

专题二 复数

一、单项选择题

- (2021 济宁二模 2) 已知 $(2-i) \cdot z = i$, i 为虚数单位, 则 $|z| =$ ()
A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. 1 C. 2 D. $\sqrt{5}$
- (2021 泰安二模 2) 若复数 z 满足 $(3+4i)z = |4-3i|$, 则 z 的虚部为 ()
A. $\frac{4}{5}$ B. -4 C. $-\frac{4}{5}$ D. 4
- (2021 省实验中学二模 2) 已知复数 $z = (a-3i)(3+2i)$ ($a \in \mathbb{R}$) 的实部与虚部的和为 7, 则 a 的值为 ()
A. 1 B. 0 C. 2 D. -2
- (2021 日照二模 2) 若复数 z 满足 $iz = 2+3i$, 则 z 的实部与虚部之和为 ()
A. -1 B. 1 C. -2 D. 3
- (2021 潍坊三模 2) 设复数 z_1, z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称, $z_1 = 2+i$, 则 $z_1 z_2 =$ ()
A. -5 B. 5 C. $-4+i$ D. $-4-i$
- (2021 青岛三模 2) $z(1+i) = 2i$ (i 为虚数单位), 则复数 z 对应的点在 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- (2021 潍坊四县 5 月联考 2) 已知复数 $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (i 为虚数单位), 则 $|\bar{z}-1| =$ ()
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{11}}{2}$ D. $\frac{1}{4}$
- (2021 菏泽二模 2) 若复数 $z = 1-i$, 则 $|z^2 - 2z| =$ ()
A. 0 B. 2 C. 4 D. 6
- (2021 滨州二模 2) 设 i 为虚数单位, 则复数 $z = \frac{|2-\sqrt{5}i|}{1+i}$ 的虚部为 ()
A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $-\frac{9}{2}$
- (2021 济南二模 1) 设复数 $z = \frac{2i}{1+i}$ (其中 i 为虚数单位), 则复数 z 在复平面内对应的点所在的象限为 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- (2021 淄博二模 2) 若复数 $\bar{z} = \frac{1-2i}{i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$ ().

- A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 1

12. (2021 烟台适应性练习一 2) 已知复数 $z = \frac{2}{1-i}$, 则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

13. (2021 烟台三模 2) 若复数 $z = \frac{1}{2} - \cos \theta + i \sin \theta$ 表示的点在第三象限, 则 θ 的取值范围为 ()

- A. $\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) (k \in \mathbb{Z})$ B. $\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$
C. $\left(2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) (k \in \mathbb{Z})$ D. $\left(2k\pi - \frac{2\pi}{3}, 2k\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$

14. (2021 烟台适应性练习二 2) 已知复数 z 满足 $|z - 1 - i| \leq 1$, 则 $|z|$ 的最小值为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2} - 1$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2} + 1$

15. (2021 日照三模 3) 在复平面内, 复数 $6+5i$ 与 $-3+4i$ 对应向量 $\vec{OA}$ 与 $\vec{OB}$, 则向量 $\vec{AB}$ 对应的复数是 ()

- A. $-1+9i$ B. $9+i$ C. $-9-i$ D. $9-i$

16. (2021 聊城二模 2) 已知复数 $z_1 = -2+i$, $z_2 = \frac{z_1}{i}$, 在复平面内, 复数 z_1 和 z_2 所对应的两点之间的距离是 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. $\sqrt{10}$ C. 5 D. 10

17. (2021 聊城三模 2) 已知 $a \in \mathbb{R}$, i 为虚数单位, 若 $\frac{a-3i}{2+4i}$ 为实数, 则 a 的值为 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $-\frac{3}{2}$

18. (2021 枣庄二模 5) 大数学家欧拉发现了一个公式: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, i 是虚数单位, e 为自然对数的

底数. 此公式被誉为“数学中的天桥”. 根据此公式, $\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^{2022} =$

(注: 底数是正实数的实数指数幂的运算律适用于复数指数幂的运算)

- A. 1 B. -1 C. i D. -i

19. (2021 潍坊二模 2) 在复数范围内, 已知 p, q 为实数, $1-i$ 是关于 x 的方程 $x^2 + px + q = 0$ 的一个根, 则 $p+q =$ ()

- A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

20. (2021 淄博三模 5) 已知 $z \in \mathbb{C}$, 且 $|z - i| = 1$, i 为虚数单位, 则 $|z - 1|$ 的最大值是 ()

- A. 2 B. $\sqrt{2} + 1$ C. $\sqrt{2} - 1$ D. $\sqrt{2}$

二、多项选择题

21. (2021 青岛二模 9) 已知复数 $z = \sqrt{3} + i$ (i 为虚数单位), $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数, 若复数 $z_0 = \frac{\bar{z}}{z}$, 则下列结论正确的是 ()

A. z_0 在复平面内对应的点位于第四象限

B. $|z_0| = 1$

C. z_0 的实部为 $\frac{1}{2}$

D. z_0 的虚部为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

22. (2021 德州二模 9) 已知复数 $z_1 = \frac{2}{-1+i}$ (i 为虚数单位), 下列说法正确的是 ().

A. z_1 对应的点在第三象限

B. z_1 的虚部为 -1

C. $z_1^4 = 4$

D. 满足 $|z| = |z_1|$ 的复数 z 对应的点在以原点为圆心, 半径为 2 的圆上

23. (2021 临沂二模 10) 1487 年, 瑞士数学家欧拉发现了复指数函数和三角函数的关系, 并写下公式: $e^{i\theta} = \cos \theta + i\sin \theta$, 这个公式在复变函数中有非常重要的地位, 即著名的“欧拉公式”, 被誉为“数学中的天桥”, 据欧拉公式, 则 ()

A. $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$

B. $|e^{\frac{\pi i}{4}}| = 1$

C. $(\frac{1-\sqrt{3}i}{2})^3 = 1$

D. $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}} + e^{-\frac{\pi i}{4}}}{2}$



专题二 复数参考答案

一、单项选择题

1. 【答案】 A

【解析】 $\because (2-i) \cdot z = i$ ，所以， $z = \frac{i}{2-i} = \frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2i-1}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ ，

因此， $|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

故答案为：A.

2. 【答案】 C

【解析】 由 $(3+4i)z = |4-3i|$ ，得 $z = \frac{5}{3+4i} = \frac{5(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ ，

$\therefore z$ 的虚部为 $-\frac{4}{5}$ 。

故选：C.

3. 【答案】 C

【解析】 $z = (a-3i)(3+2i) = 3a+2ai-9i-6i^2 = 3a+6+(2a-9)i$ ，

所以复数 z 的实部与虚部分别为 $3a+6$ ， $2a-9$ ，

则 $3a+6+2a-9=7$ ，得 $a=2$ 。

故选：C.

4. 【答案】 B

【解析】 $\because$ 复数 z 满足 $iz=2+3i$ ，则 $z = \frac{2+3i}{i} = 3-2i$ ，故 z 的实部与虚部之和 $3+(-2)=1$ ，

故选：B.

5. 【答案】 A

【解析】 由题意，得 $z_2 = -2+i$ ，则 $z_1 z_2 = (2+i)(-2+i) = -5$ ，故选 A.

6. 【答案】 A

【解析】 $(1+i)z=2i$ (i 为虚数单位)，

$\therefore z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = i+1$ ，

则 z 在复平面内对应的点 $(1, 1)$ 在第一象限。

故选：A.

7. 【答案】 A

【解析】复数 $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (i 为虚数单位),

$$\therefore \bar{z} - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\text{则 } |\bar{z} - 1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

故选: A.

8. 【答案】B

【解析】由题意可得: $z^2 = (1-i)^2 = -2i$, 则 $z^2 - 2z = (1-i)^2 - 2(1-i) = -2i + 2i = -2$, 所以 $|z^2 - 2z| = |-2| = 2$. 故选

B.

9. 【答案】B

$$\text{【解析】 } z = \frac{|2-\sqrt{5}i|}{1+i} = \frac{\sqrt{2^2+(-\sqrt{5})^2}}{1+i} = \frac{3}{1+i} = \frac{3(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i,$$

$\therefore$ 复数 z 的虚部为 $-\frac{3}{2}$.

故选: B.

10. 【答案】A

$$\text{【解析】 } \because z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1+i,$$

$\therefore$ 复数 z 所对应的点的坐标为 $(1, 1)$, 位于第一象限.

故选: A.

11. 【答案】A

$$\text{【解析】 } |z| = |\bar{z}| = \left| \frac{1-2i}{i} \right| = \frac{|1-2i|}{|i|} = \sqrt{5}.$$

$$\text{或者 } |z| = |\bar{z}| = \left| \frac{(1-2i)i}{i^2} \right| = |-2-i| = \sqrt{5}$$

故答案为: A

12. 【答案】D

$$\text{【解析】 } z = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+i,$$

则 $\bar{z} = 1-i$ 在复平面内对应的点 $(1, -1)$ 位于第四象限.

故选: D.

13. 【答案】B

【解析】 $\because$ 复数 $z = \frac{1}{2} - \cos\theta + i\sin\theta$ 表示的点在第三象限,



$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2} - \cos \theta < 0 \\ \sin \theta < 0 \end{cases}, \text{解得 } 2k\pi - \frac{\pi}{3} < \theta < 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

故选: B.

14. 【答案】B

【解析】 $\because$ 复数 z 满足 $|z - 1 - i| = 1$,

$\therefore$ 点 z 对应的点在以 $(1, 1)$ 为圆心, 1 为半径的圆上以及圆内,

要求 $|z|$ 的最小值, 只要找出圆上的点到原点距离最小的点即可,

连接圆心与原点, 长度是 $\sqrt{2}$,

最短距离要减去半径, 即 $\sqrt{2} - 1$.

故选: B.

15. 【答案】C

【解析】由题意, $\vec{OA} = (6, 5)$, $\vec{OB} = (-3, 4)$,

则 $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-9, -1)$,

$\therefore$ 向量 $\vec{AB}$ 对应的复数是 $-9 - i$.

故选: C.

16. 【答案】B

【解析】 $\because z_1 = -2 + i$, $\therefore z_2 = \frac{z_1}{i} = \frac{-2+i}{i} = \frac{(-2+i)(-i)}{-i^2} = -i^2 + 2i = 1 + 2i$,

$\therefore$ 复数 z_1 和 z_2 所对应的两点的坐标分别为 $(-2, 1)$, $(1, 2)$,

两点间的距离为 $d = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$.

故选: B.

17. 【答案】D

【解析】 $\frac{a-3i}{2+4i} = \frac{(a-3i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)} = \frac{2a-12-(4a+6)i}{20}$, 若其为实数,

则 $4a + 6 = 0$, 即 $a = -\frac{3}{2}$

故答案为: D

18. 【答案】D

【解析】 $(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^{2022} = [(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^2]^{1011} = i^{1011} = i^3 = -i$ ，故选 D.

19. 【答案】C

【解析】因为 $1-i$ 是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的一个根，

则 $1+i$ 是方程 $x^2+px+q=0$ 的另一个根，

由韦达定理可得 $1+i+(1-i)=-p$ ， $(1+i)(1-i)=q$ ，

解得 $p=-2$ ， $q=2$ ，

所以 $p+q=0$.

故选：C.

20. 【答案】B

【解析】由 $|z-i|=1$ ， z 表示的轨迹为以 $C(0, 1)$ 为圆心，1 为半径的圆上.

设 $P(1, 0)$ ，

则 $|z-1|$ 的最大值 $=|CP|+1=\sqrt{2}+1$.

故选：B.

二、多项选择题

21. 【答案】ABC

【解析】 $\because z = \sqrt{3} + i$ ，

$$\begin{aligned} \therefore z_0 &= \frac{\bar{z}}{z} = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{3}-i)^2}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} \\ &= \frac{3-2\sqrt{3}i+i^2}{(\sqrt{3})^2+1^2} = \frac{2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \end{aligned}$$

则 z_0 在复平面内对应的点位于第四象限，故 A 正确；

$|z_0| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$ ，故 B 正确；

z_0 的实部为 $\frac{1}{2}$ ，故 C 正确；

z_0 的虚部为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故 D 错误.

故选：ABC.

22. 【答案】A, B

【解析】由题意，复数 $z_1 = \frac{2}{-1+i} = \frac{2(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = -1-i$ ，

所以复数 z_1 在复平面内对应的点 $(-1, -1)$ 位于第三象限，所以 A 符合题意；



由 $z_1 = -1 - i$ ，可得复数的虚部为 -1 ，所以 B 符合题意；

由 $z_1^4 = (-1 - i)^4 = [(-1 - i)^2]^2 = (2i)^2 = -4$ ，所以 C 不正确；

由 $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ ，

所以满足 $|z| = |z_1|$ 的复数 z 对应的点在以原点为圆心，半径为 $\sqrt{2}$ 的圆上，所以 D 不正确.

故答案为：AB.

23. 【答案】ABD

【解析】解：A. $e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ ，正确；

B. $\because e^{\frac{\pi i}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ ， $\therefore |e^{\frac{\pi i}{4}}| = \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4}} = 1$ ，正确；

C. $\because \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})$ ， $\therefore (\frac{1-\sqrt{3}i}{2})^3 = \cos(-\frac{3\pi}{3}) + i \sin(-\frac{3\pi}{3}) = -1$ ，不正确；

D. 右边 = $\frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} + \cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$ ，正确.

故选：ABD.

