \frac{A}{2} - \cos 2(B+C) = \frac{7}{2}.$$

(1) 求 A ;

(2) 若点 D 满足 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{3}$, 求 $c - \frac{2}{3}b$ 的取值范围.

51. (2021 济宁二模 17) 在① $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$; ② $2a \sin C = c \tan A$; ③ $2\cos^2 \frac{B+C}{2} = \cos 2A + 1$;

三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并作答.

问题: 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c , 若 $b = \sqrt{2}$, _____.

(1) 求 A 的值;

(2) 若 $\sin B = \sqrt{2} \sin C$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.



52. (2021 青岛三模 18) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $c \cos A = (\sqrt{2}b - a) \cos C$.

(1) 若 $A = \frac{\pi}{12}$, 点 D 在边 AB 上, $AD = BC = 1$, 求 $\triangle BCD$ 的外接圆的面积;

(2) 若 $c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

53. (2021 烟台适应性练习二 17) 从① $\sin A = \cos \frac{A}{2}$, ② $2a \cos A = b \cos C + c \cos B$, ③ $a \cos C + (2b + c) \cos A =$

0, 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并给出解答.

问题: 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , ____.

(1) 求 A ;

(2) 若 $a = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.



54. (2021 潍坊三模 18) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , M 是 AC 上的点, BM 平分 $\angle ABC$, $\triangle ABM$ 的面积是 $\triangle BCM$ 面积的 2 倍.

(1) 求 $\frac{\sin C}{\sin A}$;

(2) 若 $\cos B = \frac{1}{4}$, $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

55. (2021 淄博二模 18) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\cos(A - C) + \cos B = \frac{3}{2}$, 设 $\vec{m} = (b, c)$, $\vec{n} = (a, b)$ 且 $\vec{m} // \vec{n}$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 延长 BC 至 D , 使 $BD = 5$, 若 $\triangle ACD$ 的面积 $S = \sqrt{3}$, 求 AD 的长.



56. (2021 德州二模 18) 在锐角三角形 ABC 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 已知 $6\cos^2(\frac{\pi}{2} + A) + \cos A = 5$.

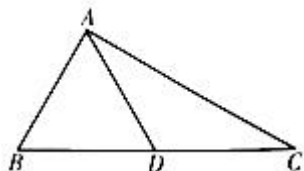
(1) 求 A ;

(2) 若 $a = 2$, 求 $b^2 + c^2$ 的取值范围.

57. (2021 潍坊二模 18) 如图, D 为 $\triangle ABC$ 中 BC 边上一点, $\angle B = 60^\circ$, $AB = 4$, $AC = 4\sqrt{3}$. 给出如下三种数值方案:

① $AD = \sqrt{5}$; ② $AD = \sqrt{15}$; ③ $AD = 2\sqrt{7}$.

判断上述三种方案所对应的 $\triangle ABD$ 的个数, 并求 $\triangle ABD$ 唯一时, BD 的长.



58. (2021 青岛二模 17) 请从 “① $2\sin A \cos B = 2\sin C + \sin B$; ② $\cos A + \cos \frac{A}{2} = 0$.” 两个条件中任选一个, 补充在下面的横线上, 并解答.

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , _____.

(1) 求 A ;

(2) 设 AD 是 $\angle A$ 的平分线, $b+c=10$ 且 $\triangle ABC$ 面积为 $2\sqrt{3}$, 求线段 AD 的长度.

59. (2021 聊城二模 17) 在① $\vec{m} = (\cos B, 2c - b)$, $\vec{n} = (\cos A, a)$, 且 $\vec{m} \parallel \vec{n}$, ② $b = a \cos C + \frac{\sqrt{3}}{3} c \sin A$, ③ $\cos^2 A + \cos A \cos (C - B) = \sin B \sin C$ 这三个条件中任选一个补充在下面问题中, 并解答.

已知 $\triangle ABC$ 中, 三个内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c .

(1) 求 A 的值;

(2) 若 $a = \sqrt{3}$, $\triangle ABC$ 的面积是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 点 M 是 BC 的中点, 求 AM 的长度.



60. (2021 烟台适应性练习一 19) 在条件① $\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = -\sqrt{3} \sin B \sin C$, ② $b = a \cos C + \frac{1}{2}c$, ③

$(\cos C - \sqrt{3} \sin C) \cos A + \cos B = 0$ 中, 任选一个补充在下面问题中并求解.

问题: 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $c=1$, ____.

(1) 求 A ;

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

61. (2021 泰安二模 18) 在① $\sqrt{3} \sin C + \cos C = \frac{b+c}{a}$, ② $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$,

③ $2 \cos A (c \cos B + b \cos C) = a$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并作答.

问题: 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且_____.

(1) 求角 A ;

(2) 若 O 是 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle AOC = 150^\circ$, $b=1$, $c=3$, 求 $\tan \angle ABO$.



专题三 三角函数与解三角形参考答案

一、单项选择题

1. 【答案】A

【解析】 $\sin 20^\circ \sin 10^\circ - \cos 20^\circ \cos 10^\circ = -(\cos 20^\circ \cos 10^\circ - \sin 20^\circ \sin 10^\circ) = -\cos(20^\circ + 10^\circ)$
 $= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：A.

2. 【答案】B

【解析】因为 α 为第二象限角，

所以 $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$,

故 $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$, 故选项 A 错误;

$\tan \alpha < 0$, 故选项 B 正确;

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$, 故其符号不能确定, 故选项 C 错误;

$\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$, 同选项 C, 符号不能确定, 故选项 D 错误.

故选：B.

3. 【答案】C

【解析】 $\triangle ABC$, $\sin A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{6}$ 或 $A = \frac{5\pi}{6}$,

$\therefore \sin A = \frac{1}{2}$ 是 $A = \frac{\pi}{6}$ 的必要不充分条件,

故选：C.

4. 【答案】C

【解析】由 $\tan \alpha > \sin \alpha$, 可得 $\tan \alpha - \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha = \frac{\sin \alpha(1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha} > 0$,

因为 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 可得 $\cos \alpha > 0$, 且 $1 - \cos \alpha > 0$, 可得 $\sin \alpha > 0$, 所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

又由 $\sin \alpha > \sin 2\alpha$, 可得 $\sin \alpha - \sin 2\alpha = \sin \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha(1 - 2\cos \alpha) > 0$,

因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 可得 $\sin \alpha > 0$, 所以 $1 - 2\cos \alpha > 0$, 即 $\cos \alpha < \frac{1}{2}$, 解得 $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

故答案为：C.

5. 【答案】D

【解析】将函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 得到函数 $g(x)$

$=2\sin x$ 的图象,

故 $g(x)$ 的最小正周期为 2π , 故 A 错误;

由于 $f(x)$ 的最小值为 -2 , 故 B 错误;

令 $x = \frac{3\pi}{2}$, 求得 $f(x) = -2$, 为最小值, 故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{3\pi}{2}$ 对称, 故 C 错误;

令 $x = \frac{\pi}{2}$, 求得 $f(x) = 2$, 为最大值, 故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 故 C 正确,

故选: D.

6. 【答案】C

【解析】由函数 $f(x) = 2\sqrt{2}\sin(\omega x + \phi)$ ($\omega > 0$, $|\phi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象知, $f(x)$ 的图象过点 $(0, 2)$, $(\frac{3\pi}{8}, 0)$,

所以 $f(0) = 2\sqrt{2}\sin\phi = 2$, 可得 $\sin\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $|\phi| < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\phi = \frac{\pi}{4}$,

所以 $f(\frac{3\pi}{8}) = 2\sqrt{2}\sin(\frac{3\pi}{8}\omega + \frac{\pi}{4}) = 0$, 解得 $\frac{3\pi}{8}\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

所以 $\omega = \frac{8k-2}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$,

又 $\omega > 0$, 所以不妨当 $k=1$ 时, 可得 $\omega = 2$,

可得 $f(x) = 2\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$,

因为 $g(x) = f(x-a) = 2\sqrt{2}\sin[2(x-a) + \frac{\pi}{4}]$,

所以 $g(\frac{\pi}{24}) = 2\sqrt{2}\sin[2(\frac{\pi}{24} - a) + \frac{\pi}{4}] = 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{3} - 2a)$,

又对于任意的 $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq |g(\frac{\pi}{24})|$,

所以 $g(\frac{\pi}{24}) = 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{3} - 2a) = 2\sqrt{2}$, 可得 $\frac{\pi}{3} - 2a = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,

解得 $a = -\frac{1}{2}k\pi - \frac{\pi}{12}$, $k \in \mathbb{Z}$,

所以当 $k = -1$ 时, 可得 $a = \frac{5\pi}{12}$.

故选: C.

7. 【答案】A

【解析】将函数 $f(x) = 2\sin(2x + \phi)$ ($|\phi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后,

得到的 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3} + \phi)$ 的图象关于 y 轴对称, $\therefore \phi = \frac{\pi}{6}$, 函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$.

$\because 2x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$, 则当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 2,

故选: A.

8. 【答案】B

【解析】因为 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})\cos x - \frac{\sqrt{3}}{4} = (\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)\cos x - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x) = \frac{1}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{3})$

将 $y=f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得 $y = \frac{1}{2}\sin[2(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{3}] = \frac{1}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{3})$, 再将图像上所有点的横坐标缩小到原来的一半得到 $g(x) = \frac{1}{2}\sin(4x - \frac{\pi}{3})$,

因为 $g(x_1) \cdot g(x_2) = \frac{1}{4}$, 所以 $g(x_1) = g(x_2) = \frac{1}{2}$ 或 $g(x_1) = g(x_2) = -\frac{1}{2}$, 因为 x_1 与 x_2 都是波峰或波谷的横坐标, 所以 $|x_1 - x_2|_{\min} = T = \frac{\pi}{2}$, 故选 B.

9. 【答案】C

【解析】因为锐角 α, β 满足 $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$,

所以 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}$,

令 $x = \cos \alpha \cos \beta, y = \sin \alpha \sin \beta$,

则 $x + y = \frac{1}{2}$,

由题意得 $x > 0, y > 0$,

则 $\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2(x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2\left(2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) \geq 2(2 + 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}}) = 8$,

当且仅当 $x=y$ 时取等号, 此时 $\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta}$ 的最小值 8.

故选: C.

潍坊高中数学

10. 【答案】C

【解析】 $\because$ 当 $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$, $2x + \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}]$,

函数 $g(x) = f(x) - a$ ($a \in \mathbb{R}$) 在 $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ 上恰有三个零点 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$),

$\therefore$ 由图象的对称性可得 $\frac{1}{2}(2x_1 + \frac{\pi}{3} + 2x_2 + \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{2}(2x_2 + \frac{\pi}{3} + 2x_3 + \frac{\pi}{3}) = \frac{3\pi}{2}$,

则两式相减可得 $x_3 - x_1$ 的值是 π ,

故选: C.

二、多项选择题

11. 【答案】BD

【解析】解: $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$,

A: 由正弦函数的单调性及函数图像的平移知 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上不单调, A 错误;

B: 由于 $f(\frac{\pi}{6}) = 2$ 为函数的最大值, 根据对称轴处取得最值可知 B 正确;

C: 结合选项 B 及对称轴与对称中心的关系可知 C 错误;

D: 把 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得 $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{2}) = 2\cos x$, D 正确.

故选: BD.

12. 【答案】AC

【解析】 $\because f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{3})$ 两条对称轴之间的最小距离为 $\frac{\pi}{2}$,

$\therefore \frac{1}{2}T = \frac{\pi}{2}$, $\therefore T = \pi$, 则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$, 即 $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$, 故 A 正确;

当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $2x + \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$, 根据余弦函数的单调性, 可得当 $2x + \frac{\pi}{3} \in [\pi, \frac{4\pi}{3}]$, 即

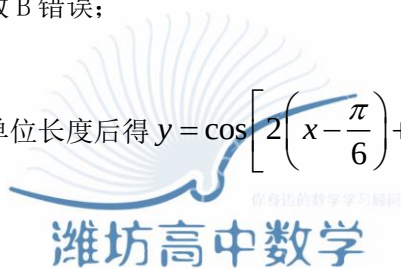
$x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f(x)$ 单调递增, 故 B 错误;

将函数 $f(x)$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得 $y = \cos[2(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{3}] = \cos 2x$ 关于 y 轴对称, 故 C 正

确;

由 $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$ 可得 $x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{k_1\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{k_2\pi}{2}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{(k_1 + k_2)\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,



则 $f(x_1 + x_2) = \cos\left[2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + k\pi\right) = \pm \frac{1}{2}$, 故 D 错误.

故选: AC

13. 【答案】BD

【解析】由题意函数 $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象为曲线 E,

故将曲线 $y = \cos 2x$ 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到 $y = \cos(2x - \frac{2\pi}{3})$ 的图象, 故 A 错误;

将曲线 $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变,

可得 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象, 与曲线 E 重合, 故 B 正确;

将曲线 $f(x)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 后所得图象对应的函数解析式为 $g(x) = \cos[2(x + \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{3}] = \cos(2x + \frac{2\pi}{3})$,

不是奇函数, 故 C 错误;

若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为半个周期, 为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, 故 D 正确,

故选: BD.

14. 【答案】AD

【解析】根据函数 $f(x) = A\sin(2x + \phi)$ ($A > 0$, $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图像,

可得 $A = 2$, 结合五点法作图可得 $2 \times \frac{5\pi}{12} + \phi = \pi$, $\therefore \phi = \frac{\pi}{6}$,

故函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$.

令 $x = -\frac{\pi}{12}$, 求得 $f(x) = 0$, 可得 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心, 故 A 正确;

令 $x = \frac{\pi}{3}$, 求得 $f(x) = 1$, 不是最值, 可得 $x = \frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 故 B 错误;

在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ 上, $2x + \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$, 函数 $f(x)$ 没有单调性, 故 C 错误;

由 $y = 2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 可得 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = f(x)$ 的图象, 故 D 正确,

故选: AD.

15. 【答案】A, D

【解析】由题意可得: 函数 $y = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x + 1 = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$, 将其向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

可得 $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) + 1 = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 1$, 再将所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标

不变, 得到函数 $y = g(x)$ 的图像, 可得 $g(x) = 2\sin(4x + \frac{\pi}{6}) + 1$,

故可得函数 $g(x)$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, A 符合题意;

令 $x = -\frac{\pi}{12}$, 可得 $g(-\frac{\pi}{12}) = 0$, 故 $(-\frac{\pi}{12}, 0)$ 不是函数 $g(x)$ 的一个对称中心, B 不符合题意;

当 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, 可得 $4x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}]$, 由正弦函数性质, 可得函数 $g(x) = 2\sin(4x + \frac{\pi}{6}) + 1$ 在 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 不单调, C 不正确;

由 $g(\frac{\pi}{12}) = 2\sin\frac{\pi}{2} + 1 = 3$, 可得 $x = \frac{\pi}{12}$ 是函数的对称轴, D 符合题意;

故答案为: AD

16. 【答案】AB

【解析】对于 A, 因为 $f(\pi - x) = \sin(\pi - x) \cos 2(\pi - x) = \sin x \cos 2x = f(x)$,

所以 $x = \frac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 故选项 A 正确;

对于 B, 因为 $f(2\pi - x) + f(x) = \sin(2\pi - x) \cos 2(2\pi - x) + \sin x \cos 2x = -\sin x \cos 2x + \sin x \cos 2x = 0$,

所以 $(\pi, 0)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心, 故选项 B 正确;

对于 C, $f(x) = \sin x \cos 2x = \sin x (1 - 2\sin^2 x) = -2\sin^3 x + \sin x$,

令 $t = \sin x$, 则 $t \in [-1, 1]$, 则 $f(t) = -2t^3 + t$,

所以 $f'(t) = -6t^2 + 1$, 令 $f'(t) = 0$, 解得 $t = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$,

当 $t \in [-1, -\frac{\sqrt{6}}{6}]$ 时, $f'(t) < 0$, 则 $f(t)$ 单调递减,

当 $t \in [-\frac{\sqrt{6}}{6}, 1]$ 时, $f'(t) > 0$, 则 $f(t)$ 单调递增,

所以当 $t = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 时, $f(t)$ 取得最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$,

又 $f(-1) = 1$, $f(1) = -1$, 所以 $f(x)$ 的最大值为 1, 故选项 C 错误;

对于 D, $f(x + \pi) = \sin(x + \pi) \cos 2(x + \pi) = -\sin x \cos 2x = -f(x)$,

所以 π 不是 $f(x)$ 的周期, 故选项 D 错误.

故选: AB.

17. 【答案】BD

【解析】 $\because f(x) = 2\cos^2 \omega x + \sqrt{3}\sin 2\omega x - 1 (\omega > 0) = \cos 2\omega x + \sqrt{3}\sin 2\omega x = 2\cos(2\omega x - \frac{\pi}{3})$ 的

最小正周期为 $\frac{2\pi}{2\omega} = \pi$,

$\therefore \omega = 1$, $\therefore f(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$, 故 A 错误.

在 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上, $2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{3}, 0]$, 故 $f(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{3})$ 单调递增, 故 B 正确;

当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $f(x) = 1$, 不是最值, 故直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 不是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴, 故 C 错误;

当 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, $f(x) = 0$, 故点 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一个对称中心, 故 D 正确,

故选: BD.

18. 【答案】BCD

【解析】 $g(x) = \sin 2(x + \frac{\pi}{4}) = \cos 2x$,

选项 A, $f(x) + g(x) = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$,

令 $2x + \frac{\pi}{4} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 则 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$\therefore$ 函数 $f(x) + g(x)$ 的对称中心为 $(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, 不包含点 $(\frac{\pi}{8}, 0)$, 即选项 A 错误;

选项 B, $f(x) \cdot g(x) = \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$, 为奇函数, 即选项 B 正确;

选项 C, 令 $2x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, 则 $x \in [\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{5\pi}{8} + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$,

$\therefore$ 函数 $f(x) + g(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{5\pi}{8} + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$,

$\because x \in (0, \pi)$,

$\therefore x \in [\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}]$, 即选项 C 正确;

选项 D, 令 $4x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 则 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$,

当 $k = -1$ 时, 函数 $f(x) \cdot g(x)$ 的图象的一个对称轴方程为 $x = -\frac{\pi}{8}$, 即选项 D 正确.

故选: BCD.



19. 【答案】ACD

【解析】由于 $f(x + 2\pi) = 2\sin(x + 2\pi) - \sin 2(x + 2\pi) = 2\sin x - \sin 2x = f(x)$, 故 A 正确;

由于 $f(\pi - x) = 2\sin(\pi - x) - \sin 2(\pi - x) = 2\sin x + \sin 2x \neq f(x)$,

即 $y = f(x)$ 的图象不关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 故 B 错误;

$$f'(x) = 2\cos x - 2\cos 2x = 2\cos x - 2(2\cos^2 x - 1) = -4\cos^2 x + 2\cos x + 2$$

$$= -4\left(\cos x - 1\right)\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)$$

当 $x \in \left[-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ 时, $f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in \left[-\pi + 2k\pi, -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right]$ 或 $x \in \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ 时, $f'(x) \leq 0$, 函数 $f(x)$ 单调

递减;

所以 $f_{\max}(x) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin \frac{2\pi}{3} - \sin 2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 故 C 正确;

由 C 项分析可知, $f(x)$ 在 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ 上单调递减, 故 D 正确;

故选: ACD.

20. 【答案】BD

【解答】解: 函数 $f(x) = (2\cos^2 \omega x - 1)\sin 2\omega x + \frac{1}{2}\cos 4\omega x = \cos 2\omega x \cdot \sin 2\omega x + \frac{1}{2}\cos 4\omega x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(4\omega x + \frac{\pi}{4})$.

对于 A: 由于函数 $f(x)$ 的两个相邻的极值点之差的绝对值等于 $\frac{\pi}{4}$, 故 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{4}$, 解得 $T = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\omega = 4$, 故 A 错误;

对于 B: 当 $\omega = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$, 由于 $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, 故 $2x + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, 所以函数的最小值为 $-\frac{1}{2}$, 故 B 正确;

对于 C: 当 $\omega = 1$ 时, $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(4x + \frac{\pi}{4})$, 由于 $x \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$, 所以 $4x + \frac{\pi}{4} \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, 故函数在该区间上不单调, 故 C 错误;

对于 D: 当 $\omega = 1$ 时, 将 $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(4x + \frac{\pi}{4})$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位得到 $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(4x - \frac{\pi}{4})$ 的图象, 故 D 正确;

故选: BD.

21. 【答案】A, C

【解析】由题意, 函数 $f(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{6}) + 1 (x \in \mathbb{R})$,

对于 A 中, 由 $f(x_1) = f(x_2) = 3$, 即 $\cos(2x_1 - \frac{\pi}{6}) = 1$ 且 $\cos(2x_2 - \frac{\pi}{6}) = 1$,

解得 $2x_1 - \frac{\pi}{6} = 2k_1\pi$ 且 $2x_2 - \frac{\pi}{6} = 2k_2\pi, k \in \mathbb{Z}$, 即 $x_1 = k_1\pi + \frac{\pi}{12}$ 且 $x_2 = k_2\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$,

所以 $x_1 - x_2 = (k_1 - k_2)\pi = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$, 又由 $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$, 所以 A 符合题意;

对于 B 中, 令 $-\pi + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $-\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

即函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi], k \in \mathbb{Z}$,

当 $k = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[\frac{\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}]$, 所以 B 不正确;

对于 C 中, 令 $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$,

当 $k = 0$ 时, 可得 $x = \frac{\pi}{3}$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3}, 1)$ 对称, 所以 C 符合题意;

对于 D 中, 函数 $g(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 1 (x \in \mathbb{R})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位,

可得 $g(x) = 2\sin[2(x + \frac{\pi}{12}) - \frac{\pi}{3}] + 1 = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) + 1$, 所以 D 不正确.

故答案为: AC

22. 【答案】ACD

【解析】 $f(x) = |\sin x| + \sqrt{3}|\cos x|$, $f(x + \pi) = |\sin x| + \sqrt{3}|\cos x| = f(x)$, 而 $f(x + \frac{\pi}{2}) \neq f(x)$, 故 $f(x)$ 的最

小正周期是 π , B 错误; 当 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$, 此时 $x - \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$,

所以 $2\sin(x - \frac{\pi}{3}) \in [1, 2]$, 故 A 正确;

$f(x) = \begin{cases} 2\sin(x + \frac{\pi}{3}), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2\sin(x - \frac{\pi}{3}), & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$, 作出 $f(x)$ 的图像, 再作出直线 $y = \frac{2}{\pi}x$ 的图像, 可以判断出 C、D 都正

确, 故选 ACD.

23. 【答案】B, C

【解析】结合函数 $y = |f(x)|$ 的图像易知, 函数 $f(x)$ 的最大值 3, 最小值为 -1,

则 $A = 2$, $f(x) = 2\cos(x + \varphi) + 1$,

代入点 $(0, 2)$, 则 $2\cos\varphi + 1 = 2$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$,

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $f(x) = 2\cos(x + \frac{\pi}{3}) + 1$,

$x + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 即 $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 函数 $f(x)$ 关于 $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 对称, A 不符合

题意；

$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，即 $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，函数 $f(x)$ 关于点 $(\frac{\pi}{6} + k\pi, 1) (k \in \mathbb{Z})$ 对称，B 符合

题意；

函数 $y = 2\sin x + 1$ 的图像向左平移 $\frac{5}{6}\pi$ 个单位，

得出 $f(x) = 2\sin(x + \frac{5\pi}{6}) + 1 = 2\sin(x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) + 1 = 2\cos(x + \frac{\pi}{3}) + 1$ ，C 符合题意；

当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ 时， $x + \frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ ， $\cos(x + \frac{\pi}{3}) \in [\frac{1}{2}, 1]$ ， $f(x) \in [2, 3]$ ，D 不符合题意。

故答案为：BC.

24. 【答案】BD

【解析】解：由图象可知，函数 $f(x)$ 的周期为 $T = (\frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}) \times 2 = \pi$ ，故选项 A 错误；

所以 $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ ，

由“五点法”可得， $2 \times \frac{5\pi}{12} + \varphi = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

又 $0 < \varphi < \pi$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，

所以 $f(x) = A\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ，

又 $f(x)$ 的图象经过点 $(0, 1)$ ，则有 $f(0) = A\sin\frac{\pi}{6} = 1$ ，解得 $A = 2$ ，

所以 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ，

所以 $f(x)$ 的最大值为 2，故选项 B 正确；

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbb{Z}$ ，

当 $k=0$ 时， $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ ，故选项 C 错误；

因为 $f(x + \frac{\pi}{6}) = 2\sin[2(x + \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = 2\cos 2x$ ，

所以 $f(x + \frac{\pi}{6})$ 为偶函数，故选项 D 正确。

故选：BD.

25. 【答案】ABC

【解析】 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) - \sin(\pi + x)$

$$= \sqrt{3} \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + \sin x$$

$$= \sqrt{3} \cos x + \sin x$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right)$$

$$= 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right),$$

对于 A, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \geq 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$, 故选项 A 正确;

对于 B, $f\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos x$, $f\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \cos x$, 可得

$$f\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{6} - x\right), \text{ 故选项 B 正确;}$$

对于 C, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin \pi = 0$, 可得 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 是函数 $f(x)$ 图象的对称中心,

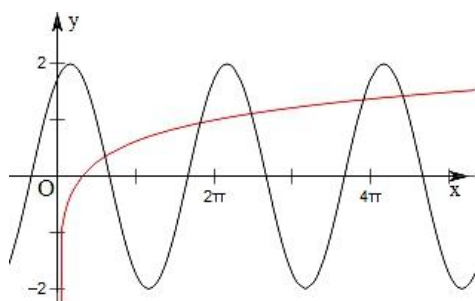
故选项 C 正确;

对于 D, 在同一坐标系中, 作出函数 $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 以及 $g(x) = \log_{2\pi} x$ 的图象, 如图所示,

由图象可知, 函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 图象的交点超过 3 个,

故方程 $f(x) = \log_{2\pi} x$ 的实根超过 3 个, 故选项 D 错误.

故选: ABC.



三、填空题

26. 【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】 $\because \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{2}$, 解得 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$,

$$\text{因此, } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{4}{5}.$$

故答案为: $\frac{4}{5}$.

27. 【答案】 $\frac{1}{2}$



【解析】解： $\sin 20^\circ \sin 80^\circ - \cos 160^\circ \sin 10^\circ$

$$= \sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \sin 10^\circ$$

$$= \sin (20^\circ + 10^\circ)$$

$$= \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}$.

28. 【答案】 $-\frac{\sqrt{14}}{2}$

【解析】 $\because \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{8},$

$$\therefore (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + 2 \times \frac{3}{8} = \frac{7}{4},$$

$$\because \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$\therefore \sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0, \therefore \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\therefore \frac{\cos 2\alpha}{\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha - \cos \alpha)} = -\sqrt{2}(\sin \alpha + \cos \alpha) = -\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{7}}{2} = -\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

故答案为： $-\frac{\sqrt{14}}{2}$.

29. 【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】 $\because \tan \alpha = -\frac{1}{3},$

$$\therefore 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha = \frac{2\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{9} + 1} = \frac{1}{5},$$

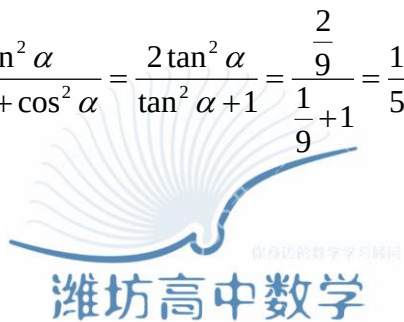
故答案为： $\frac{1}{5}$

30. 【答案】 $-\frac{24}{25}$.

【解析】因为 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha - \cos \alpha) = \frac{3}{5}, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}),$

可得 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$, 两边平方, $1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{18}{25}$, 可得 $2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{7}{25}$,

所以 $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{1 + 2\sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{1 + \frac{7}{25}} = \frac{4\sqrt{2}}{5},$



$$\text{则 } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{4\sqrt{2}}{5} \times \left(-\frac{3\sqrt{2}}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{24}{25}.$$

31. 【答案】-1

$$\text{【解析】因为 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}, \tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } \tan 2\alpha = \tan[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] = \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{1 - \tan(\alpha + \beta)\tan(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1,$$

$$\text{所以 } \tan(\pi - 2\alpha) = -\tan 2\alpha = -\frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -1.$$

故答案为: -1.

32. 【答案】 $2\sqrt{2}$

$$\text{【解析】} \because m = 2\sin 18^\circ,$$

$$\therefore \text{由 } m^2 + n = 4, \text{ 得 } n = 4 - m^2 = 4 - 4\sin^2 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ,$$

$$\text{则 } \frac{m + \sqrt{n}}{\sin 63^\circ} = \frac{2\sin 18^\circ + 2\cos 18^\circ}{\sin 63^\circ} = \frac{2\sqrt{2}\sin(45^\circ + 18^\circ)}{\sin 63^\circ} = \frac{2\sqrt{2}\sin 63^\circ}{\sin 63^\circ} = 2\sqrt{2},$$

故答案为: $2\sqrt{2}$

33. 【答案】16

$$\text{【解析】因为振幅为 2, 所以 } A=2,$$

$$\text{因为 } x_2 - x_1 = 2, \text{ 且 } f(x_2) = f(x_1) = \sqrt{3},$$

要使零点个数最少, 周期就要越大,

所以 x_2, x_1 应为两个相邻的在 $f(x) = \sqrt{3}$ 直线上的点,

$$\text{即 } \begin{cases} \sin(\omega x_1 + \phi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\omega x_2 + \phi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ 所以 } \omega(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{即 } \omega = \frac{\pi}{6}, \text{ 周期 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 12,$$

为了使区间内零点最少, 将第 1 个零点放在原点,

$$\text{所以 } 102 \div 12 = 8T + \frac{1}{2}T,$$

最后 1 个零点恰好在 $x=102$ 处, 不在区间 $(0, 102)$ 中, 只计区间内的个数,

所以零点个数为 $2 \times 8 = 16$ 个.

故答案为: 16.

34. 【答案】 $2; y = -\cos \pi x + \frac{1}{2}$

【解析】解: 把 $f(x+1) = f(x-1)$ 中的 x 换成 $x+1$ 可得 $f(x) = f(x+2)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2;

由 $f(1-x) + f(x) = 1$ 知, 函数 $f(x)$ 图象关于 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 对称,

$\therefore f(x)$ 的一个解析式为: $y = -\cos \pi x + \frac{1}{2}$.

故答案为: $2; y = -\cos \pi x + \frac{1}{2}$.

35. 【答案】 $\frac{3\pi}{2}$.

【解析】根据图象可得, $y = 4\cos(\omega x + \phi)$ 的周期为 2,

所以 $\frac{2\pi}{\omega} = 2$ 得 $\omega = \pi$, 且 $0 = 4\cos(\pi + \phi)$,

所以 $\phi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

又因为 $0 < \phi < \pi$,

所以 $\phi = \frac{\pi}{2}$, 故 $\omega + \phi = \frac{3\pi}{2}$.

故填: $\frac{3\pi}{2}$.

36. 【答案】 4

【解析】由于 M, N 是函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \phi) (\omega > 0)$ 图像与直线 $y = \sqrt{3}$ 的两个不同的交点,

故 M, N 的横坐标是方程 $2\cos(\omega x + \phi) = \sqrt{3}$ 的解,

即 M, N 的横坐标 x_1, x_2 (不妨令 $x_1 < x_2$) 是方程 $\cos(\omega x + \phi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解,

所以 $\omega x_1 + \phi = -\frac{\pi}{6}$, ①,

$\omega x_2 + \phi = \frac{\pi}{6}$, ②,

② - ①, 可得 $\omega(x_2 - x_1) = \frac{\pi}{3}$, 即 $\frac{\pi}{12}\omega = \frac{\pi}{3}$,

解得 $\omega = 4$.

故答案为: 4.

37. 【答案】 50π

【解析】连结 OC ，因为 $CD \parallel OA$ ，所以 $\angle DCO = \angle COA$ ， $\angle CDO = 180^\circ - \angle DOA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ，

在 $\triangle OCD$ 中，由正弦定理可得， $\frac{OD}{\sin \angle DCO} = \frac{OC}{\sin \angle CDO}$ ，

$$\text{所以 } \frac{\frac{200\sqrt{6}}{3}}{\sin \angle DCO} = \frac{200}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \text{ 解得 } \sin \angle DCO = \frac{\frac{200\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{200} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

因为 $\angle DCO = \angle COA$ ，且 $0^\circ < \angle COA < 120^\circ$ ，

所以 $\angle DCO = \angle COA = 45^\circ$ ，

故圆弧 $\widehat{AC}$ 的长为 $\frac{45^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \times 200 = 50\pi$ 。

故答案为： 50π 。

38. 【答案】 $\sqrt{(a-c)(b-c)}$

【解析】解：如图所示，过点 C 作 $CD \perp AB$ ，交 AB 延长线与点 D ，

设 $\angle BCD = \alpha$ ， $\angle ACB = \beta$ ， $CD = x$ ，

由题意可得， $AD = a - c$ ， $BD = b - c$ ，

在 $\triangle ACD$ 中， $\tan(\alpha + \beta) = \frac{AD}{CD} = \frac{a-c}{x}$ ，

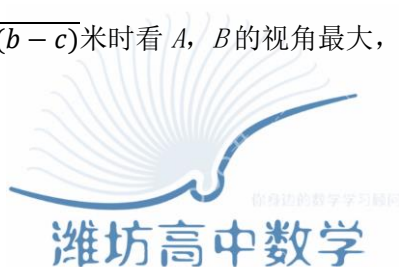
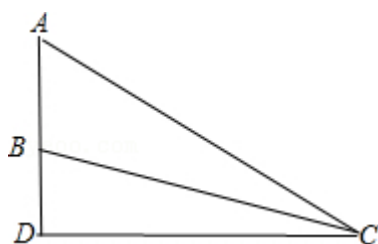
在 $\triangle BCD$ 中， $\tan \alpha = \frac{BD}{CD} = \frac{b-c}{x}$ ，

$$\therefore \tan \beta = \tan((\alpha + \beta) - \alpha) = \frac{\frac{a-c}{x} - \frac{b-c}{x}}{1 + \frac{a-c}{x} \cdot \frac{b-c}{x}} = \frac{a-b}{x + \frac{(a-c)(b-c)}{x}} \leq \frac{a-b}{2\sqrt{x \cdot \frac{(a-c)(b-c)}{x}}} = \frac{a-b}{2\sqrt{(a-c)(b-c)}},$$

当且仅当 $x = \frac{(a-c)(b-c)}{x}$ ，等号成立，即 $x = \sqrt{(a-c)(b-c)}$ ，

$\therefore$ 离此树的水平距离为 $\sqrt{(a-c)(b-c)}$ 米时看 A ， B 的视角最大，

故答案为： $\sqrt{(a-c)(b-c)}$ 。



四、解答题

39. 【解析】(1) 这三个条件为: ① $\cos A = \frac{1}{2}$; ③ $a = \sqrt{3}$; ④ $b = 1$.

(2) 由余弦定理可得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$,

即 $3 = 1 + c^2 - 2c \times \frac{1}{2}$, 解得 $c = 2$.

40. 【解析】若选①

因为 $\sqrt{2}a \sin C = c \cos(\frac{\pi}{4} - A)$, 由正弦定理得 $\sqrt{2} \sin A \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin C (\sin A + \cos A)$,

所以 $\sin A = \cos A$, $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{4}$, $S_{\triangle ABC} = 3 = \frac{1}{2}bc \sin A$, 且 $b = 3$, 得 $c = 2\sqrt{2}$.

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$, 解得 $a = \sqrt{5}$.

若选②

因为 $\sqrt{2}ccosA = a \cos B + b \cos A$,

由正弦定理得 $\sqrt{2} \sin C \cos A = \sin A \cos B + \sin B \cos A = \sin(A+B) = \sin$,

所以 $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{4}$, $S_{\triangle ABC} = 3 = \frac{1}{2}bc \sin A$, 且 $b = 3$, 得 $c = 2\sqrt{2}$.

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$, 解得 $a = \sqrt{5}$.

若选③

因为 $b^2 + c^2 = a^2 + \sqrt{2}bc$, $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{2}bc$, 得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{4}$, $S_{\triangle ABC} = 3 = \frac{1}{2}bc \sin A$, 且 $b = 3$, 得 $c = 2\sqrt{2}$.

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$, 解得 $a = \sqrt{5}$.

41. 【解析】(1) $f(x) = \vec{n} \cdot \vec{n} = 2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos 2x$,

$$= \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \times \left(\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right),$$

$$= 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\therefore f(x) \text{ 的最小正周期为: } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi,$$

$$\text{又} \because 2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore k\pi + \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{7\pi}{12}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调递减区间为 } \left[\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi \right], k \in \mathbb{Z},$$

$$(2) f\left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left[2 \times \left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2\sin A = \sqrt{3},$$

$$\text{即 } \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\because a=7, \text{ 由正弦定理可得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R = \frac{14\sqrt{3}}{3} \quad (R \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 外接圆的半径}),$$

$$\therefore \sin B + \sin C = \frac{b+c}{2R} = \frac{13\sqrt{3}}{14},$$

$$b+c = \frac{14\sqrt{3}}{3} \times \frac{13\sqrt{3}}{14} = 13.$$

42. 【解析】(1) 由 $f(0) = \frac{1}{2}$, 得 $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, 又 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 故 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,

$$\text{由 } f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 0, \text{ 得 } \sin\left(\omega \cdot \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right) = 0,$$

$$\text{所以 } \omega \cdot \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{即 } \omega = \frac{2}{5}(6k-1), \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{由 } \omega > 0, \text{ 结合函数图象可知 } \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} > \frac{5\pi}{12}, \text{ 所以 } 0 < \omega < \frac{12}{5},$$

$$\text{所以有 } 0 < \frac{2}{5}(6k-1) < \frac{12}{5}, \text{ 即 } \frac{1}{6} < k < \frac{7}{6}, \text{ 又 } k \in \mathbb{Z}, \text{ 所以 } k=1,$$

$$\text{从而 } \omega = \frac{2}{5} \times (6 \times 1 - 1) = 2, \text{ 因此, } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right);$$

$$(2) \text{ 由 } f\left(\frac{A-B}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{5}, \text{ 得 } \sin(A-B) = \frac{3}{5},$$

$$\text{又 } 0 < A-B < \frac{\pi}{2}, \text{ 故 } \cos(A-B) = \frac{4}{5},$$

$$\text{于是 } \cos \frac{A-B}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos(A-B)}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\text{又 } A+B > \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} > \frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2},$$

$$\text{又 } y = \sin x \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 上单调递增, } A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{所以 } \sin A > \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A-B}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

43. 【解析】解: $f(x) = 2\sin \omega x \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} = 2\sin \omega x \left(\cos \omega x \cos \frac{\pi}{6} + \sin \omega x \sin \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} =$

$$\sqrt{3}\cos \omega x \sin \omega x + \sin^2 \omega x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x - \frac{1}{2}\cos 2\omega x = \sin \left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right),$$

①若 $x = -\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴,

$$\text{则 } -\frac{\pi\omega}{3} - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ 即 } -\frac{\pi\omega}{3} = k\pi + \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{可得 } \omega = -3k - 2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{又 } 0 < \omega < 2,$$

$$\text{当 } k = -1 \text{ 时, 可得 } \omega = 1,$$

$$\text{可得 } f(x) = \sin \left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

②若 $\frac{\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点,

$$\text{则 } \frac{\pi}{12} \times 2\omega - \frac{\pi}{6} = k\pi, \text{ 即 } \frac{\pi}{6}\omega = k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{可得 } \omega = 6k + 1, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{又 } 0 < \omega < 2,$$

$$\text{所以当 } k = 0 \text{ 时, } \omega = 1,$$

$$\text{所以 } f(x) = \sin \left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

③函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 且 $b - a$ 的最大值为 $\frac{\pi}{2}$,

$$\text{则 } T = \pi = \frac{2\pi}{2\omega},$$

$$\text{故 } \omega = 1,$$

$$\text{所以 } f(x) = \sin \left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{由 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ 可得 } \frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{令 } k = 0, \text{ 可得 } \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}, \text{ 令 } k = -1, \text{ 可得 } -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq -\frac{\pi}{6},$$

$$\text{又 } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 在 } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 上的单调递减区间为: } \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right].$$

44. 【解析】(1) $\because \triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $BC = 4$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle ABC = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore AB = 3$$

$\because \triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 13$,

$$\therefore AC = \sqrt{13};$$

(2) 设 $\angle ACD = \alpha$, 则 $\angle ACB = \angle ACD + \frac{\pi}{3} = \alpha + \frac{\pi}{3}$,

$\because \text{Rt} \triangle ACD$ 中, $AD = 3\sqrt{3}$,

$$\therefore AC = \frac{AD}{\sin \alpha} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin \alpha},$$

$\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \pi - \angle ACB - \angle ABC = \frac{\pi}{3} - \alpha$,

由正弦定理可得: $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$, 即 $\frac{4}{\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha}$,

$$\therefore 3 \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) = 2 \sin \alpha, \text{ 化简可得 } \tan \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{7},$$

$$\therefore \tan \angle ACD = \frac{3\sqrt{3}}{7}.$$

45. 【解析】(1) $\because \sin C = \sqrt{3} \sin B$, 由正弦定理得: $c = \sqrt{3}b$, 又 $b^2 = c$,

联立解之得 $b = \sqrt{3}, c = 3$.

选条件③ $a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{3}ac$

由余弦定理 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $B = \frac{\pi}{6}$

选条件② $\frac{bc \cos B}{c} = \sin B$ 可得 $\tan B = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $B = \frac{\pi}{6}$

选条件① $\sin C = \cos A \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(A + B) = \cos A \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A$

$\sin A \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A$, 所以 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $B = \frac{\pi}{6}$

(2) 由 (1) $B = \frac{\pi}{6}$, 由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 所以 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(i) 当时 $C = \frac{\pi}{3}$, $A = \frac{\pi}{2}$, 此时 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(ii) 当 $C = \frac{2\pi}{3}$ 时, $A = \frac{\pi}{6}$, 此时 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

综上, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

46. 【解析】(1) 证明: 因为 $\frac{c}{b} < \cos A$, 由正弦定理可得: $\frac{\sin C}{\sin B} < \cos A$,

由于 $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$, 且 $\sin B > 0$,

所以不等式整理为 $\sin A \cos B + \cos A \sin B < \sin B \cos A$, 即 $\sin A \cos B < 0$,

由于在三角形中 $\sin A > 0$,

所以 $\cos B < 0$,

所以得证 B 为钝角;

(2) i) 若满足①②③, 则正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 即 $\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin C}$, 所以 $\sin C = \frac{1}{2}$,

又 $a > c$, 所以 $A > C$, 在三角形中, $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $A = \frac{\pi}{4}$ 或 $A = \frac{3\pi}{4}$, 而由 (1) 可得 $A = \frac{\pi}{4}$,

所以可得 $C = \frac{\pi}{6}$, $B = \pi - A - C = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{12}$,

所以 $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B} = \sqrt{4 + 2 - 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times (-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4})} = \sqrt{3} + 1$.

ii) 若满足①②④, 由 (1) B 为钝角, A, C 为锐角, 及 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 可得 $A = \frac{\pi}{4}$, $C = \frac{\pi}{3}$, 所以 $B = \frac{5\pi}{12}$ 不符合 B 为钝角, 故这种情况不成立;

iii) 若满足②③④, 由 B 为钝角, $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$, 而 $a > c$, 所以 $A > C$, 这时 $B < \frac{\pi}{3}$, 不符合 B 为钝角的情况, 所以这种情况不成立;

综上所述: 只有满足①②③时 $\triangle ABC$ 存在, $b = \sqrt{3} + 1$.

47. 【解析】(1) 因为 $\frac{\pi}{3} - B + \frac{\pi}{6} + B = \frac{\pi}{2}$,

所以 $\cos(\frac{\pi}{3} - B) \cdot \sin(\frac{\pi}{6} + B) = \sin^2(\frac{\pi}{6} + B) = \frac{3}{4}$, 即 $\sin(\frac{\pi}{6} + B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为 $B \in (0, \pi)$,

所以 $B + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, 或 $B + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$,

解得 $B = \frac{\pi}{6}$, 或 $B = \frac{\pi}{2}$.

(2) 由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = 2R$, 可得 $R = \frac{b}{2\sin B}$,

所以 $\triangle ABC$ 外接圆面积 $S = \pi R^2 = \frac{\pi b^2}{4\sin^2 B}$,

①当 $B = \frac{\pi}{6}$ 时, 由余弦定理可得: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{\pi}{6} = (a+c)^2 - (2+\sqrt{3})ac = 4 - (2+\sqrt{3})ac$,

因为 $ac \leq (\frac{a+c}{2})^2$,

所以 $b^2 \geq 4 - (2+\sqrt{3})(\frac{a+c}{2})^2 = 2 - \sqrt{3}$,

因此 $\triangle ABC$ 外接圆面积的最小值 $S = \frac{\pi(2-\sqrt{3})}{4\sin^2 \frac{\pi}{6}} = (2-\sqrt{3})\pi$.

②当 $B = \frac{\pi}{2}$ 时, 由勾股定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 \geq \frac{(a+c)^2}{2} = 2$,

因此 $\triangle ABC$ 外接圆面积的最小值 $S = \frac{2\pi}{4\sin^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

48. 【解析】(1) 解: $\because A, B, C$ 是三角形 ABC 的内角, 则 $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$, 又 $10\sin^2 \frac{A+C}{2} = 7 - \cos 2B$,

$\therefore 10\cos^2 \frac{B}{2} = 7 - \cos 2B$, 即 $5 + 5\cos B = 7 - (2\cos^2 B - 1)$, 整理得 $2\cos^2 B + 5\cos B - 3 = 0$,

$\therefore \cos B = \frac{1}{2}$ 或 $\cos B = -3$ (舍), 又 $0 < B < \pi$,

$\therefore B = \frac{\pi}{3}$

(2) 解: $\because S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot BA \cdot \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, 可得 $BD \cdot BA = 3$,

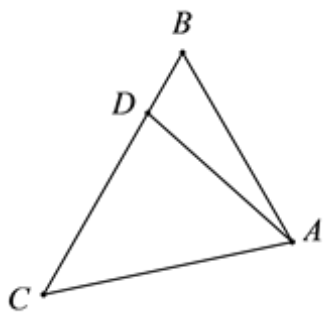
在 $\triangle ABD$ 中, $AD^2 = BD^2 + BA^2 - 2BD \cdot BA \cos B = 7$,

$\therefore BD^2 + BA^2 - BD \cdot BA = 7$, 又 $AB > BD$,

$\therefore BD = 1$, $BA = 3$, $BC = 4$,

由余弦定理有 $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BC \cdot BA \cdot \cos B = 13$,

$\therefore AC = \sqrt{13}$.



49. 【解析】(1) 若选条件①: 因为 $\sqrt{3}b \cos A = 2c \sin C - \sqrt{3}a \cos B$, 由正弦定理可得

$$\sqrt{3}(\sin B \cos A + \sin A \cos B) = 2\sin^2 C,$$

所以 $\sqrt{3}\sin(A+B) = 2\sin^2 C$.

因为 $A+B+C = \pi$, 即 $A+B = \pi - C$, 所以 $\sqrt{3}\sin C = 2\sin^2 C$.

因为 $\sin C \neq 0$, 所以 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

若选条件②: 因为 $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + C\right) + \cos C = \frac{5}{4}$, 所以 $(-\sin C)^2 + \cos C - \frac{5}{4} = 0$,

$$\text{即 } 1 - \cos^2 C + \cos C - \frac{5}{4} = 0,$$

$$\text{所以 } \cos^2 C - \cos C + \frac{1}{4} = 0,$$

$$\text{解得 } \cos C = \frac{1}{2}.$$

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

若选条件③: 因为 $a \sin \frac{A+B}{2} = c \sin A$, 又 $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$, 所以 $a \cos \frac{C}{2} = c \sin A$.

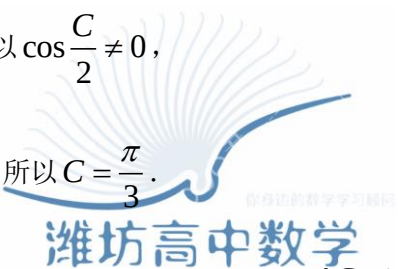
由正弦定理可得, $\sin A \cos \frac{C}{2} = \sin C \sin A$.

因为 $\sin A \neq 0$, 所以 $\cos \frac{C}{2} = \sin C$,

$$\text{即 } \cos \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $\cos \frac{C}{2} \neq 0$,

则有 $\sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{6}$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$.



$$(2) \text{ 因为 } AB = \sqrt{3}, AC = \sqrt{2}, \text{ 由正弦定理得 } \sin B = \frac{AC \cdot \sin C}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{4}, \text{ 则 } A = \frac{5\pi}{12}.$$

因为 CE 是角 C 的平分线, 所以 $\angle ACE = \frac{\pi}{6}$,

故 $\angle CEA = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$, 所以 $\angle A = \angle CEA$,

则 $\triangle AEC$ 为等腰三角形, 所以 $AC = CE = \sqrt{2}$.

故 CE 的长为 $\sqrt{2}$.

50. 【解析】(1) $\because A + B + C = \pi$, $\therefore B + C = \pi - A$,

$$\therefore 4\cos^2 \frac{A}{2} - \cos 2(B + C) = 2(1 + \cos A) - \cos 2A = -2\cos^2 A + 2\cos A + 3 = \frac{7}{2}$$

解得 $\cos A = \frac{1}{2}$, 又 $0 < A < \pi$, $\therefore A = \frac{\pi}{3}$;

(2) 设 $\angle ABD = \theta$,

因为点 D 满足 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{3}$, 所以 $c - \frac{2}{3}b = |AB| - |AD|$,

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理可得: $\frac{|AD|}{\sin \theta} = \frac{|AB|}{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{|\overrightarrow{BD}|}{\sin A} = 2$,

所以 $|AB| = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$, $|AD| = 2\sin \theta$,

所以 $|AB| - |AD| = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin \theta$,

即 $c - \frac{2}{3}b = \sqrt{3}\cos \theta - \sin \theta = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$,

因为 $\theta \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$, 所以 $\frac{\pi}{3} - \theta \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

所以 $c - \frac{2}{3}b \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

51. 【解析】(1) 解: 若选①: 因为 $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$,

所以由正弦定理得 $(b - c)^2 = a^2 - bc$, 整理得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$,

$$\text{所以 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{若选②: 因为 } 2a \sin C = c \tan A, \text{ 所以 } 2 \sin A \sin C = \sin C \cdot \frac{\sin A}{\cos A},$$

$$\text{即 } \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{若选③: 因为 } 2 \cos^2 \frac{B+C}{2} = \cos 2A + 1, \text{ 所以 } \cos(B+C) + 1 = 2 \cos^2 A - 1 + 1,$$

$$\text{即 } 2 \cos^2 A + \cos A - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } \cos A = \frac{1}{2} \text{ 或 } \cos A = -1,$$

$$\text{因为 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 因为 } \sin B = \sqrt{2} \sin C, \text{ 由正弦定理得 } b = \sqrt{2}c,$$

$$\text{因为 } b = \sqrt{2}, \text{ 所以 } c = 1,$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

52. 【解析】(1) 根据正弦定理 $c \cos A = (\sqrt{2}b - a) \cos C$ 可化为 $\sin C \cos A = (\sqrt{2} \sin B - \sin A) \cos C$,

$$\text{即 } \sin A \cos C + \sin C \cos A = \sqrt{2} \sin B \cos C, \text{ 则 } \sin(A+C) = \sqrt{2} \sin B \sin C. \text{ 由于 } A+B+C = \pi,$$

$$\text{故 } \sin(A+C) = \sin B, \text{ 所以 } \sin B = \sqrt{2} \sin B \sin C, \text{ 又 } \sin B \neq 0, \text{ 所以 } \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{因为 } C \in (0, \pi), \text{ 所以 } C = \frac{\pi}{4}. \text{ 又 } A = \frac{\pi}{12}, \text{ 所以 } B = \pi - (A+C) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{由正弦定理有 } \frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin A}{BC}, \text{ 得 } AB = \frac{\sin C}{\sin A} \cdot BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \times 1 = \sqrt{3} + 1.$$

$$\text{则 } BD = AB - AD = \sqrt{3}, \text{ 在 } \triangle BCD \text{ 中, 由余弦定理得 } CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD \cdot \cos B = 1^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + \sqrt{3}.$$

$$\text{所以 } CD = \sqrt{4 + \sqrt{3}}, \text{ 则 } 2R = \frac{CD}{\sin B} = \frac{2\sqrt{4 + \sqrt{3}}}{\sqrt{3}}, \text{ 所以 } R = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{3}}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{故 } \triangle BCD \text{ 的外接圆的面积为 } S = \pi R^2 = \pi \times \frac{4 + \sqrt{3}}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } c = 2, C = \frac{\pi}{4}; \text{ 根据余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C;$$

$$\text{得 } 4 = a^2 + b^2 - 2ab \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab \geq 2ab - \sqrt{2}ab \text{ (当且仅当 } a = b \text{ 时, 等号成立),}$$

所以 $ab \leq \frac{4}{2-\sqrt{2}} = 4+2\sqrt{2}$, 故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{\sqrt{2}}{4}ab \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \times (4+2\sqrt{2}) = \sqrt{2}+1$ (当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立).

53. 【解析】若选条件①,

$$(1) \text{ 由 } \sin A = \cos \frac{A}{2}, \text{ 可得 } 2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \cos \frac{A}{2},$$

因为 $A \in (0, \pi)$, 可得 $\frac{A}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\cos \frac{A}{2} \neq 0$,

$$\text{所以 } \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}, \text{ 可得 } \frac{A}{2} = \frac{\pi}{6}, A = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) \text{ 由余弦定理, } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, a=2,$$

则 $4 = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = bc$, 当且仅当 $b=c=2$ 时等号成立,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A \leq \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \text{ 即 } \triangle ABC \text{ 面积的最大值为 } \sqrt{3}.$$

若选条件②,

$$(1) \text{ 由 } 2a\cos A = b\cos C + c\cos B,$$

可得 $2\sin A\cos A = \sin B\cos C + \cos B\sin C$, 即 $2\sin A\cos A = \sin(B+C) = \sin A$,

$$\text{又 } \sin A \neq 0, \text{ 故 } \cos A = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } 0 < A < \pi, \text{ 故 } A = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) \text{ 由余弦定理, } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, a=2,$$

则 $4 = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = bc$, 当且仅当 $b=c=2$ 时等号成立,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A \leq \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \text{ 即 } \triangle ABC \text{ 面积的最大值为 } \sqrt{3}.$$

若选条件③,

$$(1) \text{ 由 } a\cos C + (2b+c)\cos A = 0,$$

可得 $\sin A\cos C + 2\sin B\cos A + \sin C\cos A = \sin(A+C) + 2\sin B\cos A = \sin B + 2\sin B\cos A = 0$,

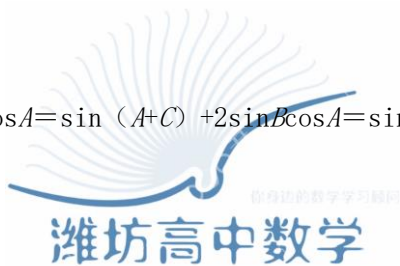
因为 $\sin B \neq 0$,

$$\text{可得 } \cos A = -\frac{1}{2},$$

$$\text{又 } 0 < A < \pi, \text{ 故 } A = \frac{2\pi}{3};$$

$$(2) \text{ 由余弦定理, } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, a=2,$$

则 $4 = b^2 + c^2 + bc \geq 2bc + bc = 3bc$, 即 $bc \leq \frac{4}{3}$, 当且仅当 $b=c=2$ 时等号成立,



所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A \leq \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

54. 【解析】解: (1) $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}AB \cdot BM \sin \angle ABM$, $S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2}BC \cdot BM \sin \angle MBC$.

因为 $S_{\triangle ABM} = 2S_{\triangle BCM}$, $\angle ABM = \angle MBC$,

所以 $AB = 2BC$.

由正弦定理得 $\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{AB}{BC} = 2$

(2) 由 $\frac{\sin C}{\sin A} = 2$ 得 $c = 2a$,

由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

又因为 $\cos B = \frac{1}{4}$, $b = 2$,

所以 $4 = a^2 + 4a^2 - 4a^2 \times \frac{1}{4}$,

所以 $a = 1$, 从而 $c = 2$.

又因为 $\cos B = \frac{1}{4}$ 且 $0 < B < \pi$,

所以 $\sin B = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

因此 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

55. 【解析】(1) 解: 由 $\cos(A - C) + \cos B = \frac{3}{2}$

可知 $\cos(A - C) - \cos(A + C) = \frac{3}{2}$,

即 $\cos A \cos C + \sin A \sin C - \cos A \cos C + \sin A \sin C = \frac{3}{2}$,

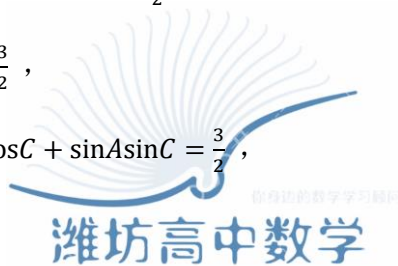
可得 $\sin A \sin C = \frac{3}{4}$.

由 $\vec{m} // \vec{n}$ 可得 $b^2 - ac = 0$,

由正弦定理可知 $\sin^2 B = \sin A \sin C = \frac{3}{4}$,

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 因此 $B = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$.

分别代入 $\cos(A - C) + \cos B = \frac{3}{2}$, 可知当 $B = \frac{2\pi}{3}$ 时, $\cos(A - C) = 2$, 不成立.



因此 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 解: 由 $B = \frac{\pi}{3}$ 可知 $\cos(A - C) = 1$, 即 $A = C$,

因此 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 即 $a = b = c$,

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot CD \sin \angle ACD = \frac{1}{2} b(5-a) \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} a(5-a) = \sqrt{3} ,$$

整理可得 $a(5-a) = 4$, 即 $a^2 - 5a = -4$,

由余弦定理可知, 在 $\triangle ABD$ 中,

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \frac{\pi}{3} = c^2 + 25 - 5c = a^2 + 25 - 5a = 21 ,$$

因此 AD 的长为 $\sqrt{21}$.

56. 【解析】 (1) 解: 由题意得 $6\sin^2 A + \cos A = 5$,

整理得 $6\cos^2 A - \cos A - 1 = 0$, 解得 $\cos A = \frac{1}{2}$ 或 $\cos A = -\frac{1}{3}$.

又 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\cos A = \frac{1}{2}$, 即 $A = \frac{\pi}{3}$;

(2) 解: 由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ 得 $4 = b^2 + c^2 - bc$,

即 $b^2 + c^2 = 4 + bc$,

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

即 $b = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin B$, $c = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin C$, 而 $C = \frac{2\pi}{3} - B$,

$$bc = \frac{16}{3} \sin B \sin C = \frac{16}{3} \sin B \sin(\frac{2\pi}{3} - B) = \frac{8\sqrt{3}}{3} \sin B \cos B + \frac{8}{3} \sin^2 B$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin 2B - \frac{4}{3} \cos 2B + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \sin(2B - \frac{\pi}{6}) + \frac{4}{3} ,$$

又 $\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2}{3}\pi - B < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 解得 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\frac{\pi}{6} < 2B - \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi$, 所以 $\sin(2B - \frac{\pi}{6}) \in (\frac{1}{2}, 1]$,

即 $bc \in (\frac{8}{3}, 4]$, 所以 $b^2 + c^2 = 4 + bc \in (\frac{20}{3}, 8]$.

57. 【解析】 $\because \angle B = 60^\circ$, $AB = 4$, 过 A 作 BC 的垂线 AO , 垂足为 O ,

$$\text{则 } AO = 4 \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} .$$

① $AD = \sqrt{5} < 2\sqrt{3}$, 此时满足条件的 $\triangle ABD$ 有 0 个;

② $AD = \sqrt{15} \in (2\sqrt{3}, 4)$, 此时满足条件的三角形有 2 个;

③ $AD=2\sqrt{7} \in (4, 4\sqrt{3})$, 此时满足条件的 $\triangle ABD$ 有 1 个.

此时 $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos 60^\circ$,

$$\therefore 28 = 16 + BD^2 - 2 \times 4 \times BD \times \frac{1}{2}, \text{ 解得 } BD = 6.$$

58. 【解答】解: (1) 若选①, 由于 $2\sin A \cos B = 2\sin C + \sin B$, 可得 $2\sin A \cos B = 2\sin(A+B) + \sin B = 2\sin A \cos B + 2\cos A \sin B + \sin B$, 可得 $2\cos A \sin B + \sin B = 0$,

因为 $\sin B \neq 0$,

$$\text{所以 } 2\cos A + 1 = 0, \text{ 解得 } \cos A = -\frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } A \in (0, \pi), \text{ 所以 } A = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{若选②, 因为 } \cos A + \cos \frac{A}{2} = 0, \text{ 可得 } 2\cos \frac{2A}{2} + \cos \frac{A}{2} - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } \cos \frac{A}{2} = -1, \text{ 或 } \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } A \in (0, \pi), \frac{A}{2} \in (0, \frac{\pi}{2}), \cos \frac{A}{2} \in (0, 1),$$

$$\text{所以 } \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2}, \text{ 可得 } \frac{A}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{ 可得 } A = \frac{2\pi}{3}.$$

(2) 因为 $b+c=10$, 且 $\triangle ABC$ 面积为 $2\sqrt{3}$,

$$\text{又 } A = \frac{2\pi}{3}, AD \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的内角平分线, 可得 } \angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\pi}{3},$$

由等面积法可得: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BAD} + S_{\triangle DAC}$,

$$\text{所以 } 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} b \cdot AD \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} c \cdot AD \sin \frac{\pi}{3}, \text{ 即 } 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times AD \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10,$$

$$\text{解得 } AD = \frac{4}{5}.$$

59. 【解析】选①: 由 $m \parallel n$ 得 $a \cos B = (2c - b) \cos A$,

$$\text{得 } \sin A \cos B = 2\sin C \cos A - \sin B \cos A, \text{ 得 } \sin(B+A) = 2\sin C \cos A,$$

$$\text{又 } \sin(B+A) = \sin C, \sin C \neq 0, \text{ 所以 } \cos A = \frac{1}{2}, \text{ 又 } 0 < A < \pi, \text{ 所以 } A = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{② 因为 } b = a \cos C + \frac{\sqrt{3}}{3} c \sin A,$$

$$\text{根据正弦定理得 } \sin B = \sin A \cos C + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin A,$$

$$\text{所以 } \sin(A+C) = \sin A \cos C + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin A,$$

$$\text{所以 } \sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin A \cos C + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin A,$$

所以 $\cos A \sin C = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin A$. 因为 $\sin C \neq 0$, 所以 $\tan A = \sqrt{3}$.

又 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

③ 因为 $\cos^2 A + \cos A \cos(C - B) = \sin B \sin C$,

所以 $\cos A [-\cos(B + C) + \cos(C - B)] = \sin B \sin C$,

所以 $2\cos A \sin B \sin C = \sin B \sin C$.

因为 $B \in (0, \pi)$, $C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B \sin C \neq 0$, 所以 $\cos A = \frac{1}{2}$,

又 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $a = \sqrt{3}$, $A = \frac{\pi}{3}$, 得 $b^2 + c^2 - bc = 3$.

由 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $bc = 2$, 所以 $b^2 + c^2 = 5$.

因为 M 是 BC 的中点, 所以 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$,

从而 $|\overrightarrow{AM}|^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + bc) = \frac{7}{4}$,

所以 $AM = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

60. 【解析】解: (1) 若选① $\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = -\sqrt{3} \sin B \sin C$,

由正弦定理得 $a^2 - b^2 - c^2 = -\sqrt{3}bc$,

由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

由 A 为三角形内角得 $A = \frac{\pi}{6}$;

(2) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}b$,

由正弦定理得 $b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{\sin(\frac{5\pi}{6} - C)}{\sin C} = \frac{\frac{1}{2}\cos C + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C}{\sin C} = \frac{1}{2\tan C} + \frac{\sqrt{3}}{2}$,

由题意得 $\begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{5\pi}{6} - C < \pi \end{cases}$, 解得 $\frac{\pi}{3} < C < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\tan C > \sqrt{3}$,

故 $\frac{\sqrt{3}}{2} < b < \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 从而 $\frac{\sqrt{3}}{8} < S_{\triangle ABC} < \frac{\sqrt{3}}{6}$,

故 $\triangle ABC$ 面积的取值范围 $(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{6})$;

(1) 若选② $b = a \cos C + \frac{1}{2}c$,

由正弦定理得 $\sin B = \sin A \cos C + \frac{1}{2} \sin C$,

所以 $\sin(A+C) = \sin A \cos C + \frac{1}{2} \sin C$,

所以 $\sin A \cos C + \sin C \cos A = \sin A \cos C + \frac{1}{2} \sin C$,

化简得 $\sin C \cos A = \frac{1}{2} \sin C$,

因为 $\sin C > 0$, 所以 $\cos A = \frac{1}{2}$,

由 A 为三角形内角得 $A = \frac{\pi}{3}$;

$$(2) S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} b,$$

由正弦定理得 $b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-C)}{\sin C} = \frac{\frac{1}{2} \sin C + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos C}{\sin C} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan C}$,

由题意得 $\begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - C < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 解得 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\tan C > \frac{\sqrt{3}}{3}$,

故 $\frac{1}{2} < b < 2$, 从而 $\frac{\sqrt{3}}{8} < S_{\triangle ABC} < \frac{\sqrt{3}}{2}$,

故 $\triangle ABC$ 面积的取值范围 $(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{2})$;

(1) 若选③ $(\cos C - \sqrt{3} \sin C) \cos A + \cos B = 0$,

所以 $(\cos C - \sqrt{3} \sin C) \cos A - \cos(A+C) = 0$,

化简得 $\sin A \sin C = \sqrt{3} \sin C \cos A$,

因为 $\sin C > 0$, 所以 $\tan A = \sqrt{3}$,

由 A 为三角形内角得 $A = \frac{\pi}{3}$;

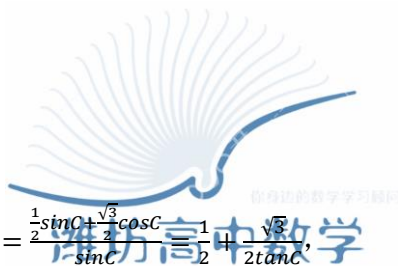
$$(2) S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} b,$$

由正弦定理得 $b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-C)}{\sin C} = \frac{\frac{1}{2} \sin C + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos C}{\sin C} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan C}$,

由题意得 $\begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - C < \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 解得 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\tan C > \frac{\sqrt{3}}{3}$,

故 $\frac{1}{2} < b < 2$,



$$\text{从而 } \frac{\sqrt{3}}{8} < S_{\triangle ABC} < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

故 $\triangle ABC$ 面积的取值范围 $(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

61. 【解析】解：(1) 方案一：条件①：

$$\text{已知： } \sqrt{3}\sin C + \cos C = \frac{b+c}{a},$$

$$\text{整理得： } \sqrt{3}\sin C + \cos C = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A},$$

$$\text{所以 } \sqrt{3}\sin C \sin A + \cos C \sin A = \sin(A+C) + \sin C,$$

$$\text{化简得： } (\sqrt{3}\sin A - \cos A)\sin C = \sin C,$$

$$\text{所以 } \sqrt{3}\sin A - \cos A = 1,$$

$$\text{故 } \sin(A - 30^\circ) = \frac{1}{2},$$

由于 $0^\circ < A < 180^\circ$,

所以 $A = 60^\circ$.

(2) 由于 $\angle OAC + \angle OAB = 60^\circ$, $\angle OAB + \angle ABO = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,

所以 $\angle OAC = \angle ABO$,

$$\text{在 } \triangle ABO \text{ 中, } \frac{AO}{\sin \angle ABO} = \frac{3}{\sin 120^\circ},$$

$$\text{所以 } AO = 2\sqrt{3}\sin \angle ABO,$$

$$\text{在 } \triangle ACO \text{ 中, } \frac{1}{\sin 150^\circ} = \frac{AO}{\sin \angle ACO} = \frac{AO}{\sin(30^\circ - \angle ABO)},$$

$$\text{所以 } AO = 2\sin(30^\circ - \angle ABO) = 2\sqrt{3}\sin \angle ABO,$$

$$\text{整理得： } \cos \angle ABO = 3\sqrt{3}\sin \angle ABO,$$

$$\text{故 } \tan \angle ABO = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

方案二：选②时， $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$,

$$\text{所以 } b^2 + c^2 - a^2 = bc,$$

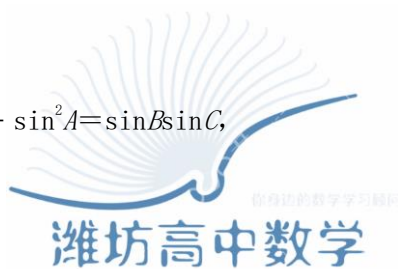
$$\text{所以 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2},$$

由于 $0^\circ < A < 180^\circ$,

所以 $A = 60^\circ$,

(2) 由于 $\angle OAC + \angle OAB = 60^\circ$, $\angle OAB + \angle ABO = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,

所以 $\angle OAC = \angle ABO$,



在 $\triangle ABO$ 中, $\frac{AO}{\sin \angle ABO} = \frac{3}{\sin 120^\circ}$,

所以 $AO = 2\sqrt{3}\sin \angle ABO$,

在 $\triangle ACO$ 中, $\frac{1}{\sin 150^\circ} = \frac{AO}{\sin \angle ACO} = \frac{AO}{\sin(30^\circ - \angle ABO)}$,

所以 $AO = 2\sin(30^\circ - \angle ABO) = 2\sqrt{3}\sin \angle ABO$, 整理得: $\cos \angle ABO = 3\sqrt{3}\sin \angle ABO$,

故 $\tan \angle ABO = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

方案三: 选条件③, $2\cos A (c\cos B + b\cos C) = a$,

整理得: $2\cos A (\sin C\cos B + \sin B\cos C) = \sin A$,

所以 $2\cos A \sin A = \sin A$, 整理得: $\cos A = \frac{1}{2}$,

由于 $0^\circ < A < 180^\circ$,

所以 $A = 60^\circ$.

(2) 由于 $\angle OAC + \angle OAB = 60^\circ$, $\angle OAB + \angle ABO = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,

所以 $\angle OAC = \angle ABO$,

在 $\triangle ABO$ 中, $\frac{AO}{\sin \angle ABO} = \frac{3}{\sin 120^\circ}$,

所以 $AO = 2\sqrt{3}\sin \angle ABO$,

在 $\triangle ACO$ 中,

$\frac{1}{\sin 150^\circ} = \frac{AO}{\sin \angle ACO} = \frac{AO}{\sin(30^\circ - \angle ABO)}$,

所以 $AO = 2\sin(30^\circ - \angle ABO) = 2\sqrt{3}\sin \angle ABO$,

整理得: $\cos \angle ABO = 3\sqrt{3}\sin \angle ABO$,

故 $\tan \angle ABO = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

