专题十　平面解析几何

一、单项选择

1.（2021•淄博一模 3）圆 $x^2+y^2+2x-8=0$ 截直线 $y=kx+1$（$k\in\mathbf{R}$）所得的最短弦长为（　　）

A．$2\sqrt{7}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$4\sqrt{3}$　　D．2

2.（青岛一模 3）已知双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$，则该双曲线的离心率为（　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D.2

3.（泰安一模 5）已知直线 $x+y+2=0$ 与圆 $x^2+y^2+2x-2y+a=0$ 有公共点，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．（－∞，0]　　B．[0，+∞）　　C．[0，2）　　D．（－∞，2）

4.（烟台一模 4）已知 F 为抛物线 C:y^2=8x 的焦点，直线 l 与 C 交于 A，B 两点，若 AB 中点的横坐标为 4，则|AF|+|BF|=

A.8　　B.10　　C.12　　D.16

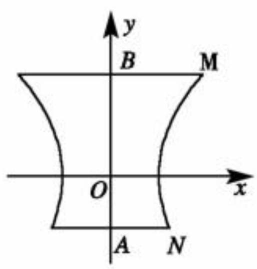
5.（2021•淄博一模 5）实轴长与焦距之比为黄金数 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的双曲线叫黄金双曲线．若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）是黄金双曲线，则 $\dfrac{a^2}{b^2}$ 等于（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　B．$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{5}-2}{2}$　　D．$\dfrac{9-4\sqrt{5}}{4}$

6.（济南一模 5）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{m+1}-\dfrac{y^2}{m}=1$(m>0)的渐近线方程为 $x\pm\sqrt{3}y=0$,则 m=

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\sqrt{3}-1$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　　D.2

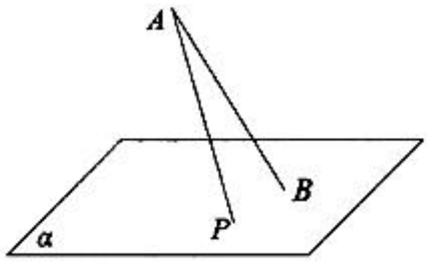
7.（聊城一模 4）如图为陕西博物馆收藏的国宝—唐•金筐宝钿团花纹金杯，杯身曲线内收，玲珑娇美，巧夺天工，是唐代金银细作的典范之作．该杯的主体部分可以近似看作是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的右支与直线 $x=0, y=4, y=-2$ 围成的曲边四边形 ABMN 绕 y 轴旋转一周得到的几何体，若该金杯主体部分的上口外直径为 $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$，下底外直径为 $\dfrac{2\sqrt{39}}{3}$，则双曲线 C 的离心率为



A．$\sqrt{2}$　　　B．2

C．$\sqrt{3}$　　　D．3

8.（滨州一模 5）如图，斜线段 AB 与平面 α 所成的角为$\frac{\pi}{4}$，B 为斜足．平面 α 上的动点 P 满足$\angle PAB=\frac{\pi}{6}$，则点 P 的轨迹为（　　）



A．圆　　　B．椭圆

C．双曲线的一部分　　　D．抛物线的一部分

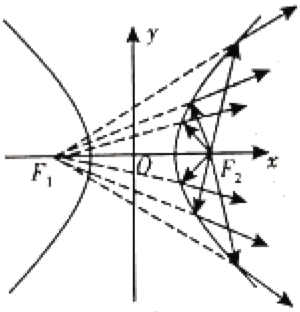
9.（聊城一模 7）已知圆$C: x^2+y^2=1$，直线$l: x+y+2=0$, P 为直线l上的动点，过点 P 作圆 C 的两条切线，切点分别为 A，B，则直线 AB 过定点

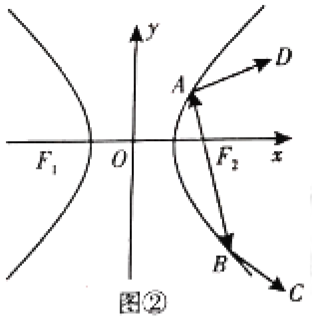
A．$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$　　B．$(-1,-1)$　　C．$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$　　D．$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

10.（济宁一模 8）已知 F_1、F_2是双曲线 E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右交点，点 M 是双曲线 E 上的任意一点(不是顶点)，过 F_1作$\angle F_1MF_2$角平分线的垂线，垂足为 N，O 是坐标原点. 若$|ON|=\frac{|F_1F_2|}{4}$，则双曲线 E 的渐近线方程为

A. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　B. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　C. $y=\pm\sqrt{2}x$　　D. $y=\pm\sqrt{3}x$

11.（2021•临沂一模 8）双曲线的光学性质为：如图①，从双曲线右焦点 F_2 发出的光线经双曲线镜面反射，反射光线的反向延长线经过左焦点 F_1.我国首先研制成功的“双曲线新闻灯”，就是利用了双曲线的这个光学性质．某“双曲线新闻灯”的轴截面是双曲线一部分，如图②，其方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$F_1$，$F_2$ 为其左、右焦点，若从右焦点 F_2 发出的光线经双曲线上的点 A 和点 B 反射后，满足$\angle BAD=90°$，$\tan\angle ABC=-\frac{3}{4}$，则该双曲线的离心率为（　　）





A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\frac{\sqrt{10}}{2}$　　D．$\sqrt{10}$

二、多项选择

12.（潍坊一模 9）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1\,(a>0)$的左，右焦点分别为 F₁，F₂，一条渐近线方程为$y=\frac{3}{4}x$，P 为 C 上一点，则以下说法正确的是

A．C 的实轴长为 8　B．C 的离心率为$\frac{5}{3}$　C．$|PF_1|-|PF_2|=8$　D．C 的焦距为 10

13.（青岛一模 9）关于圆 C：$x^2+y^2-kx+2y+\frac{1}{4}k^2-k+1=0$，下列说法正确的是（　　）

A.k 的取值范围是$k>0$

B.若$k=4$，过 M（3,4）的直线与圆 C 相交所得弦长为$2\sqrt{3}$，其方程为$12x-5y-16=0$

C.若$k=4$，圆 C 与圆$x^2+y^2=1$相交

D.若$k=4$，$m>0,n>0$，直线$mx-ny-1=0$恒过圆 C 的圆心，则$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\geq 8$恒成立。

14.（滨州一模 9）已知椭圆 M：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{20}=1$的左、右焦点分别是 F_1，F_2，左右顶点分别是 A_1，A_2，点 P 是椭圆上异于 A_1，A_2 的任意一点，则下列说法正确的是（　　）

A．$|PF_1|+|PF_2|=5$

B．直线 PA_1 与直线 PA_2 的斜率之积为$-\frac{4}{5}$

C．存在点 P 满足$\angle F_1PF_2=90°$

D．若$\triangle F_1PF_2$ 的面积为$4\sqrt{5}$，则点 P 的横坐标为$\pm\sqrt{5}$

15.（烟台一模 10）已知双曲线 C:$\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{m+7}=1(m\in R)$得一条渐近线方程为 4x-3y=0，则

A.$(\sqrt{7},0)$为 C 得一个焦点　　B.双曲线 C 的离心率为$\frac{5}{3}$

C.过点(5,0)作直线与 C 交于 A，B 两点，则满足|AB|=15 的直线有且只有两条

D.设 A,B,M 为 C 上三点且 A,B 关于原点对称，则 MA,MB 斜率存在时其乘积为$\frac{16}{9}$

16.（德州一模 11）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$），$A$、$B$ 分别为双曲线的左，右顶点，F_1、F_2 为左、右焦点，$|F_1F_2|=2c$，且 a，b，c 成等比数列，点 P 是双曲线 C 的右支上异于点 B 的任意一点，记 PA，PB 的斜率分别为 k_1，k_2，则下列说法正确的是（　　）

A．当 $PF_2\perp x$ 轴时，$\angle PF_1F_2=30°$

B．双曲线的离心率 $e=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

C．k_1k_2 为定值$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

D．若 I 为△PF_1F_2 的内心，满足 $S_{\triangle IPF_1}=S_{\triangle IPF_2}+xS_{\triangle IF_1F_2}$（$x\in\mathbf{R}$），则 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

17.（济南一模 12）画法几何的创始人－法国数学家加斯帕尔·蒙日发现：与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是以椭圆中心为圆心的圆，我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆。已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$F_1,F_2$ 分别为椭圆的左、右焦点，A,B 为椭圆上两个动点．直线 l 的方程为 $bx+ay-a^2-b^2=0$.下列说法正确的是

A.C 的蒙日圆的方程为 $x^2+y^2=3b^2$

B.对直线 l 上任意点 P，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}>0$

C.记点 A 到直线 l 的距离为 d,则 d-$|AF_2|$的最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}b$

D.若矩形 MNGH 的四条边均与 C 相切，则矩形 MNGH 面积的最大值为 $6b^2$

三、填空

18.（济宁一模 15）实数 x，y 满足 $x^2+(y-1)^2=1$，则$\sqrt{3}x+y$的取值范围是__________.

19.（德州一模 14）已知抛物线 C：$y^2=4x$，点 A、B 在抛物线上，且分别位于 x 轴的上、下两侧，若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=5$，则直线 AB 过定点_______.

20.（2021•淄博一模 14）若抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）上的点 A（x_0，－2）到焦点的距离是点 A 到 y 轴距离的 3 倍，则 p 等于_______.

21.（烟台一模 15）已知点 A 为直线 l:y=3x 上一点，且 A 位于第一象限，点 B(10,0)，以 AB 为直径的圆与 l 交于点 C(异于 A)，若∠CBA≥60°，则点 A 的横坐标的取值范围为______.

22.（聊城一模 14）已知抛物线$C:y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点为 F，A，B 是抛物线 C 上的两点，O 为坐标原

点，若 A，F，B 三点共线，且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3$，则 $p=$________.

23.（潍坊一模 15）已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，点 P 在抛物线 C 上，PQ 垂直 l 于点 Q，QF 与 y 轴交于点 T，O 为坐标原点，且|OT|＝2，则|PF|＝_______.

24.（滨州一模 15）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左顶点为 A，右焦点为 F，以 F 为圆心的圆与双曲线 C 的一条渐近线相切于第一象限内的一点 B．若直线 AB 的斜率为$\frac{1}{2}$，则双曲线 C 的离心率为____.

25.（青岛一模 16）2021 年是中国传统的“牛”年，可以在平面坐标系中用抛物线与圆勾勒出牛的形象。已知抛物线 $Z:x^2=4y$ 的焦点为 F，圆 F: $x^2+(y-1)^2=4$ 与抛物线 Z 在第一象限的交点为 P（m,$\frac{m^2}{4}$)，直线 $l:x=t(0<t<m)$ 与抛物线 Z 的交点为 A，直线 l 与圆 F 在第一象限的交点为 B,则 m=_____;三角形 FAB 周长的取值范围为_______（第一空 2 分，第二空 3 分)。

26.（菏泽一模 15）在抛物线 y^2＝4x 上任取一点 A（不为原点），F 为抛物线的焦点，连接 AF 并延长交抛物线于另一点 B，过 A，B 分别作准线的垂线，垂足分别为 C，D．记线段 CD 的中点为 T，则△ATB 面积的最小值为_____.

27.（泰安一模 16）过抛物线 C：y^2＝2px（p＞0）的焦点 F 的直线 l，交抛物线 C 的准线于点 A，与抛物线 C 的一个交点为 B，且$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BF}$（$k\geq\sqrt{2}$），若 l 与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a$＞0，$b$＞0）的一条渐近线垂直，则该双曲线离心率的取值范围是______.

28.（2021•临沂一模 16）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a$＞$b$＞0）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在椭圆上且$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=0$，$|PF_1|=\frac{4}{3}$，$|PF_2|=\frac{14}{3}$，则 C 的标准方程为______；若过点 M（$-\frac{3}{2}$，1）的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，且点 A，B 关于点 M 对称，则 l 的方程为______.

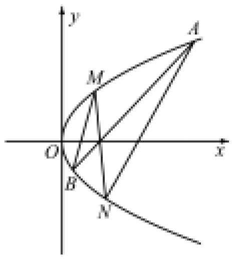
29.（**日照一模** 16）已知 F_1，F_2 分别为双曲线 C:$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$的左、右焦点，E 为双曲线 C 的右顶点，过 F_2 的直线与双曲线 C 的右支交于 A，B 两点（其中点 A 在第一象限），设 M，N 分别为ΔAF_1F_2，ΔBF_1F_2的内心，则$|ME|-|NE|$的取值范围是______.

四、解答

30.（济南一模 20）如图，A,B,M,N 为抛物线 y^2=2x 上四个不同的点，直线 AB 与直线 MN 相交于点（1,0)，直线 AN 过点（2,0).

（1)记 A,B 的纵坐标分别为 y_A,y_B,求 $y_A\cdot y_B$ 的值；

（2)记直线 AN,BM 的斜率分别为 k_1,k_2,是否存在实数入，使得 $k_2=\lambda k_1$?若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由.

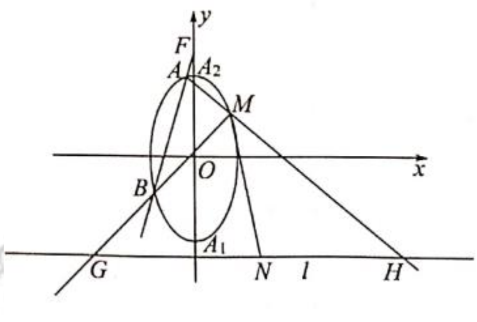


31.（滨州一模 21）已知点 *A*（0，﹣1），*B*（0，1），动点 *P* 满足$|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{AB}|=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BA}$．记点 *P* 的轨迹为曲线 *C*．

（1）求 *C* 的方程；

（2）设 *D* 为直线 $y=-2$ 上的动点，过 *D* 作 *C* 的两条切线，切点分别是 *E*，*F*．证明：直线 *EF* 过定点．

32.（2021•淄博一模 21）已知 A_1，A_2是椭圆 $E:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$ (a>b>0)长轴的两个端点，点 M(1,2)在椭圆 E 上，直线 MA_1,MA_2的斜率之积等于-4.



(1)求椭圆 E 的标准方程;

(2)设 m>0,直线 l 的方程为 y=-m,若过点 F(0,m)的直线与椭圆 E 相交于 A,B 两点，直线 MA,MB 与l的交点分别为 H,G,线段 GH 的中点为 N.判断是否存在正数 m 使直线 MN 的斜率为定值，并说明理由，

33.（泰安一模 21）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，短轴长为 $2\sqrt{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）已知 A，B 是椭圆 C 上的两个不同的动点，以线段 AB 为直径的圆经过坐标原点 O．是否存在以 O 为圆心的定圆恒与直线 AB 相切？若存在，求出定圆方程；若不存在，请说明理由．

34.（德州一模 21）已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右焦点分别为 F_1、F_2，椭圆上的点到焦点 F_1 的距离的最小值为$\sqrt{5}-1$，以椭圆 E 的短轴为直径的圆过点（2，0）．

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）若过 F_2 的直线交椭圆 E 于 A、B 两点，过 F_1 的直线交椭圆 E 于 C，D 两点，且 $AB\perp CD$，求四边形 $ACBD$ 面积的取值范围．

35.（聊城一模 21）已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$经过点 M(0，3)，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

(1)求 C 的方程；

(2)直线$l:y=kx-1$椭圆 C 相交于 A，B 两点，求$|MA|\cdot|MB|$的最大值．

36.（青岛一模 21）在平面直角坐标系中，已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，右焦点为$F_2$,上顶点为$A_2$,点 P（a,b）到直线$F_2A_2$的距离等于 1.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）直线$l:y=kx+m(m>0)$与椭圆 C 相交于 A,B 两点，D 为 AB 的中点，直线 DE,DF 分别与圆$W:x^2+(y-3m)^2=m^2$相切于点 E,F。求$\angle EWF$的最小值。

37.（烟台一模 21）已知 F_1,F_2 分别是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，A 为椭圆的上顶点，$\Delta AF_1F_2$是面积为 4 的直角三角形.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设圆$O:x^2+y^2=\frac{8}{3}$上任意一点 P 处的切线 l 交椭圆 C 于点 M,N，问：$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$是否为定制？若是，求出此定制；若不是，说明理由.

38.（日照一模 21）在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，动点 G 到$F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$两点的距离之和为 4.

(1)试判断动点 G 的轨迹是什么曲线，并求其轨迹方程 C：

(2)已知直线 L：$y=k(x-\sqrt{3})$与圆 F：$(x-\sqrt{3})^2+y^2=\dfrac{1}{4}$交于 M、N 两点，与曲线 C 交于 P、Q 两点，其中 M、P 在第一象限。d为原点 O 到直线l的距离，是否存在实数 k，使得$T=(|NQ|-|MP|)\cdot d^2$取得最大值，若存在，求出 k；不存在，说明理由.

39.（济宁一模 21）已知椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆 C_1 的上顶点与抛物线 C_1：$x^2=2py$（$p>0$）的焦点 F 重合，且抛物线 C_2 经过点 P（2，1），O 为坐标原点.

（1）求椭圆 C_1 和抛物线 C_2 的标准方程；

（2）已知直线 l：$y=kx+m$ 与抛物线 C_2 交于 A，B 两点，与椭圆 C_1 交于 C，D 两点，若直线 PF 平分$\angle APB$，四边形 $OCPD$ 能否为平行四边形？若能，求实数 m 的值；若不能，请说明理由.

40.（菏泽一模 21）已知椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 $A(\sqrt{3}，\frac{1}{2})$在椭圆上；直线 AF_1 交 y 轴于点 B，且 $\overrightarrow{AF_2}=-2\overrightarrow{OB}$，其中 O 为坐标原点.

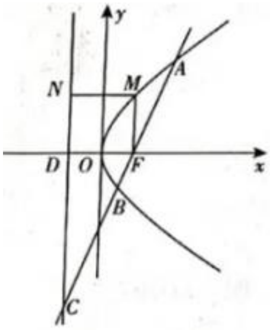
（1）求椭圆 C_1 的方程；

（2）直线 l 斜率存在，与椭圆 C_1 交于 D，E 两点，且与椭圆 C_2：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda\ (0<\lambda<1)$有公共点，求$\triangle DOE$ 面积的最大值.

41.（2021•临沂一模 21）如图，抛物线 E:$y^2=2px$的焦点为 F,四边形 DFMN 为正方形，点 M 在抛物线 E 上，过焦点 F 的直线 l 交抛物线 E 于 A、B 两点，交直线 ND 于点 C。

(1)若 B 为线段 AC 的中点，求直线 l 的斜率;

(2)若正方形 DFMN 的边长为 1,直线 MA,MB,MC 的斜率分别为k_1,k_2,k_3,是否存在λ 使得$k_1+k_1=\lambda k_3$；若存在，求出λ，若不存在，请说明理由。



42.（潍坊一模 22）在平面直角坐标系中，A_1，A_2 两点的坐标分别为(－2，0)，(2，0)，直线 A_1M，A_2M 相交于点 M 且它们的斜率之积是$-\dfrac{3}{4}$，记动点 M 的轨迹为曲线 E.

（1）求曲线 E 的方程;

（2）过点 F(1，0)作直线 l 交曲线 E 于 P，Q 两点，且点 P 位于 x 轴上方，记直线 A_1Q，A_2P 的斜率分别为k_1，k_2．①证明：$\dfrac{k_1}{k_2}$为定值；②设点 Q 关于 x 轴的对称点为 Q_1，求△PFQ_1 面积的最大值.

专题十　平面解析几何

一、单项选择

1.【答案】A

【分析】根据题意，由圆的方程分析圆心和半径，设圆的圆心为 C，由直线的方程分析可得直线恒过定点（0，1），设 M（0，1），由直线与圆的位置关系可得当 MC 与直线垂直时，圆截直线所得的弦长最短，据此计算可得答案.

【解答】根据题意，圆 $x^2+y^2+2x-8==0$，即 $(x+1)^2+y^2=9$，以圆心为（﹣1，0），半径 $r=3$，

设圆的圆心为 C，

直线 $y=kx+1$，恒过定点（0，1），设 M（0，1），

当 MC 与直线 $y=kx+1$ 垂直时，圆 $x^2+y^2+2x-8=0$ 截直线 $y=kx+1$ 所得的弦长最短，

此时 $|MC|=\sqrt{2}$，

则截得的最短弦长为 $2\sqrt{r^2-|MC|^2}=2\sqrt{7}$，

故选：A.

2.【答案】C

【解析】双曲线焦点在 y 轴上，则双曲线的一条渐近线为$y=\frac{a}{b}x$，由倾斜角为$\frac{\pi}{3}$，得$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$，$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，离心率

$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故选 C.

3.【答案】A

【解析】依题意可知，直线与圆相交或相切.

圆 $x^2+y^2+2x-2y+a=0$ 即为 $(x+1)^2+(y-1)^2=2-a$.

由$\frac{|-1+1+2|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{2-a}$，解得 $a\leqslant 0$.

∴实数 a 的取值范围为（﹣∞，0].

故选：A.

4.【答案】C

【解析】由焦半径公式得，$|AF|=x_1+\frac{p}{2}=x_1+2,|BF|=x_2+\frac{p}{2}=x_2+2$,所以$|AF|+|BF|=x_1+x_2+4$，

因为 AB 中点横坐标为 4，所以 $x_1+x_2=8$，因此$|AF|+|BF|=12$，故选 C。

5.【答案】A

【分析】根据题中条件可知 b 与 a 的比值，再根据双曲线的性质，即可得到结果.

【解答】由题意可知$\frac{2a}{2c}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$\therefore\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,

即$\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{\sqrt{5}+3}{2}$,

$\therefore\frac{b^2}{a^2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,

$\therefore\frac{a^2}{b^2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

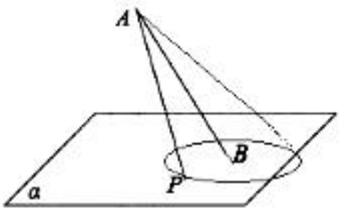
故选：A.

6.【答案】A

【解析】由渐近线$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，所以$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，即$\frac{m}{m+1}=\frac{1}{3}$，$m=\frac{1}{2}$，故选 A。

7.【答案】B

8.【答案】B

【解析】

用垂直于圆锥轴的平面去截圆锥，得到的是圆；

把平面渐渐倾斜，得到椭圆；

当平面和圆锥的一条母线平行时，得到抛物线.

参考上图：此题中平面 α 上的动点 P 满足$\angle PAB=\frac{\pi}{6}$,

可理解为 P 在以 AB 为轴的圆锥的侧面上，

再由斜线段 AB 与平面 α 所成的角为$\frac{\pi}{4}$,

可知 P 的轨迹符合圆锥曲线中椭圆定义，

故可知动点 P 的轨迹是椭圆.

故选：B.

9.【答案】A

10.【答案】D

【解析】延长 F_1N 与 MF_2,交于 K,连接 ON,

由题意可得 MN 为边 KF_1 的垂直平分线，则$|MF_1|=|MK|$，

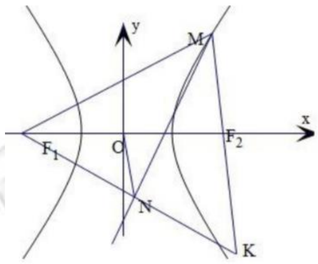
且 N 为 KF_1 的中点，$|ON|=\frac{1}{2}|KF_2|$，

由双曲线的定义可得$|MF_1|-|MF_2|=|MK|-|MF_2|=|F_2K|=2a$，

则$|ON|=a=\frac{1}{4}\times 2c$，即 $c=2a, b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}a$

可得双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，即 $y=\pm\sqrt{3}x$.

故选：D



11.【答案】C

【分析】设$|AF_1|=n$，由同角的基本关系式求得 $\sin\angle ABF_1=\frac{3}{5}$，可得$|BF_1|=\frac{5}{3}n$，$|AB|=\frac{4}{3}n$，再由双曲线的定义，求得 $n=3a$，结合勾股定理和双曲线的离心率公式，计算可得所求值.

【解答】设$|AF_1|=n$，

由 $\tan\angle ABC=\frac{\sin\angle ABC}{\cos\angle ABC}=-\frac{3}{4}$，$\sin^2\angle ABC+\cos^2\angle ABC=1$，

可得 $\sin\angle ABC=\frac{3}{5}$，即 $\sin\angle ABF_1=\frac{3}{5}$，

在直角三角形 ABF_1 中，可得$|BF_1|=\frac{5}{3}n$，$|AB|=\frac{4}{3}n$，

由双曲线的定义可得$|BF_2|=\frac{5}{3}n-2a$，

则$|AF_2|=\frac{4}{3}n-(\frac{5}{3}n-2a)=2a-\frac{1}{3}n$，

由双曲线的定义可得$|AF_1|-|AF_2|=2a$，

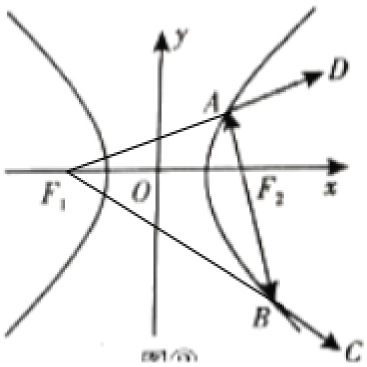
即 $n-(2a-\frac{1}{3}n)=2a$，解得 $n=3a$，

在直角三角形 AF_1F_2 中，$|AF_1|=3a$，$|AF_2|=a$，$|F_1F_2|=2c$，

则$(3a)^2+a^2=(2c)^2$，

即 $c^2=\frac{5}{2}a^2$，可得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，

故选：C.



二、多项选择

12.【答案】AD

【解析】首先可判断出 $a=4$，$b=3$，所以实轴长为 8，A 正确；根据 $a=4$，$b=3$，得 $c=5$，故 $e=\frac{5}{4}$，B 错误；由于不知道点 P 在双曲线的左支还是右支，故 $|PF_1|-|PF_2|=8$ 或 -8，故 C 错误；根据 $c=5$，得焦距为 10，故 D 正确．综上选 AD．

13.【答案】ACD

【解析】圆 C 的标准方程为$(x-\frac{k}{2})^2+(y+1)^2=k$，则 k>0，A 正确；当 k=4 是，圆 C 的标准方程为$(x-2)^2+(y+1)^2=4$，圆心为(2,-1)，半径 r=2，M 在圆外，因此过 M(3,4)与圆相交所得弦长为$2\sqrt{3}$的直线有两条，B 错误；(2,-1)到(0,0)的距离为$\sqrt{5}$，1<$\sqrt{5}$<2+1，两圆相交，C 正确；由直线 mx-ny-1=0 过圆心得，2m+n=1，所以$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=(2m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)=4+\frac{n}{m}+\frac{4m}{n}\geq 4+2\sqrt{4}=8$，当且仅当 n=2m=$\frac{1}{2}$时，等号成立，D 正确；故选 ACD。

14.【答案】BD

【解析】由椭圆方程可得：$a=5$，$c=\sqrt{5}$，

则 $F_1(-\sqrt{5},0)$，$F_2(\sqrt{5},0)$，$A_1(-5,0)$，$A_2(5,0)$，

由椭圆的定义可知$|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，故 A 错误；

设点 P 的坐标为（m，n），则$\frac{m^2}{25}+\frac{n^2}{20}=1$，即 $n^2=20(1-\frac{m^2}{25})=\frac{4}{5}(25-m^2)$，

则 $k_{PA_1}=\frac{n}{m+5}$，$k_{PA_2}=\frac{n}{m-5}$，

所以 $k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\frac{n^2}{m^2-25}=\frac{\frac{4}{5}(25-m^2)}{m^2-25}=-\frac{4}{5}$，故 B 正确；

$\overrightarrow{PF_1}=(-\sqrt{5}-m,-n)$，$\overrightarrow{PF_2}=(\sqrt{5}-m,-n)$，

若$\angle F_1PF_2=90°$，则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=m^2-5+n^2=0$，

又 $n^2=\frac{4}{5}(25-m^2)$，联立可得：$\frac{1}{5}m^2+15=0$，方程无解，故 C 错误；

三角形 PF_1F_2 的面积为 $S=\frac{1}{2}|F_1F_2||y_P|=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times|y_P|=4\sqrt{5}$，

解得 $y_P=\pm 4$，代入椭圆方程可得 $x_P=\pm\sqrt{5}$，故 D 正确，

故选：BD．

15.【答案】BD

【解析】因为其中一条渐近线为 4x-3y=0，$\therefore \frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，$\therefore \frac{b^2}{a^2}=\frac{m+7}{m}=\frac{16}{9}$，$\therefore$m=9，故 a=3，b=4，c=5，

焦点为（±5,0）A 错误；$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$, B 正确；过焦点(5,0)的直线与双曲线 C 有两个交点时，

①若交点位于双曲线的两支，弦长最短为实轴长 2a=6，∵15＞6，能做 2 条；

②若交点位于同支，弦长最短为通径$\frac{2b^2}{a}=\frac{32}{5}<15$，又能作 2 条，所以共可以有 4 条，C 错误

设 $A(x_1,y_1)$,$B(-x_1,-y_1)$,$C(x_0,x_0)$,$k_{MA}\times k_{MB}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\times\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}$，又$\frac{x_1^2}{9}-\frac{y_1^2}{16}=1$，$\therefore y_1^2=\frac{16}{9}x_1^2-16$

同理，$y_0^2=\frac{16}{9}x_0^2-16$，$\therefore k_{MA}\times k_{MB}=\frac{\frac{16}{9}x_0^2-16+\frac{16}{9}x_1^2+16}{x_0^2-x_1^2}=\frac{16}{9}$，D 正确。

16.【答案】BCD

【解析】因为 a，b，c 成等比数列，所以 $b^2=ac$，

A 中，$PF_2\perp x$ 轴时，P 的坐标为：（c，$\frac{b^2}{a}$）即 P（c，c），

所以 $\tan\angle PF_1F_2=\frac{|PF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{c}{2c}=\frac{1}{2}$，所以$\angle PF_1F_2\neq 30°$，所以 A 不正确；

B 中，因为 $b^2=ac$，所以可得 $c^2-a^2=ac$，可得 $e^2-e-1=0$，又 $e>1$，

解得：$e=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，所以 B 正确；

C，设 P（x_0，y_0），则$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，所以 $y_0^2=b^2\cdot\frac{x_0^2-a^2}{a^2}$，

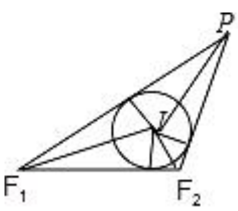
由题意可得 A（$-a$，0），B（a，0），所以 $k_1k_2=\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\frac{b^2}{a^2}$，

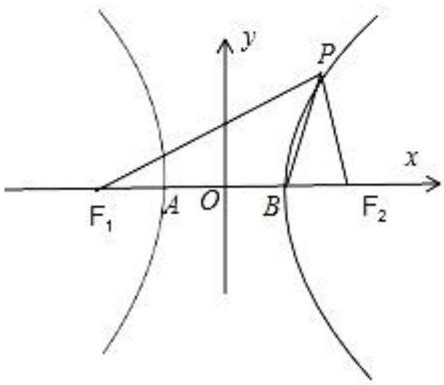
由 $b^2=ac$，可得 $k_1k_2=\frac{c}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，所以 C 正确；

D 中因为 $S_{\triangle IPF_1}=S_{\triangle IPF_2}+xS_{\triangle IF_1F_2}$，所以$\frac{1}{2}|PF_1|\cdot r=\frac{1}{2}|PF_2|\cdot r+x\cdot\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot r$，

可得 $x=\frac{|PF_1|-|PF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{2a}{2c}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 D 正确；

故选：BCD.





17.【答案】AD

【解析】易知点Q(a,b)在蒙日圆上，所以方程为$x^2+y^2=a^2+b^2$，又由$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$a^2=2b^2$，A正确；$l$过顶点P(b,a)，而Q又满足蒙日圆方程，所以P在圆$x^2+y^2=3b^2$上，当A、B恰为切点时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-1<0$，B错误；由A在椭圆上，故$|AF_1|+|AF_2|=2a$，所以$d-AF_2=d-(2a-AF_1)=d+AF_1-2a$，当$F_1A\perp l$时，$d+AF_1$有最小值，即$F_1$到$l$距离$d'=\frac{|-bc-a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，即$d'=\frac{4}{3}\sqrt{3}b$，所以$(d-AF_2)_{min}=\frac{4\sqrt{3}}{3}b-2a$，C错误；当矩形四边都与椭圆C相切时，它为蒙日圆得内接矩形，对角线为蒙日圆得直径，设边长为x, y，则$x^2+y^2=(2r)^2=4r^2=12b^2$，$S_{矩形}=xy\le\frac{x^2+y^2}{2}=6b^2$，D正确；故选AD。

三、填空

18.【答案】$[-1,3]$

【解析】设$\sqrt{3}x+y=t$，则$y=-\sqrt{3}x+t$，t表示斜率为$-\sqrt{3}$的直线在y轴上的截距

又x,y满足$x^2+(y-1)^2=1$，所以直线与圆有公共点，圆心$(0,1)$到直线的距离

$$d=\frac{|1-t|}{\sqrt{1+3}}\le r=1，解得-1\le t\le 3$$

19.【答案】(5,0)

【解析】设直线AB的方程为$x=my+b$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}x=my+b\\ y^2=4x\end{cases}$，整理可得：$y^2-4my-4b=0$，

所以$y_1y_2=-4b$，$x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=b^2$，

因为$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=5\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=6$，

所以$b^2-4b=5$，可得$b=5$或$b=0$，

因为点 A、B 在抛物线上，且分别位于 x 轴的上、下两侧，直线 AB 不过原点，所以 $b=5$，

所以直线恒过点（5，0），

故答案为：（5，0）．

20．【答案】$2\sqrt{2}$

【分析】由抛物线的方程可得准线方程，由抛物线的性质到焦点的距离等于到准线的距离，可得 x_0 与 p 的关系，再将 A 的坐标代入抛物线的方程可得 x_0 与 p 的关系，进而求 p 定值．

【解答】抛物线的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，

由抛物线的性质可得 $x_0+\frac{p}{2}=3x_0$

所以 $x_0=\frac{p}{4}$①，

而 A 在抛物线上，即 $4=2p\cdot x_0$②，

由①②可得：$p=2\sqrt{2}$，

故答案为：$2\sqrt{2}$．

21.【答案】$3\sqrt{3}+1$

【解析】若∠CBA≥60°，则$\cos\angle CBA\le\frac{1}{2}$，∵CB=$3\sqrt{10}$，$\therefore\frac{3\sqrt{10}}{AB}\le\frac{1}{2}$，$\therefore AB\ge6\sqrt{10}$，

设 A（x，3x），则$(x-10)^2+(3x-0)^2\ge360$，整理得：$x^2-2x-26\ge0$（x＞0）

解得：$x\ge3\sqrt{3}+1$

22.【答案】2

23.【答案】5

【解析】根据题意首先判断出点 P、点 Q 的纵坐标都为 4，从而代入抛物线求得 P(4，4)，故 PF＝4＋1＝5.

24.【答案】$\frac{5}{3}$

【解析】由题意可知 A（－a，0），经过第一象限的渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$，

过点 F 且与渐近线垂直的直线相交于点 B，

$\therefore\begin{cases}y=\frac{b}{a}\\y=-\frac{a}{b}(x-c)\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\frac{a^2}{c}\\y=\frac{ab}{c}\end{cases}$，

$\therefore B$（$\frac{a^2}{c}$，$\frac{ab}{c}$），

$\therefore \frac{1}{2}=\frac{\frac{ab}{c}-0}{\frac{a^2}{c}+a}$，即 $a+c=2b$，

$\because c^2=a^2+b^2$，

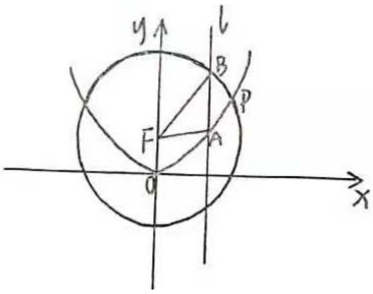
$\therefore c^2=a^2+\frac{(a+c)^2}{4}$，即 $3e^2-2e-5=0$，

$\therefore e=\frac{5}{3}$，

故答案为：$\frac{5}{3}$.

25.【答案】2，(4,6)

【解析】由$\begin{cases} x^2=4y \\ x^2+(y-1)^2=4 \end{cases}$，得 m=2 或 m=-2



因为 P 点在第一象限，所以 m=2

如图，抛物线得焦点为(0,1)与圆 F 的圆心重合，因此|FB|=r=2，

$|AF|=y_A+1$，$|AB|=y_B-y_A$

△ABF 周长为$|AF|+|BF|+|AB|=2+y_A+1+y_B-y_A=y_B+3$

又因为 0<t<2，$y_B=\sqrt{4-x^2}+1$

所以 $1<y_B<3$，$4<y_B+3<6$

所以△ABF 周长的取值范围为(4,6).

26.【答案】4

【解析】由抛物线的方程可得焦点 F 的坐标为（1，0），

设直线 AB 的方程为 $x=ky+1$，

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

联立$\begin{cases} x=ky+1 \\ y^2=4x \end{cases}$，得 $y^2-4ky-4=0$，

$\triangle=16k^2+16>0$ 恒成立，

所以 $y_1+y_2=4k$，$y_1y_2=-4$，

因为点 T 为 CD 的中点，

所以 $CT=DT=\frac{1}{2}CD$，

由抛物线的性质可得 $AC=AF$，$BD=BF$，

所以 $S_{\triangle ATB}=S_{\text{梯形}ACDB}-S_{\triangle ACT}-S_{\triangle BDT}=\frac{1}{2}(AC+BD)\cdot CD-\frac{1}{2}AC\cdot CT-\frac{1}{2}BD\cdot DT$，

即 $S_{\triangle ATB}=\frac{1}{4}CD\cdot(AC+BD)=\frac{1}{4}CD\cdot AB=\frac{1}{4}|y_1-y_2|\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot|y_1-y_2|$，

因为 $(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=16(1+k^2)$，

所以 $S_{\triangle ATB}=4\sqrt{1+k^2}$（$1+k^2$），

令 $t=\sqrt{1+k^2}$（$t\geqslant1$），

令 $S_{\triangle ATB}=f$（t）$=4t^3$（$t\geqslant1$），

因为 f（t）在[1，+∞）上单调递增，

所以 f（t）$_{min}=f$（1=4，

故△ATB 的面积最小值为 4.

故答案为：4.

27.【答案】（1，$\sqrt{2}$]

【解析】如图，

∵$k\geqslant\sqrt{2}$，且 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BF}$，∴$|AB|\geqslant\sqrt{2}|BF|$，

要使 $|AB|\geqslant\sqrt{2}|BF|$，则 B 应在离 A 点较远的一端，

过 B 作准线的垂线，垂足为 C，

∵$|AB|\geqslant\sqrt{2}|BF|$，$|BF|=|BC|$，∴$|AB|\geqslant\sqrt{2}|BC|$，

在△ABC 中，$\sin A=\frac{|BC|}{|AB|}$，∴$\sin A\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$0<\angle A\leqslant45°$，$45°\leqslant\angle B<90°$，

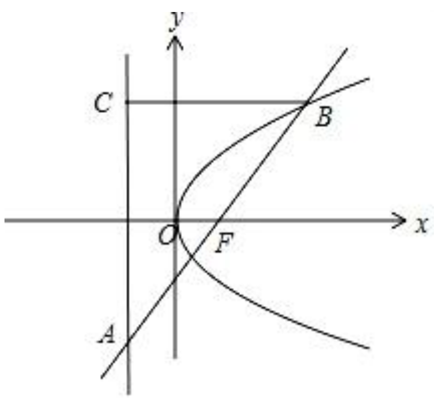
∵直线 l 的斜率 $k=\tan B$，∴$k\geqslant1$；

∵l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的一条渐近线垂直，

∴ $-\frac{b}{a}\cdot k=-1$，则 $0<\frac{b}{a}\leqslant1$，即 $0<\frac{c^2-a^2}{a^2}\leqslant1$，

解得 $1<e\leqslant\sqrt{2}$.

故答案为：（1，$\sqrt{2}$].



28.【答案】$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；$2x-3y+6=0$.

【分析】利用椭圆的定义即可求出 a 的值，再利用勾股定理即可求出 c，由此即可求解；设出点 A，B 的坐标，代入椭圆方程，利用点差法以及中点坐标公式求出直线 l 的斜率，由此即可求解.

【解答】因为点 P 在椭圆上，所以$|PF_1|+|PF_2|=\frac{4}{3}+\frac{14}{3}=6=2a$，

所以 $a=3$，又在直角三角形 PF_1F_2 中，$|F_1F_2|=\sqrt{|PF_2|^2-|PF_1|^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$，

所以 $c=\sqrt{5}$，则 $b=2$，

故椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

则$\begin{cases}\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}=1\\ \frac{x_2^2}{9}+\frac{y_2^2}{4}=1\end{cases}$，两式作差可得：$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{9}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{4}=0$，

又由已知可得点 M 为 AB 的中点，即 $x_1+x_2=-3$，$y_1+y_2=2$，

所以$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2}{3}$，即 $k_{AB}=\frac{2}{3}$，

所以直线 l 的方程为 $y-1=\frac{2}{3}(x+\frac{3}{2})$，即 $2x-3y+6=0$，

故答案为：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；$2x-3y+6=0$.

29.【答案】$\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

【解析】 AF_1，AF_2，F_1F_2 上的切点分别为 H、I、J，

则 $AH=AI$，$F_1H=F_1J$，$F_2J=F_2I$．由 $AF_1-AF_2=2a$ 得

$(AH+HF_1)-(AI+IF_2)=2a$，$HF_1-IF_2=2a$.即$JF_1-JF_2=2a$.

设内心 M 的横坐标为 x_0，则点 J 的横坐标也为 x_0，则$(c+x_0)-(c-x_0)=2a$

得$x_0=a$，所以 $JM\perp x$ 轴，则 E 为直线 JM 与x轴的交点. 同理可 BF_1F 的内心在直线 JM 上.

设直线 AB 的倾斜角为 θ，$ME-NE=(c-a)\tan\frac{\pi-\alpha}{2}-(c-a)\tan\frac{\alpha}{2}=(c-a)\ \frac{2}{\tan\alpha}$

由题知，$a=2,c=4,\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，$\therefore\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$ $\therefore-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\dfrac{1}{\tan\theta}<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

四、解答

30. 【解析】

（1）设直线 AB 的方程为 $x=my+1$，代入 $y^2=2x$，

得 $y^2-2my-2=0$，

所以 $y_A\cdot y_B=-2$；

（2）由（1）同理可得 $y_M\cdot y_N=-2$，

设直线 AN 的方程 $x=ny+2$，代入 $y^2=2x$，得 $y^2-2ny-4=0$，

所以 $y_A\cdot y_N=-4$，

又 $k_1=\dfrac{y_N-y_A}{x_N-x_A}=\dfrac{y_N-y_A}{\dfrac{y_N{}^2}{2}-\dfrac{y_A{}^2}{2}}=\dfrac{2}{y_N+y_A}$， 同理 $k_2=\dfrac{2}{y_M+y_B}$；

所以 $\lambda=\dfrac{k_2}{k_1}=\dfrac{y_A+y_N}{y_B+y_M}=\dfrac{y_A+y_N}{\dfrac{-2}{y_A}+\dfrac{-2}{y_N}}=\dfrac{y_Ay_N}{-2}=2$，

所以 存在实数 $\lambda=2$，使得 $k_2=2k_1$.

31.【解析】（1）设 P（x，y），则 $\overrightarrow{PA}=$（$-x$，$-1-y$），$\overrightarrow{PB}=$（$-x$，$1-y$）

$\overrightarrow{AB}=$（0，2），$\overrightarrow{BA}=$（0，-2），

所以 $|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{AB}|=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BA}$，所以 $\sqrt{(-x)^2+(1-y)^2}=1+y$

化简得 $x^2=4y$，所以 C 的方程为 $x^2=4y$.

（2）由题意可设 D（t，-2），E（x_1，y_1），F（x_2，y_2），

由题意知切线 DE，DF 的斜率都存在，

由 $x^2=4y$，得 $y=\dfrac{x^2}{4}$，则 $y'=\dfrac{x}{2}$，所以 $k_{DE}=\dfrac{x_1}{2}$，

直线 DE 的方程为 $y-y_1=\dfrac{x_1}{2}(x-x_1)$，即 $y-y_1=\dfrac{x_1}{2}x-\dfrac{x_1{}^2}{2}$，①

因为 E（x_1，y_1）在 $x^2=4y$ 上，所以 $x_1{}^2=4y_1$，即 $\dfrac{x_1{}^2}{2}=2y_1$，②

将②代入①得 $x_1x-2y_1-2y=0$，

所以直线 DE 的方程为 $x_1x-2y_1-2y=0$，

同理可得直线 DF 的方程为 $x_2x-2y_2-2y=0$，

因为 D（t，-2）在直线 DE 上，所以 $tx_1-2y_1+4=0$，

又 D（t，-2）在直线 DF 上，所以 $tx_2-2y_2+4=0$，

所以直线 EF 的方程为 $tx-2y+4=0$，

故直线 EF 过定点（0，2）.

32.

21．（12 分）解：（1）由已知：$A_1(0,-a),A_2(0,a)$，因为 $M(1,2)$ 在椭圆上，

直线 MA_1,MA_2 的斜率之积等于 -4，

所以 $k_{MA_1}\cdot k_{MA_2}=\dfrac{2+a}{1-0}\times\dfrac{2-a}{1-0}=-4$，解得：$a^2=8$，……………………1 分

又 $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$，所以 $b^2=2$，……………………………………………2 分

所以椭圆的标准方程为 $\dfrac{y^2}{8}+\dfrac{x^2}{2}=1$，……………………………………………3 分

（2）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 为过点 F 的直线与椭圆 E 的交点，

①若该直线的斜率存在，不妨设为 k，则该直线的方程是 $y=kx+m$，

联立方程得：

$\begin{cases}4x^2+y^2=8\\ y=kx+m\end{cases}$，……………………………………………4 分

消元并化简得：$(4+k^2)x^2+2kmx+m^2-8=0$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{2km}{4+k^2},x_1x_2=\dfrac{m^2-8}{4+k^2}$，………………………………5 分

设 $H(x_3,-m)$，$G(x_4,-m)$，

因为 M,A,H 三点共线，即 $\overrightarrow{MA}//\overrightarrow{MH}$，

所以 $(x_3-1)(y_1-2)=(-m-2)(x_1-1)$，

由已知得，点 M 不在直线 $y=kx+m$ 上，且 $y_1=kx_1+m$，

所以 $x_3=-\dfrac{(m+2)(x_1-1)}{kx_1+m-2}+1$，　……………………………6 分

同理可得 $x_4=-\dfrac{(m+2)(x_2-1)}{kx_2+m-2}+1$，　……………………………7 分

所以 $x_3+x_4=-\dfrac{(m+2)(x_1-1)}{kx_1+m-2}-\dfrac{(m+2)(x_2-1)}{kx_2+m-2}+2$，

$$=-\frac{(m+2)\left[2kx_1x_2+(m-2-k)(x_1+x_2)+4-2m\right]}{k^2x_1x_2+k(m-2)(x_1+x_2)+(m-2)^2}+2,$$

将 $x_1+x_2=-\dfrac{2km}{4+k^2},x_1x_2=\dfrac{m^2-8}{4+k^2}$ 代入上式并化简得：

$x_3+x_4=\dfrac{(m+2)(k-2)}{k-m+2}+2$，

所以 N 的坐标为 $\left(\dfrac{(m+2)(k-2)}{2(k-m+2)}+1,-m\right)$，　……………………………9 分

当 $k-2\neq0$ 时，直线 MN 的斜率 $k_{MN}=-\dfrac{2(k-m+2)}{k-2}=\dfrac{2(m-4)}{k-2}-2$

因为 k_{MN} 与 k 的取值无关，所以 $m-4=0$，即 $m=4$，

此时 $k_{MN}=-2$.　……………………………………………10 分

②若经过点 F 的直线斜率不存在，此时 A,B 为椭圆 E 长轴端点，

不妨设 $A(0,2\sqrt{2}),B(0,-2\sqrt{2})$，因为 M,A,H 三点共线，

H 坐标为 $\left(\dfrac{m+2}{2\sqrt{2}-2}+1,-m\right)$，同理 G 坐标为 $\left(-\dfrac{m+2}{2\sqrt{2}+2}+1,-m\right)$，

此时线段 GH 的中点为 $N\left(\dfrac{m+4}{2},-m\right)$，　……………………………………11 分

所以 $k_{MN}=\dfrac{-m-2}{\dfrac{m+4}{2}-1}=-2$，亦满足要求，

综合①②可知：存在 $m=4$ 使得直线 MN 的斜率为定值 -2.　……………12 分

33.【解析】（1）由题意可知$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\\2b=2\sqrt{2}\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=\sqrt{6}\\b=\sqrt{2}\\c=2\end{cases}$，

∴椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

（2）设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），直线 AB 的方程为：$x=my+t$，

联立方程$\begin{cases}\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1\\x=my+t\end{cases}$，消去 x 得：$(m^2+3)y^2+2mty+(t^2-6)=0$，

∴$y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2+3}$，$y_1y_2=\dfrac{t^2-6}{m^2+3}$，

∵线段 AB 为直径的圆经过坐标原点 O，

∴$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，

∴$x_1x_2+y_1y_2=0$，

∴$(my_1+t)(my_2+t)+y_1y_2=0$，

整理得：$(m^2+1)y_1y_2+mt(y_1+y_2)+t^2=0$，

把 $y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2+3}$，$y_1y_2=\dfrac{t^2-6}{m^2+3}$代入上式得：$(m^2+1)\cdot\dfrac{t^2-6}{m^2+3}+mt\cdot\dfrac{-2mt}{m^2+3}+t^2=0$，

整理得：$t^2=\dfrac{3(m^2+1)}{2}$，

∵原点（0，0）到直线 AB：$x=my+t$ 的距离 $d=\dfrac{|t|}{\sqrt{1+m^2}}$，

∴$d^2=\dfrac{t^2}{1+m^2}=\dfrac{3}{2}$，

∴存在以 O 为圆心的定圆 $x^2+y^2=\dfrac{3}{2}$恒与直线 AB 相切.

34.【解析】（1）由题意可知，$b=2$，$a-c=\sqrt{5}-1$，

又 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{5}$，$c=1$，

所以椭圆的标准方程为：$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$；

（2）设四边形 $ACBD$ 的面积为 S，则 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|$，

①当 $AB\perp x$ 轴时，$|AB|=\frac{2b^2}{a}$，$|CD|=2a$，所以 $S=\frac{1}{2}\times\frac{2b^2}{a}\times 2a=2b^2=8$，

②当 $CD\perp x$ 轴时，$|CD|=\frac{2b^2}{a}$，$|AB|=2a$，所以 $S=\frac{1}{2}\times 2a\times\frac{2b^2}{a}=2b^2=8$，

③当 AB 与 CD 都不与 x 轴垂直时，直线 AB 的斜率存在且不为 0，

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），设直线 AB 的斜率为 k，则直线 CD 的斜率为 $-\frac{1}{k}$，

则设直线 AB 的方程为：$y=k$（$x-1$），联立方程 $\begin{cases}y=k(x-1)\\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，

消去 y 整理可得：（$4+5k^2$）$x^2-10k^2x+5k^2-20=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{10k^2}{4+5k^2}$，$x_1x_2=\frac{5k^2-20}{4+5k^2}$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{320(1+k^2)}}{4+5k^2}=\frac{8\sqrt{5}(1+k^2)}{4+5k^2}$（*），

过 F_2 做直线 CD 的平行线和椭圆 E 交于点 C_1，D_1，由对称性知 $|C_1D_1|=|CD|$，

在（*）中的 k 换成 $-\frac{1}{k}$，得 $|C_1D_1|=\frac{8\sqrt{5}(1+\frac{1}{k^2})}{4+\frac{5}{k^2}}=\frac{8\sqrt{5}(1+k^2)}{5+4k^2}$，

所以 $|CD|=\frac{8\sqrt{5}(1+k^2)}{5+4k^2}$，

所以 $S=\frac{1}{2}|B||CD|=\frac{1}{2}\cdot\frac{8\sqrt{5}(1+k^2)}{5+4k^2}\cdot\frac{8\sqrt{5}(1+k^2)}{5k^2+4}=\frac{160(1+k^2)^2}{(4+5k^2)(5+4k^2)}$，

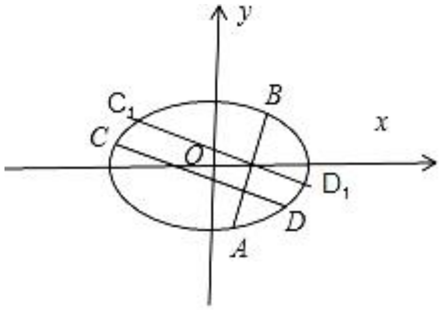
令 $t=1+k^2$，则 $t>1$，

所以 $S=\frac{160t^2}{(5t-1)(4t+1)}=\frac{160t^2}{20t^2+t-1}=\frac{160}{-(\frac{1}{t})^2+\frac{1}{t}+20}$，

令 $u=\frac{1}{t}$，则 $u\in$（0，1），所以 $S=\frac{160}{-u^2+u+20}=\frac{160}{-(u-\frac{1}{2})^2+\frac{81}{4}}$，

因为 -（$u-\frac{1}{2}$）$^2+\frac{81}{4}$∈（20，$\frac{81}{4}$]，所以 S∈[$\frac{640}{81}$，8）

所以四边形 $ACBD$ 面积的取值范围[$\frac{640}{81}$，8）．



35.【解析】(1)由已知得$\begin{cases}\frac{9}{b^2}=1,\\ \frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $a=3\sqrt{2},b=3$，

因此椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$．……………………………………………………4 分

(2)由$\begin{cases}\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1,\\ y=kx-1,\end{cases}$得$\left(2k^2+1\right)x^2-4kx-16=0$，

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=\frac{4k}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{-16}{2k^2+1}$． ……………………………6 分

因为$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x_1x_2+\left(y_1-3\right)\left(y_2-3\right)=x_1x_2+\left(kx_1-4\right)\left(kx_2-4\right)$

$=\left(k^2+1\right)x_1x_2-4k\left(x_1+x_2\right)+16=\frac{-16\left(k^2+1\right)}{2k^2+1}-4k\times\frac{4k}{2k^2+1}+16=0$，

所以 MA⊥MB，三角形 MAB 为直角三角形，

设 d 为点 M 到直线 l 的距离，故$|MA||MB|=|AB|=d$． ………………………………8 分

又因为$d=\frac{4}{\sqrt{1+4^2}}$，

$|AB|=\sqrt{\left(1+k^2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right]}$

$=\sqrt{\left(1+k^2\right)\left[\left(\frac{4k}{2k^2+1}\right)^2-4\times\frac{-16}{2k^2+1}\right]}$

$=\dfrac{4\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(9k^2+4\right)}}{2k^2+1}$，所以$|MA||MB|=\dfrac{16\sqrt{9k^2+4}}{2k^2+1}$，……………………………10 分

设$2k^2+1=t$，则$|MA||MB|=16\sqrt{\dfrac{81}{8}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{9}{2}\right)^2}$，由于$\dfrac{1}{t}\in(0,1]$，

所以$|MA||MB|\le 32$，当$\dfrac{1}{t}=1$，即 k=0 时，等号成立.

因此，$|MA||MB|$的最大值为 32. ……………………………………………………………12 分

36.【解析】（1）直线 F_2A_2 的方程为 $\dfrac{x}{c}+\dfrac{y}{b}=1\Rightarrow bx+cy-bc=0$

P(a，b)到直线 F_2A_2 的距离为 $\dfrac{ab+bc-bc}{\sqrt{b^2+c^2}}=\dfrac{ab}{a}=b=1$，

而 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，$\therefore a=2$，椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(x_0,y_0)$

$$\begin{cases}y=kx+m\\x^2+4y^2=4\end{cases}\Rightarrow x^2+4(kx+m)^2=4,$$

$\therefore(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$

$\Delta=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2-4)=0$，$\therefore x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{-4km}{1+4k^2}$，

$\therefore D\left(\dfrac{-4km}{1+4k^2},\dfrac{m}{1+4k^2}\right)$

$\therefore \sin\angle EDW=\dfrac{m}{DW}=\dfrac{m}{\sqrt{\dfrac{16k^2m^2}{(1+4k^2)^2}+\left(\dfrac{m}{1+4k^2}-3m\right)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{16k^2}{(1+4k^2)^2}+\left(\dfrac{1}{1+4k^2}-3\right)^2}}$

令 $\dfrac{1}{1+4k^2}=t$，$\therefore \sin\angle EDW=\dfrac{1}{\sqrt{4t-4t^2+(t-3)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{-3t^2-2t+9}}\le\dfrac{1}{2}$

$\therefore\angle EDW\leqslant30^\circ$，$\therefore\angle EWF\geqslant120^\circ$.

37.

.解：（1）由ΔAF_1F_2为直角三角形，故$b=c$，

又$S_{\Delta F_1F_2A}=\dfrac{1}{2}\times2c\times b=4$，可得$bc=4$，……………………………………2 分

解得$b=c=2$，所以$a^2=8$，

所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$；……………………………………4 分

（2）当切线 l 的斜率不存在时，其方程为 $x=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

将 $x=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 代入 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，得 $y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$，不妨设 $M(\frac{2\sqrt{6}}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3})$，

$N(\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3})$，又 $P(\frac{2\sqrt{6}}{3},0)$，所以 $\overrightarrow{PM}\bullet\overrightarrow{PN}=-\frac{8}{3}$，

同理当 $x=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 时，也有 $\overrightarrow{PM}\bullet\overrightarrow{PN}=-\frac{8}{3}$. ……………………………5 分

当切线 l 的斜率存在时，设方程为 $y=kx+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，因为 l 与圆

$O:x^2+y^2=\frac{8}{3}$ 相切，所以 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，即 $3m^2=8k^2+8$， ……………7 分

将 $y=kx+m$ 代入 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-8=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{-4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-8}{2k^2+1}$， ……………………………8 分

$$\begin{aligned}\text{又 }\overrightarrow{PM}\bullet\overrightarrow{PN}&=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{ON})\bullet(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM})\\&=\left|\overrightarrow{PO}\right|^2-\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\bullet\overrightarrow{OM},\\&=\left|\overrightarrow{PO}\right|^2-\left|\overrightarrow{PO}\right|^2-\left|\overrightarrow{PO}\right|^2+\overrightarrow{ON}\bullet\overrightarrow{OM}\\&=\overrightarrow{ON}\bullet\overrightarrow{OM}-\left|\overrightarrow{PO}\right|^2\end{aligned}$$ ……………………………………9 分

$$\begin{aligned}\text{又 }\overrightarrow{OM}\bullet\overrightarrow{ON}&=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)\\&=(k^2+1)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2\\&=\frac{(k^2+1)(2m^2-8)}{2k^2+1}+\frac{-4k^2m^2}{2k^2+1}+m^2\\&=\frac{3m^2-8k^2-8}{2k^2+1},\end{aligned}$$ ……………………………………10 分

将 $3m^2=8k^2+8$ 代入上式，得 $\overrightarrow{OM}\bullet\overrightarrow{ON}=0$， ……………………………11 分

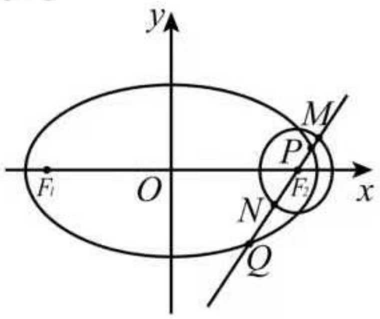
综上，$\overrightarrow{PM}\bullet\overrightarrow{PN}=-\frac{8}{3}$. ……………………………………12 分

38. 【解析】(1)由题意知，$|GF_1|+|GF_2|=4$,又 $4>2\sqrt{3}$,所以，动点 G 的轨迹是椭圆......2 分

由椭圆的定义可知，$c=\sqrt{3}$，$a=2$,又因为 $a^2-b^2=c^2$ 所以 $b^2=1$,故 G 的轨迹方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$….4 分

(2)由题设可知，M 在椭圆外，N 在椭圆内，P 在圆 F_2 内，Q 在圆 F_2 外，

在直线 l 上的四点满足：$|MP|=|MN|-|NP|,|NQ|=|PQ|-|NP|$.



由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=k(x-\sqrt{3})\end{cases}$ 消去 y 得：$(1+4k^2)x^2-8\sqrt{3}k^2x+12k^2-4=0$.

因为直线 l 过椭圆 C 内的右焦点 F_2,所以该方程的判别式△>0 恒成立.

设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,由韦达定理，得 $x_1+x_2=\frac{8\sqrt{3}k^2}{1+4k^2}$,$x_1\cdot x_2=\frac{12k^2-4}{1+4k^2}$

$|PQ|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2]}=\frac{4k^2+4}{4k^2+1}$ ……………………7 分

又因为圆 F_2 的直径|MN|=1,所以

$|NQ|-|MP|=|PQ|-|NP|-(|MN|-|NP|)=|PQ|-|MN|=|PQ|-1=\frac{3}{4k^2+1}$ ...9 分

原点 O 到 $y=k(x-\sqrt{3})$(即$kx-y-\sqrt{3}k=0$)的距离 $d=\frac{\sqrt{3}k}{\sqrt{k^2+1}}$

$$T=(|NQ|-|MP|)\cdot d^2=\frac{9k^2}{(4k^2+1)(k^2+1)}=\frac{9k^2}{4k^4+5k^2+1}=\frac{9}{4k^2+\frac{1}{k^2}+5}\le\frac{9}{2\sqrt{4k^2\times\frac{1}{k^2}}+5}=1$$

当且仅当 $4k^2=\frac{1}{k^2}$,即$k=\frac{\sqrt{2}}{2}$,时等号成立.所以存在 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 满足题意……12 分

39.

解：(1)由题意得，$4=2p$，$\therefore p=2$　故抛物线方程为 $x^2=4y$　……………………… 2 分

抛物线 C_2：$x^2=2py(p>0)$的焦点为 $F(0,1)$

所以 $b=1$.

因为椭圆 C_1 的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

所以$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$解得 $a=2$

所以椭圆 C_1 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$　……………………………………………… 4 分

(2)将 $y=kx+m$ 代入 $x^2=4y$,消去 y 并整理得:$x^2-4kx-4m=0$

由题意知,$\Delta=16k^2+16m>0$

设直线 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2

因为直线 PF 平分$\angle APB$,所以 $k_1+k_2=0$ ……………………………………… 6 分

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则$\dfrac{y_1-1}{x_1-2}+\dfrac{y_2-1}{x_2-2}=0$

$\because x_1^2=4y_1,x_2^2=4y_2$,则$\dfrac{\frac{x_1^2}{4}-1}{x_1-2}+\dfrac{\frac{x_2^2}{4}-1}{x_2-2}=\dfrac{x_1+x_2+4}{4}=0\therefore x_1+x_2=-4$

$\therefore k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{4}=-1$,所以 $m>-1$ ………………………………… 8 分

由$\begin{cases}y=-x+m\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ 消 y 并整理得:$5x^2-8mx+4m^2-4=0$

由题意知 $\Delta=64m^2-4\times5\times(4m^2-4)=16(5-m^2)>0$

$\therefore -\sqrt{5}<m<\sqrt{5}$,所以$-1<m<\sqrt{5}$ ……………………………………………………… 9 分

设 $C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$,则 $x_3+x_4=\dfrac{8m}{5},y_3+y_4=-(x_3+x_4)+2m=\dfrac{2m}{5}$

若四边形 $OCPD$ 为平行四边形

则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$,即$(2,1)=(x_3+x_4,y_3+y_4)$ ………………………………………… 11 分

$\therefore\begin{cases}\dfrac{8m}{5}=2\\ \dfrac{2m}{5}=1\end{cases}$ 显然方程组无解

$\therefore$四边形 $OCPD$ 不是平行四边形 ………………………………………………………… 12 分

40.【解析】(1)由$\overrightarrow{AF_2}=-2\overrightarrow{OB}$,可得 F_2($\sqrt{3}$,0),即 $c=\sqrt{3}$,

因为 A($\sqrt{3}$,$\dfrac{1}{2}$)在椭圆上,

所以$\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1$,

即$\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4(a^2-3)}=1$,解得 $a^2=4$ 或 $a^2=\dfrac{9}{4}$(舍去),

所以椭圆 C_1 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $y=kx+m$,

原点到直线 l 的距离为 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$,

联立$\begin{cases}x^2+4y^2=4\\y=kx+m\end{cases}$，得（$1+4k^2$）$x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

设 D（x_1，y_1），E（x_2，y_2），

则 $x_1+x_2=\dfrac{-8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}$，

所以$|DE|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(\dfrac{-8km}{1+4k^2})^2-4(\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2})}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\dfrac{(-8km)^2-16(m^2-1)(1+4k^2)}{(1+4k^2)^2}}$，

所以 $S_{\triangle DOE}=\dfrac{1}{2}d\bullet|DE|=\dfrac{1}{2}|m|\sqrt{\dfrac{(-8km)^2-16(m^2-1)(1+4k^2)}{(1+4k^2)^2}}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{m^2[\dfrac{(-8km)^2-16(m^2-1)(1+4k^2)}{(1+4k^2)^2}]}$

$=2\sqrt{\dfrac{m^2}{1+4k^2}-(\dfrac{m^2}{1+4k^2})^2}$，

由$\begin{cases}x^2+4y^2=4\lambda\\y=kx+m\end{cases}$，得（$1+4k^2$）$x^2+8kmx+4m^2-4\lambda=0$，

所以（$8km$）$^2-4$（$1+4k^2$）（$4m^2-4\lambda$）$\geqslant 0$，即 $\lambda\geqslant\dfrac{m^2}{1+4k^2}$，

故①当 $0<\lambda<\dfrac{1}{2}$时，则$\dfrac{m^2}{1+4k^2}\leqslant\lambda<\dfrac{1}{2}$，故$\dfrac{m^2}{1+4k^2}=\lambda<\dfrac{1}{2}$，

即直线与椭圆 C_2：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\lambda$ 相切时，面积最大为 $2\sqrt{\lambda-\lambda^2}$，

②当$\dfrac{1}{2}\leqslant\lambda<1$ 时，$\dfrac{m^2}{1+4k^2}=\dfrac{1}{2}$时，△$DOE$ 的面积最大为 1，

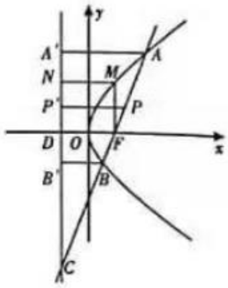
综上可得（$S_{\triangle DOE}$）$_{max}=\begin{cases}2\sqrt{\lambda-\lambda^2}, & 0<\lambda<\dfrac{1}{2}\\1, & \dfrac{1}{2}\leqslant\lambda<1\end{cases}$.

41.

21.(1)过 A,B 分别向 ND 作垂线,垂足为 A',B',设 AB 中点为 P,过 P 向 ND 作垂线,垂足为 P',则 $|PP'|=\frac{1}{2}(|AA'|+|BB'|)=\frac{1}{2}|AB|$ ······ 1 分

又∵ $|AB|=|BC|$

∴ $|PP'|=\frac{1}{3}|PC|$ ······ 2 分



在 $Rt\triangle PP'C$ 中,$\tan\angle P'PC=2\sqrt{2}$ ······ 3 分

∴ 直线 l 的斜率为 $2\sqrt{2}$ ······ 4 分

(2)∵ 正方形边长为 1,

∴ $p=1$,抛物线方程为 $y^2=2x$ ······ 5 分

∴ $M(\frac{1}{2},1)$, ······ 6 分

设 $AB:y=k(x-\frac{1}{2})$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

∵ ND 方程为 $x=-\frac{1}{2}$,得 $C(-\frac{1}{2},-k)$ ∴ $k_3=\frac{1+k}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1+k.$ ······ 7 分

由 $\begin{cases}y=k(x-\frac{1}{2})\\ y^2=2x\end{cases}$ 得 $4k^2x^2-(4k^2+8)x+k^2=0$ ······ 8 分

$\Delta=(4k^2+8)^2-4\times4k^2\times k^2=64k^2+64>0.$

$x_1+x_2=\frac{4k^2+8}{4k^2}=\frac{k^2+2}{k^2}$,$x_1x_2=\frac{k^2}{4k^2}=\frac{1}{4}$,$k_1=\frac{y_1-1}{x_1-\frac{1}{2}}$,$k_2=\frac{y_2-1}{x_2-\frac{1}{2}}$ ······ 9 分

$$k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1-\frac{1}{2}}+\frac{y_2-1}{x_2-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{(y_1-1)(x_2-\frac{1}{2})+(x_1-\frac{1}{2})(y_2-1)}{(x_1-\frac{1}{2})(x_2-\frac{1}{2})}$$

$$=\frac{[k(x_1-\frac{1}{2})-1]+[k(x_2-\frac{1}{2})-1](x_1-\frac{1}{2})}{x_1x_2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{2kx_1x_2-(k+1)(x_1+x_2)+\frac{k}{2}+1}{x_1x_2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{4}}$$ ······ 10 分

$$=\frac{\frac{k}{2}-\frac{(k^2+2)(k+1)}{k^2}+\frac{k}{2}+1}{\frac{1}{4}-\frac{k^2+2}{2k^2}+\frac{1}{4}}$$

$=2(1+k)=2k_3$ ······ 11 分

即存在常数 $\lambda=2$,使得 $k_1+k_2=2k_3$ 成立. ······ 12 分

42.【解析】（1）设点 M(x，y)，则直线A_1M,A_2M的斜率分别为$\frac{y}{x+2},\frac{y}{x-2},x\neq\pm2$，

依题意可知$\frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2}=-\frac{3}{4}$，

化简得$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\neq\pm2)$；

（2）①设直线 l 的方程为$x=my+1,P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)(y_1>0,y_2<0)$，

则$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{y_2}{x_2+2}}{\frac{y_1}{x_1-2}}=\frac{(x_1-2)y_2}{(x_2+2)y_1}=\frac{(my_1-1)y_2}{(my_2+3)y_1}=\frac{my_1y_2-y_2}{my_1y_2+3y_1}=\frac{my_1y_2-(y_1+y_2)+y_1}{my_1y_2+3y_1},$$

又$\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$，消 x 得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

得$\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4},\\ y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4},\end{cases}$

因此$$\frac{k_1}{k_2}=\frac{-\frac{9m}{3m^2+4}+\frac{6m}{3m^2+4}+y_1}{-\frac{9m}{3m^2+4}+3y_1}=\frac{-\frac{3m}{3m^2+4}+y_1}{-\frac{9m}{3m^2+4}+3y_1}=\frac{1}{3},$$

故$\frac{k_1}{k_2}$为定值$\frac{1}{3}$；

②Q_1 坐标为$(x_2,-y_2)$，则直线 PQ_1 方程为$y-y_1=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$，

令 $y=0$ 解得$$x=\frac{(x_2-x_1)y_1}{y_1+y_2}+x_1=\frac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{(my_2+1)y_1+(my_1+1)y_2}{y_1+y_2}=\frac{2my_1y_2}{y_1+y_2}+1$$

$$=\frac{2m(-\frac{9}{3m^2+4})}{-\frac{6m}{3m^2+4}}+1=4,$$

即直线 PQ_1 恒过 D(4，0)，

$$\text{故 }S_{\triangle PFQ_1}=|S_{\triangle PFD}-S_{\triangle Q_1FD}|$$
$$=|\frac{1}{2}\times3|y_1|-\frac{1}{2}\times3|y_2||$$
$$=\frac{3}{2}||y_1|-|y_2||$$

$$=\frac{3}{2}|y_1+y_2|$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{6|m|}{3m^2+4}$$

$$=\frac{9}{3|m|+\frac{4}{|m|}}$$

$$\leqslant\frac{9}{2\sqrt{12}}=\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

当 $m^2=\frac{4}{3}$，即 $m=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立，

此时 $\triangle PFQ_1$ 面积最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$．