

专题十二 数学文化

一、单项选择

1. (滨州一模 2) 棣莫弗公式 $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta, i\sin n\theta)$ (i 为虚数单位, $r > 0$) 是由法国数学家棣莫弗 (1667 - 1754) 发现的. 根据棣莫弗公式, 在复平面内复数 $[2(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7})]^{15}$ 对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】A

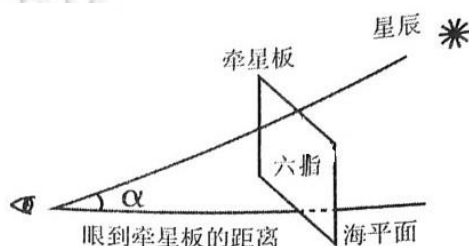
2. (青岛一模 4) 18 世纪末期, 挪威测量学家威塞尔首次利用坐标平面上的点来表示复数, 使复数及其运算具有了几何意义, 例如, $|z| = |OZ|$, 也即复数 z 的模的几何意义为 z 对应的点 Z 到原点的距离, 在复数平面内, 复数 $z_0 = \frac{a+2i}{1+i}$ (i 是虚数单位, $a \in \mathbb{R}$) 是纯虚数, 其对应的点为 Z_0 , Z 为曲线 $|z| = 1$ 上的动点, 则 Z_0 与 Z 之间的最小距离为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

3. (德州一模 4) 《史记》卷六十五《孙子吴起列传第五》中有这样一道题: 齐王与田忌赛马, 田忌的上等马劣于齐王的上等马, 优于齐王的中等马, 田忌的中等马劣于齐王的中等马, 优于齐王的下等马, 田忌的下等马劣于齐王的下等马, 现两人进行赛马比赛, 比赛规则为: 每匹马只能用一次, 每场比赛双方各出一匹马, 共比赛三场. 每场比赛中胜者得 1 分, 否则得 0 分. 若每场比赛之前彼此都不知道对方所用之马, 则比赛结束时, 田忌得 2 分的概率 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

4. (日照一模 4) 明朝早期, 郑和七下西洋过程中, 将中国古代天体测量方面所取得的成就创造性地应用于航海, 形成了一套先进的航海技术——“过洋牵星术”, 简单地说, 就是通过观测不同季节、时辰的日月星辰在天空运行的位置和测量星辰在海面以上的高度来判断水位. 其采用的主要工具是牵星板, 其由 12 块正方形模板组成, 最小的一块边长约 2 厘米 (称一指), 木板的长度从小到大依次成等差数列, 最大的边长约 24 厘米 (称十二指). 观测时, 将木板立起, 一手拿着木板, 手臂伸直, 眼睛到木板的距离大约为 72 厘米, 使牵星板与海平面垂直, 让板的下缘与海平面重合, 上边缘对着所观测的星辰依高低不同替换、调整木板, 当被测星辰落在木板上边缘时所用的是几指板, 观测的星辰离海平面的高度就是几指, 然后就可以推算出船在海中的地理纬度. 如图所示, 若在一次观测中, 所用的牵星板为六指板, 则 $\sin 2\alpha$ 约为



- A. $\frac{12}{35}$ B. $\frac{12}{37}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

5. (2021·临沂一模 7) 高斯是德国著名的数学家, 近代数学奠基者之一, 享有“数学王子”的美誉, 用其名字命名的“高斯函数”: 设 $x \in \mathbf{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $y = [x]$ 称为高斯函数, 也称取整函数, 例如: $[-3.7] = -4$, $[2.3] = 2$. 已知 $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}$, 则函数 $y = [f(x)]$ 的值域为 ()

A. $\{0\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{-2, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

6. (菏泽一模 7) 在地球公转过程中, 太阳直射点的纬度随时间周而复始不断变化, 太阳直射点回归运动的一个周期就是一个回归年. 某科研小组以某年春分 (太阳直射赤道且随后太阳直射点逐渐北移的时间) 为初始时间, 统计了连续 400 天太阳直射点的纬度值 (太阳直射北半球时取正值, 直射南半球时取负值).

设第 x 天时太阳直射点的纬度值为 y , 该科研小组通过对数据的整理和分析, 得到 y 与 x 近似满足 $y = 23.4392911 \sin 0.01720279x$. 则每 400 年中, 要使这 400 年与 400 个回归年所含的天数最为接近, 应设定闰年的个数为 () (精确到 1)

参考数据 $\frac{\pi}{0.01720279} \approx 182.6211$.

- A. 95 B. 96 C. 97 D. 98

二、多项选择

7. (潍坊一模 11) 南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中出现的形状, 后人称为“三角垛”. “三角垛”的最上层有 1 个球, 第二层有 3 个球, 第三层有 6 个球, $\dots$, 设各层球数构成一个数列 $\{a_n\}$, 则



第 11 题

- A. $a_4 = 12$ B. $a_{n+1} = a_n + n + 1$ C. $a_{100} = 5050$ D. $2a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+2}$

8. (济南一模 11) 1904 年, 瑞典数学家科赫构造了一种曲线. 如图, 取一个边长为 1 的正三角形, 在每个边上以中间的 $\frac{1}{3}$ 为一边, 向外侧凸出作一个正三角形, 再把原来边上中间的 $\frac{1}{3}$ 擦掉, 得到第 2

个图形, 重复上面的步骤, 得到第 3 个图形. 这样无限地作下去, 得到的图形的轮廓线称为科赫曲线. 云层的边缘, 山脉的轮廓, 海岸线等自然界里的不规则曲线都可用“科赫曲线”的方式来研究, 这门学科叫“分形几何学”. 下列说法正确的是



A.第 4 个图形的边长为 $\frac{1}{81}$

B.记第 n 个图形的边数为 a_n ,则 $a_{n+1}=4a_n$

C.记第 n 个图形的周长为 b_n ,则 $b_n=3\cdot(\frac{4}{3})^{n-1}$

D.记第 n 个图形的面积为 S_n ,则对任意的 $n\in\mathbb{N}_+$,存在正实数 M ,使得 $S_n<M$

9. (济南一模 12) 画法几何的创始人—法国数学家加斯帕尔·蒙日发现：与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是以椭圆中心为圆心的圆，我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆。已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点, A, B 为椭圆上两个动点. 直线 l 的方程为 $bx+ay-a^2-b^2=0$. 下列说法正确的是

A. C 的蒙日圆的方程为 $x^2+y^2=3b^2$

B. 对直线 l 上任意点 P , $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$

C. 记点 A 到直线 l 的距离为 d , 则 $d \cdot |AF_2|$ 的最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}b$

D. 若矩形 $MNGH$ 的四条边均与 C 相切, 则矩形 $MNGH$ 面积的最大值为 $6b^2$

专题十二 数学文化

一、单项选择

1. 【答案】A

【解析】由题意得， $[2(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})]^{15}=2^{15}(\cos\frac{15\pi}{7}+i\sin\frac{15\pi}{7})=2^{15}(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7})$ ，

其对应的点位于第一象限.

故选：A.

2. 【答案】B

【解析】 $z_0 = \frac{a+2i}{1+i} = \frac{(a+2i)(1-i)}{2} = \frac{(a+2)+(2-a)i}{2}$ ，因为 z_0 为纯虚数，所以 $a=-2$ ， $z_0 = 2i$ ， Z_0 点坐标为(0,2)，设 $z=x+yi$ ，则由 $|z|=1$ ，得 $x^2+y^2=1$ 表示以(0,0)为圆心，1为半径的圆，因此 Z_0 与 Z 的最小距离为1，故选B.

3. 【答案】C

【解析】每匹马只能用一次，每场比赛双方各出一匹马，共比赛三场. 每场比赛中胜者得1分，否则得0分.

设田忌的上等马、中等马、下等马分别为A, B, C,

齐王的上等马、中等马、下等马分别为a, b, c,

所有的基本事件有6种，分别为：

(Aa, Bb, Cc) ， (Aa, Bc, Cb) ， (Ab, Ba, Cb) ， (Ab, Bc, Cb) ， (Ac, Bb, ca) ， (Ac, Ba, Cb) ，

比赛结束时，田忌得2分的基本事件为： (Ab, Bc, Ca) ，只有1种，

$\therefore$ 比赛结束时，田忌得2分的概率 $P=\frac{1}{6}$.

故选：C.

4. 【答案】B

【解析】由题知 $\tan\alpha = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$ ，又 $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{6}$ ， $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ， α 为锐角，

则 $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{37}}$ ， $\cos\alpha = 6\sqrt{\frac{1}{37}}$ ，所以 $\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{12}{37}$ 。故选B

5. 【答案】B

【分析】分离常数可得出 $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^x+1}$ ，然后根据 $e^x > 0$ 可求出 $f(x)$ 的范围为 $-\frac{1}{2} < f(x) < 0$ 或 $0 \leq$

$f(x) < \frac{1}{2}$ ，然后即可求出 $y=[f(x)]$ 的值域.

【解析】 $f(x) = 1 - \frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^x+1}$,

$\because e^x+1 > 1, \therefore -1 < -\frac{1}{e^x+1} < 0, -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{e^x+1} < \frac{1}{2}$,

$\therefore -\frac{1}{2} < f(x) < 0, 0 \leq f(x) < \frac{1}{2}$,

$\therefore [f(x)] = -1$ 或 0 ,

$\therefore y = [f(x)]$ 的值域为 $\{-1, 0\}$.

故选: B.

6. 【答案】C

【解析】 $\because T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.01720279} \approx 365.2422$,

$\therefore$ 一个回归年对应的天数为 365.2422 天,

假设 400 年中应设定 x 个闰年, 则平年有 $(400 - x)$ 个,

$\therefore 366x + 365(400 - x) = 365.2422 \times 400$,

解得 $x \approx 97$,

$\therefore$ 应设定 97 个闰年.

故选: C.

另解: 一个回归年比一个平年多 0.2422 天, 那么 400 年约多 $0.2422 \times 400 = 96.88$ (天), 因此需要 97 个闰年, 故选 C

二、多项选择

7. 【答案】BC

【解析】由题意知 $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, 所以 $a_4 = 10$, A 错误; $a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, 则 $a_{n+1} - a_n = n + 1$,

故 B 正确; $a_{100} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$, C 正确; $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10$, 即 $2a_3 = a_2 \cdot a_4$, D 错误. 综上所述 BC.

8. 【答案】BCD

【解析】易知, 各个图形的边长成等比数列, 且 $q = \frac{1}{3}$, 因此可设边长为 $c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, 则 $C_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, A 错误; 易知, 各个图形的边数也成等比数列且 $q=4$, 所以 $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, B 正确; 周长为 $b_n = a_n c_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, C 正确; 由极限思想易知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 图形无限接近于圆, 故 $S_n < S_{\text{圆}} = M$, D 正确; 故选 BCD.

9. 【答案】AD

【解析】易知点 $Q(a,b)$ 在蒙日圆上，所以方程为 $x^2+y^2=a^2+b^2$ ，又由 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，得 $a^2=2b^2$ ，A 正确； l 过顶点 $P(b,a)$ ，而 Q 又满足蒙日圆方程，所以 P 在圆 $x^2+y^2=3b^2$ 上，当 A 、 B 恰为切点时， $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -1 < 0$ ，B 错误；由 A 在椭圆上，故 $|AF_1|+|AF_2|=2a$ ，所以 $d-AF_2=d-(2a-AF_1)=d+AF_1-2a$ ，当 $F_1A \perp l$ 时， $d+AF_1$ 有最小值，即 F_1 到 l 距离 $d' = \frac{|-bc-a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ，即 $d' = \frac{4}{3}\sqrt{3}b$ ，所以 $(d-AF_2)_{\min} = \frac{4\sqrt{3}}{3}b - 2a$ ，C 错误；当矩形四边都与椭圆 C 相切时，它为蒙日圆得内接矩形，对角线为蒙日圆得直径，设边长为 x, y ，则 $x^2+y^2=(2r)^2=4r^2=12b^2$ ， $S_{\text{矩形}} = xy \leq \frac{x^2+y^2}{2} = 6b^2$ ，D 正确；故选 AD。