专题十　概率、统计

一、单项选择题

1. （2021 潍坊三模 3）某学校参加志愿服务社团的学生中，高一年级有 50 人，高二年级有 30 人，高三年级有 20 人，现用分层抽样的方法从这 100 名学生中抽取学生组成一个活动小组，已知从高二年级的学生中抽取了 6 人，则从高三年级的学生中应抽取的人数为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

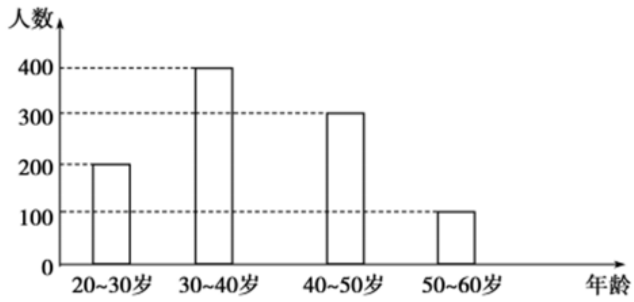
2. （2021 青岛二模 2）若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2，3^2)$，$P(ξ<3-5a)=P(ξ>2a+1)$，则实数 a 等于（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

3. （2021 济宁二模 1）已知随机变量 X 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$，若 $P(X\le 0)=0.2$，则 $P(X<2)=$（　　）

A. 0.2　　B. 0.4　　C. 0.6　　D. 0.8

4. （2021 德州二模 4）2021 年我国推进新冠疫苗全人群免费接种，某小区年龄分布如下图所示，现用分层抽样的方法从该小区所有人中抽取 60 人进行抗体检测，则从 40 岁至 50 岁之间的人群中抽取人数为（　　）.



A. 18　　B. 24　　C. 5　　D. 9

5. （2021 济南二模 4）第 24 届冬季奥林匹克运动会将于 2022 年在北京举办．为了解某城市居民对冰雪运动的关注情况，随机抽取了该市 100 人进行调查统计，得到如下 2×2 列联表．

	男	女	合计
关注冰雪运动	35	25	60
不关注冰雪运动	15	25	40
合计	50	50	100

根据列联表可知（　　）

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

附表：

$P(K^2\geq k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

A．该市女性居民中大约有 5%的人关注冰雪运动

B．该市男性居民中大约有 95%的人关注冰雪运动

C．有 95%的把握认为该市居民是否关注冰雪运动与性别有关

D．有 99%的把握认为该市居民是否关注冰雪运动与性别有关

6.（2021 菏泽二模 4）下列说法错误的是(　　)

A. 用相关指数 R^2 来刻画回归效果，R^2 越小说明拟合效果越好

B. 已知随机变量 $X\sim N(5,\sigma^2)$，若 $P(x<1)=0.1$，则 $P(x\leq 9)=9.9$

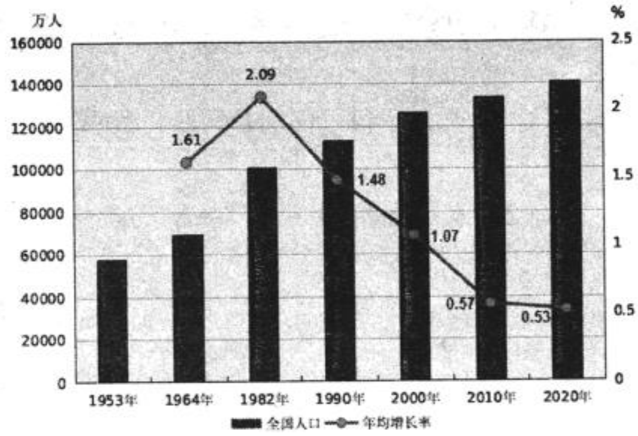
C. 某人每次投篮的命中率为$\frac{3}{5}$，现投篮 5 次，设投中次数为随机变量 Y. 则 $E(2Y+1)=7$

D. 对于独立性检验，随机变量 K^2 的观测值 k 值越小，判定“两分类变量有关系”犯错误的概率越大

7.（2021 烟台适应性练习二 6）袋中装有标号分别为 1，2，3，4，5，6 的六个相同小球．现有一款摸球游戏，从袋中一次性摸出三个小球，记下号码并放回，如果三个号码的和是 3 的倍数，则获奖，若有 4 人参与摸球游戏，则恰好 2 人获奖的概率是（　　）

A．$\dfrac{36}{625}$　　B．$\dfrac{128}{625}$　　C．$\dfrac{216}{625}$　　D．$\dfrac{336}{625}$

8.（2021 烟台三模 6）人口普查是世界各国所广泛采用的搜集人口资料的一种科学方法，是提供全国基本人口数据的主要来源．根据人口普查的基本情况，可以科学的研究制定社会、经济、科教等各项发展政策，是国家科学决策的重要基础工作，人口普查资料是制定人口政策的依据和前提．截止目前，我国共进行了七次人口普查，下图是这七次普查的全国人口及年均增长率情况，下列说法正确的是（　　）



A. 年均增长率逐次减小

B. 年均增长率的极差是 1.08%

C. 这七次普查的人口数逐次增加，且第四次增幅最小

D. 第七次普查的人口数最多，且第三次增幅最大

9.（2021 滨州二模 6）甲、乙两人做从装有 14 个玻璃球的盒子中抓取玻璃球的游戏，规定：甲、乙两人轮流抓取，每次至少抓取 1 个，最多抓取 4 个，最后一次取完者获胜．若甲先抓取，为确保甲一定获胜，则甲第一次应该抓取的玻璃球个数为（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

10.（2021 泰安二模 8）已知随机变量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$，有下列四个命题：

甲：$P(\xi < a-1) > P(\xi > a+2)$

乙：$P(\xi > a) = 0.5$

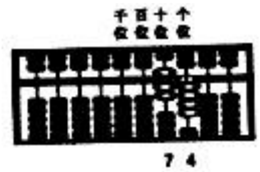
丙：$P(\xi \leqslant a) = 0.5$

丁：$P(a < \xi < a+1) < P(a+1 < \xi < a+2)$

如果只有一个假命题，则该命题为（　　）

A．甲　　　　B．乙　　　　C．丙　　　　D．丁

11.（2021 聊城二模 6）算盘是中国传统的计算工具，其形长方，周为木框，内贯直柱，俗称“档”，档中横以梁，梁上两珠，每珠作数五，梁下五珠，每珠作数一．算珠梁上部分叫上珠，梁下部分叫下珠．例如，在十位档拨上一颗上珠和两颗下珠，个位档拨上四颗下珠，则表示数字 74，若在个、十、百、千位档中随机选择一档拨上一颗下珠，再随机选择两个不同档位各拨一颗上珠，则所表示的数字大于 300 的概率为（　　）



A．$\dfrac{7}{8}$　　　　B．$\dfrac{3}{4}$　　　　C．$\dfrac{7}{24}$　　　　D．$\dfrac{5}{24}$

12.（2021 聊城三模 6）在某次脱贫攻坚表彰会上，共有 36 人受到表彰，其中男性多于女性，现从中随机选出 2 人作为代表上台领奖，若选出的两人性别相同的概率为 $\frac{1}{2}$，则受表彰人员中男性人数为(　　　)

A.　15　　　　B.　18　　　　C.　21　　　　D.　15 或 21

13.（2021 枣庄二模 7）医用口罩由口罩面体和拉紧带组成，其中口罩面体分为内、中、外三层．内层为亲肤材质（普通卫生纱布或无纺布），中层为隔离过滤层（超细聚丙烯纤维熔喷材料层），外层为特殊材料抑菌层（无纺布或超薄聚丙烯熔喷材料层）．根据国家质量监督检验标准，医用口罩的过滤率是重要的指标，根据长期生产经验，某企业在生产线状态正常情况下生产的医用口罩的过滤率 x~N(0.9372，0.0139^2)．若 x~N(μ，σ^2)($\sigma>0$)，则 P($\mu-2\sigma<x\leqslant\mu+2\sigma$)=0.9545，P($\mu-3\sigma<x\leqslant\mu+3\sigma$)=0.9973，$0.97725^{50}\approx0.3164$．有如下命题：

甲：P(x≤0.9)＜0.5；乙：P(x＜0.4)＞P(x>1.5)；丙：P(x>0.9789)＝0.00135；丁：假设生产状态正常，记 X 表示一天内抽取的 50 只口罩中过滤率大于 $\mu+2\sigma$ 的数量，则 P(X≥1)≈0.6．其中假命题是

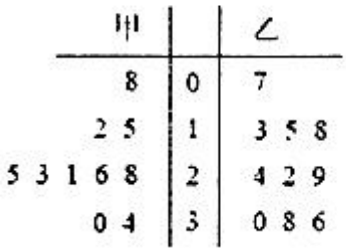
A．甲　　　　B．乙　　　　C．丙　　　　D．丁

14．（2021 省实验中学二模 6）市场调查发现，大约$\frac{3}{5}$的人喜欢在网上购买儿童玩具，其余的人则喜欢在实体店购买儿童玩具．经工商局抽样调查发现，网上购买的儿童玩具合格率为$\frac{4}{5}$，而实体店里的儿童玩具的合格率为$\frac{9}{10}$．现工商局 12345 电话接到一个关于儿童玩具不合格的投诉，则这个儿童玩具是在网上购买的可能性是（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．$\frac{3}{4}$　　　　C．$\frac{4}{5}$　　　　D．$\frac{5}{6}$

二、多项选择题

15．（2021 烟台适应性练习二 10）某教练组为了比较甲、乙两名篮球运动员的竞技状态，选取了他们最近 10 场常规赛得分制成如图的茎叶图，则从最近 10 场比赛的得分看（　　）



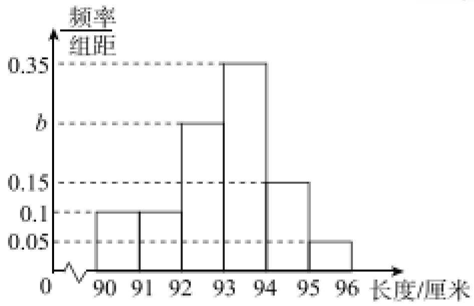
A．甲的中位数大于乙的中位数

B．甲的平均数大于乙的平均数

C．甲的竞技状态比乙的更稳定

D．乙的竞技状态比甲的更稳定

16．（2021 泰安二模 9）某大学生暑假到工厂参加生产劳动，生产了 100 件产品，质检人员测量其长度（单位：厘米），将所得数据分成 6 组：[90，91)，[91，92)，[92，93)，[93，94)，[94，95)，[95，96]，得到如图所示的频率分布直方图，则对这 100 件产品，下列说法中正确的是（　　）



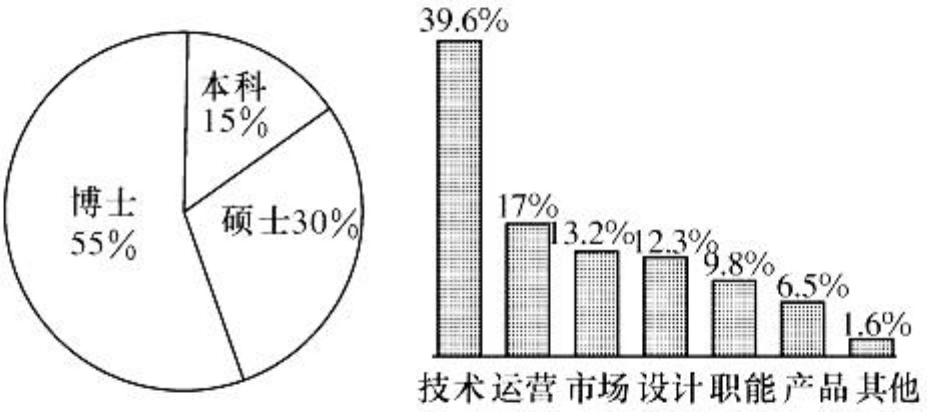
A．b=0.25

B．长度落在区间[93，94）内的个数为 35

C．长度的众数一定落在区间[93，94）内

D．长度的中位数一定落在区间[93，94）内

17.（2021 省实验中学二模 9）调查机构对某高科技行业进行调查统计，得到该行业从业者学历分布饼状图、从事该行业岗位分布条形图，如图所示：



则下列说法正确的是（　　）

A．该高科技行业从业人员中学历为博士的占一半以上

B．该高科技行业中从事技术岗位的人数超过总人数的 30%

C．该高科技行业中从事运营岗位的人员主要是本科生

D．该高科技行业中从事技术岗位的人员主要是博士

18.（2021 聊城三模 9）对具有相关关系的两个变量 x 和 y 进行回归分折时，经过随机抽样获得成对的样本点数据 $(x_1,y_1)(i=1,2,\ldots,n)$，则下列结论正确的是（　　　）

A.　若两变量 x，y 具有线性相关关系，则回归直线至少经过一个样本点

B.　若两变量 x，y 具有线性相关关系，则回归直线一定经过样本点中心 $(\bar{x},\bar{y})$

C.　若以模型 $y=ae^{bx}$ 拟合该组数据，为了求出回归方程，设 $z=\ln y$，将其变换后得到线性方程 $z=6x+\ln 3$，则 a，b 的估计值分别是 3 和 6.

D.　用 $R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$ 来刻画回归模型的拟合效果时，若所有样本点都落在一条斜率为非零实数的直线上，则 R^2 的值为 1

19.（2021 淄博三模 10）下列说法正确的是（　　）

A．某高中为了解在校学生对参加某项社会实践活动的意向，拟采用分层抽样的方法从该校三个年级的学生中抽取一个容量为 60 的样本，已知该校高一、高二，高三年级学生之比为 6：5：4，则应从高二

年级中抽取 20 名学生

B．线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$对应的直线至少经过其样本数据点中的一个点

C．命题“$\forall x>0$，$lg(x^2+1)\geq 0$”的否定是“$\exists x>0$，$lg(x^2+1)<0$”

D．方差描述了一组数据围绕平均数波动的大小，方差越大，数据的离散程度越大，方差越小，数据的离散程度越小

20.（2021 日照三模 9）下列说法正确的是（　　）

A．线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$对应的直线至少经过其样本数据点中的一个点

B．10 件产品中有 7 件正品，3 件次品，从中任取 2 件，恰好取到 1 件次品的概率为$\frac{7}{15}$

C．某高中为了解在校学生对参加某项社会实践活动的意向，拟采用分层抽样的方法从该校三个年级的学生中抽取一个容量为 60 的样本，已知该校高一、高二、高三年级学生之比为 6：5：4．则应从高二年级中抽取 20 名学生

D．从装有 2 个红球和 2 个黑球的口袋内任取 2 个球，“至少有一个黑球”与“至少有一个红球”是互斥而不对立的事件

21.（2021 青岛三模 9）某鱼业养殖场新进 1000 尾鱼苗，测量其体长（单位：毫米），将所得数据分成 6 组，其分组及频数情况如表：

分组（单位：毫米）	[70，75）	[75，80）	[80，85）	[85，90）	[90，95）	[95，100）
频数	100	100	m	350	150	n

已知在按以上 6 个分组做出的频率分布直方图中，[95，100）分组对应小矩形的高为 0.01，则下列说法正确的是（　　）

A．$m=250$

B．鱼苗体长在[90，100）上的频率为 0.16

C．鱼苗体长的中位数一定落在区间[85，90）内

D．从这批鱼苗中有放回地连续抽取 50 次，每次一条，则所抽取鱼苗体长落在区间[80，90）上的次数的期望为 30

22.（2021 滨州二模 9）为庆祝建党 100 周年，讴歌中华民族实现伟大复兴的奋斗历程，增进全体党员干部职工对党史知识的了解，某单位组织开展党史知识竞赛活动，以支部为单位参加比赛，某支部在 5 道党史题中（有 3 道选择题和 2 道填空题），不放回地依次随机抽取 2 道题作答，设事件 A 为“第 1 次抽到选择题”，事件 B 为“第 2 次抽到选择题”，则下列结论中正确的是（　　）

A. $P(A)=\frac{3}{5}$　　B. $P(AB)=\frac{3}{10}$　　C. $P(B|A)=\frac{1}{2}$　　D. $P(B|\overline{A})=\frac{1}{2}$

23.（2021 烟台三模 11）中华人民共和国第十四届运动会将于 2021 年 9 月在陕西省举办．为了组建一支朝气蓬勃、训练有素的赛会志愿者队伍，向全国人民奉献一场精彩圆满的体育盛会，第十四届全国运动会组织委员会欲从 4 名男志愿者，3 名女志愿者中随机抽取 3 人聘为志愿者队的队长．下列说法正确的有（　　）

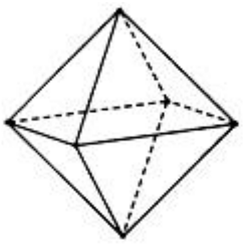
A. 设事件 A：“抽取的三人中既有男志愿者，也有女志愿者”，则 $P(A)=\frac{6}{7}$

B. 设事件 A：“抽取的 3 人中至少有一名男志愿者”，事件 B：“抽取的 3 人中全是男志愿者”，则 $P(B|A)=\frac{2}{17}$

C. 用 X 表示抽取的三人中女志愿者的人数，则 $E(X)=\frac{12}{7}$

D. 用 Y 表示抽取的三人中男志愿者的人数，则 $D(Y)=\frac{24}{49}$

24.（2021 潍坊二模 12）连接正方体每个面的中心构成一个正八面体，甲随机选择此正八面体的三个顶点构成三角形，乙随机选择此正八面体三个面的中心构成三角形，且甲、乙的选择互不影响，则（　　）



A. 甲选择的三个点构成正三角形的概率为$\frac{2}{5}$

B. 甲选择的三个点构成等腰直角三角形的概率为$\frac{3}{5}$

C. 乙选择的三个点构成正三角形的概率为$\frac{3}{7}$

D. 甲选择的三个点构成的三角形与乙选择的三个点构成的三角形相似的概率为$\frac{11}{35}$

三、填空题

25.（2021 枣庄二模 13）已知某地区中小学生人数和近视情况分别如图 1 和图 2 所示，为了解该地区中小学生的近视形成原因，用分层抽样的方法抽取 2%的学生进行调查，则抽取的高中生中近视人数为_______.

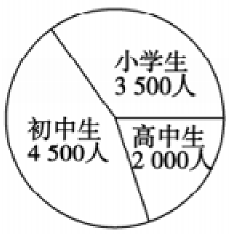


图1

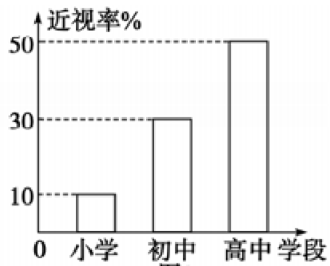


图2

26.（2021 潍坊三模 13）在一次期中考试中某学校高三全部学生 数学成绩 X 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，若 $P\left(X\geq 90\right)=0.5$，且 $P\left(X\geq 110\right)=0.2$，则 $P\left(X\leq 70\right)=$________.

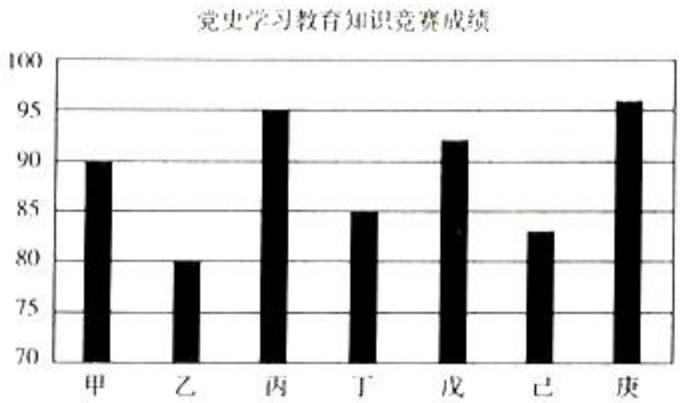
27.（2021 青岛三模 13）某机械厂对一台自动化机床生产的标准零件尺寸进行统计发现，零件尺寸误差 X 近似服从正态分布 N（0，0.5^2）（误差单位：mm），已知尺寸误差的绝对值在 0.5mm 内的零件都是合格零件．若该机床在某一天共生产了 5000 个零件，则其中合格的零件总数为________．

附：随机变量 ξ 服从正态分布 N（μ，σ^2），则 P（μ－σ＜ξ＜μ+σ）＝0.6826，P（μ－2σ＜ξ＜μ+2σ）＝0.9544．

28.（2021 烟台适应性练习一 13）某企业加工了一批新零件，其综合质量指标值 X 服从正态分布 N（80，σ^2），且 P（X＜60）＝0.2，现从中随机抽取该零件 500 个，估计综合质量指标值位于[60，100]的零件个数为_______．

29.（2021 德州二模 13）若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $P(X>5)=P(X<-1)=0.2$，则 $P(-1<X<2)=$ ________.

30.（2021 济南二模 14）习近平总书记在党史学习教育动员大会上强调：“回望过往的奋斗路，眺望前方的奋进路，必须把党的历史学习好、总结好，把党的成功经验传承好、发扬好．”某党小组为响应习总书记号召，重温百年奋斗的恢弘史诗，以信仰之光照亮前行之路，组织开展党史学习教育知识竞赛活动，其中 7 名党员在这次活动中的成绩统计如图所示．则这 7 个成绩的中位数所对应的党员是______．



31.（2021 淄博二模 14）某班 40 名学生，在一次考试中统计所得平均分为 80 分，方差为 70，后来发现有两名同学的成绩有损，甲实得 80 分错记为 60 分，乙实得 70 分错记为 90 分，则更正后的方差为________．

32.（2021 临沂二模 15）随机变量 X 的分布列如表：

X	1	2	3
P	a	b	c

其中 a，b，c 成等差数列，若 E（X）＝$\frac{5}{2}$，则 D（X）＝______．

33.（2021 菏泽二模 14）某射击运动员每次击中目标的概率为$\frac{4}{5}$，现连续射击两次.

（1）已知第一次击中，则第二次击中的概率是 _________ ；

（2）在仅击中一次的条件下，第二次击中的概率是 _________ .

34.（2021 枣庄二模 16）2020 年 11 月 23 日国务院扶贫办确定的全国 832 个贫困县全部脱贫摘帽，脱贫攻坚取得重大突破．为了使扶贫工作继续推向深入，2021 年某原贫困县对家庭状况较困难的农民实行购买农资优惠政策.

（1）若购买农资不超过 2 000 元，则不给予优惠；

（2）若购买农资超过 2 000 元但不超过 5 000 元，则按原价给予 9 折优惠；

（3）若购买农资超过 5 000 元，不超过 5 000 元的部分按原价给予 9 折优惠，超过 5 000 元的部分按原价给予 7 折优惠.

该县家境较困难的一户农民预购买一批农资，有如下两种方案：

方案一：分两次付款购买，实际付款分别为 3 150 元和 4 850 元；

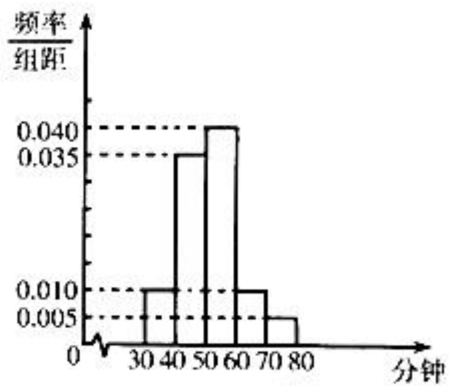
方案二：一次性付款购买.

若采取方案二购买这批农资，则比方案一节省_______元.

35.（2021 淄博三模 16）如图，在 3×3 的点阵中，依次随机地选出 A，B，C 三个点，则选出的三点满足 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$ 的概率是 _________.

四、解答题

36.（2021 潍坊二模 17）某校为了解学生每天的校内体育锻炼情况，随机选取了 100 名学生进行调查，其中男生有 60 人．下面是根据调查结果绘制的学生日均校内体育锻炼时间（单位：分钟）的频率分布直方图．将日均校内体育锻炼时间在[60，80]内的学生评价为“锻炼时间达标”，已知样本中“锻炼时间达标”的学生中有 5 名女生.



（1）若该校共有 2000 名学生，请估计该校“锻炼时间达标”的学生人数；

（2）根据样本数据完成下面的 2×2 列联表，并据此判断是否有 90%的把握认为“锻炼时间达标”与性别有关？

是否达标 性别	锻炼时间达标	锻炼时间未达标	合计
男			
女			
合计			

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.10	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

37.（2021 济宁二模 19）甲、乙两人进行“抗击新冠疫情”知识竞赛，比赛采取五局三胜制，约定先胜三局者获胜，比赛结束．假设在每局比赛中，甲获胜的概率为 $\frac{2}{3}$ ，乙获胜的概率为 $\frac{1}{3}$ ，各局比赛相互独立．

（1）求甲获胜的概率；

（2）设比赛结束时甲和乙共进行了 X 局比赛，求随机变景 X 的分布列及数学期望．

38.（2021 滨州二模 19）为落实中央“坚持五育并举，全面发展素质教育，强化体育锻炼”的精神，某高中学校鼓励学生自发组织各项体育比赛活动，甲、乙两名同学利用课余时间进行乒乓球比赛，规定：每一局比赛中获胜方记 1 分，失败方记 0 分，没有平局，首先获得 5 分者获胜，比赛结束.假设每局比赛甲获胜的概率都是 $\frac{3}{5}$.

（1）求比赛结束时恰好打了 6 局的概率；

（2）若甲以 3：1 的比分领先时，记 X 表示到结束比赛时还需要比赛的局数，求 X 的分布列及期望.

39.（2021 日照二模 18）青少年身体健康事关国家民族的未来，某校为了增强学生体质，在课后延时服务中增设 800 米跑活动，据统计，该校 800 米跑优秀率为 3%，为试验某种训练方式，校方决定，从 800 米跑未达优秀的学生中选取 10 人进行训练，试验方案为：若这 10 人中至少有 2 人达到优秀，则认为该训练方式有效；否则，则认为该训练方式无效.

（1）如果训练结束后有 5 人 800 米跑达到优秀，校方欲从参加该次试验的 10 人中随机选 2 人了解训练的情况，记抽到 800 米跑达到优秀的人数为 X，求 X 的分布列及数学期望；

(2)如果该训练方式将该校 800 米跑优秀率提高到了 50%，求通过试验该训练方式被认定无效的概率 p，并根据 p 的值解释该试验方案的合理性.

（参考结论：通常认为发生概率小于 5%的事件可视为小概率事件）

40.（2021 烟台三模 20）为纪念中国共产党成立 100 周年，加深青少年对党的历史、党的知识、党的理论和路线方针的认识，激发爱党爱国热情，坚定走新时代中国特色社会主义道路的信心，某校举办了党史知识竞赛．竞赛规则是：两人一组，每一轮竞赛中，小组两人分别答 3 道题，若答对题目不少于 5 道题，则获得一个积分．已知甲乙两名同学一组，甲同学和乙同学对每道题答对的概率分别是 p_1 和 p_2，且每道题答对与否互不影响．

（1）若 $p_1=\dfrac{4}{5}$，$p_2=\dfrac{3}{4}$，求甲乙同学这一组在一轮竞赛中获得一个积分的概率；

（2）若 $p_1+p_2=\dfrac{4}{3}$，且每轮比赛互不影响，若甲乙同学这一组想至少获得 5 个积分，那么理论上至少要进行多少轮竞赛？

41.（2021 淄博三模 19）某电台举办有奖知识竞答比赛，选手答题规则相同．甲每道题自己有把握独立答对的概率为$\frac{1}{2}$，若甲自己没有把握答对，则在规定时间内连线亲友团寻求帮助，其亲友团每道题能答对的概率为 p，假设每道题答对与否互不影响．

（Ⅰ）当 $p=\frac{1}{5}$时，

（ⅰ）若甲答对了某道题，求该题是甲自己答对的概率；

（ⅱ）甲答了 4 道题，计甲答对题目的个数为随机变量 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望 EX；

（Ⅱ）乙答对每道题的概率为$\frac{2}{3}$（含亲友团），现甲乙两人各答两个问题，若甲答对题目的个数比乙答对题目的个数多的概率不低于$\frac{15}{36}$，求甲的亲友团每道题答对的概率 p 的最小值．

42.（2021 聊城三模 20）2021 年 3 月 5 日李克强总即在政府作报告中特别指出：扎实做好碳达峰，碳中和各项工作，制定 2030 年前碳排放达峰行动方案，优化产业结构和能源结构．某环保机器制造商为响应号召，对一次购买 2 台机器的客户推出了两种超过机器保修期后 5 年内的延保维修方案：

方案一：交纳延保金 5000 元，在延保的 5 年内可免费维修 2 次，超过 2 次每次收取维修费 1000 元；

方案二：交纳延保金 6230 元，在延保的 5 和内可免费维修 4 次，超过 4 次每次收取维修费 t 元；

制造商为制定的收取标准，为此搜集并整理了 200 台这种机器超过保修期后 5 年内维修的次数，统计得到下表

维修次数	0	1	2	3
机器台数	20	40	80	60

以这 200 台机器维修次数的频率代替 1 台机器维修次数发生的概率，记 X 表示 2 台机器超过保修期后 5 年内共需维修的次数．

（1）求 X 的分布列；

（2）以所需延保金与维修费用之和的均值为决策依据，为使选择方案二对客户更合算，应把 t 定在什么范围？

43.（2021 青岛三模 19）一场科普知识竞答比赛由笔试和抢答两部分组成，若笔试和抢答满分均为 100 分，其中 5 名选手的成绩如表所示：

选手	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
笔试（x 分）	87	90	91	92	95
抢答（y 分）	86	89	89	92	94

对于这 5 名选手，根据表中的数据，试解答下列两个小题：

（1）求 y 关于 x 的线性回归方程；

（2）现要从笔试成绩在 90 分或 90 分以上的选手中选出 2 名参加一项活动，以 ξ 表示选中的选手中笔试和抢答成绩的平均分高于 90 分的人数，求随机变量 ξ 的分布列及数学期望 E（ξ）．

附：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

44.（2021 菏泽二模 20）“十四五”是我国全面建成小康社会、实现第一个百年奋斗目标之后，乘势而上开启全面建设社会主现代化国家新征程、向第二个百年奋斗目标进军的第一个五年，实施时间为 2021 年到 2025 年. 某企业为响应国家号召，汇聚科研力量，加强科技创新，准备加大研发资金投入，为了解年研发资金投入额 x（单位:亿元）对年盈利额 y（单位:亿元）的影响，通过对“十二五”和“十三五”规划发展 10 年期间年研发资金投入额 x_i 和年盈利额 y_i（$i=1$，2，…，10）数据进行分析，建立了两个函数模型:

$y=\alpha+\beta x^2$；$y=e^{\lambda x+t}$，其中 α，β，λ，t 均为常数，e 为自然对数的底数

令 $u_i=x_i^2, v_i=\ln y_i$（$i=1$，2，…，10），经计算得如下数据:

$\overline{x}=26$，$\overline{y}=215$，$\overline{u}=680$，$\overline{v}=5.36$

$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2=100$，$\sum_{i=1}^{10}(u_i-\overline{u})^2=22500$，$\sum_{i=1}^{10}(u_i-\overline{u})(y_i-\overline{y})=260$，

$\sum_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2=4$，$\sum_{i=1}^{10}(v_i-\overline{v})^2=4$，$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(v_i-\overline{v})=18$，问:

（1）请从相关系数的角度，分析哪一个模型拟合度更好?

（2）根据（1）的选择及表中数据，建立，y 关于 x 的回归方程（系数精确到 0.01）

（3）若希望 2021 年盈利额 y 为 500 亿元，请预测 2021 年的研发资金投入额 x 为多少亿元?（结果精确到 0.01）

附:①相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$

回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中: $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$　参考数据: $\ln 2\approx 0.693$，$\ln 5\approx 1.609$.

45.（2021 省实验中学二模 20）每年的 4 月 23 日是世界读书日，设立的目的是推动更多的人去阅读和写作，享受阅读带来的乐趣．某高校为了解在校学生的每周阅读时间 X（单位：小时），对全校学生进行了问卷调查．从中随机抽取了 100 名学生的数据，统计如表：

每周阅读时间 X	[9，11）	[11，13）	[13，15）	[15，17）	[17，19）	[19，21）	[21，23]
频率	0.05	0.1	0.15	0.4	0.2	0.06	0.04

（1）根据频率分布表，估计这 100 名学生每周阅读时间的平均值 $\overline{x}$（同一组数据用该组数据区间的中点值表示）；

（2）若认为目前该校学生每周的阅读时间 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，用（1）中的平均值 $\overline{x}$ 近似代替 μ，且 $P(14\leqslant X\leqslant 17.76)=0.5$，若某学生周阅读时间不低于 14 小时，该同学可获得“阅读之星”称号．学校制定如下奖励方案：“阅读之星”可以获赠 2 次随机购书卡，其他同学可以获赠 1 次随机购书卡．每次获赠的随机购书卡的金额和对应的概率为：

购书卡的金额（单位：元）	20	50
概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

记 Y（单位：元）为甲同学参加问卷调查获赠的购书卡的金额，求 Y 的分布列与数学期望．

46.（2021 潍坊四县 5 月联考 19）为了了解扬州市高中生周末运动时间，随机调查了 3000 名学生，统计了他们的周末运动时间，制成如下的频率分布表：

周末运动时间 t（分钟）	[30，40）	[40，50）	[50，60）	[60，70）	[70，80）	[80，90）
人数	300	600	900	450	450	300

（1）从周末运动时间在[70，80）的学生中抽取 3 人，在[80，90]的学生中抽取 2 人，现从这 5 人中随机推荐 2 人参加体能测试，记推荐的 2 人中来自[70，80）的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（2）由频率分布表可认为：周末运动时间 t 服从正态分布 $N(\mu，\sigma^2)$，其中 μ 为周末运动时间的平均数 $\overline{t}$，σ 近似为样本的标准差 s，并已求得 $s\approx 14.6$．可以用该样本的频率估计总体的概率，现从扬州市所有高中生中随机抽取 10 名学生，记周末运动时间在（43.9，87.7]之外的人数为 Y，求 $P(Y=2)$（精确到 0.001）；

参考数据 1：当 $t\sim N(\mu，\sigma^2)$时，$P(\mu-\sigma<t<\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<t<\mu+2\sigma)=0.9545$，$P(\mu-3\sigma<t<\mu+3\sigma)=0.9973$．

参考数据 2：$0.8186^8\approx 0.202$，$0.1814^2\approx 0.033$．

47.（2021日照三模21）已知某高校共有10000名学生，其图书馆阅览室共有994个座位，假设学生是否去自习是相互独立的，且每个学生在每天的晚自习时间去阅览室自习的概率均为0.1.

（1）将每天的晚自习时间去阅览室自习的学生人数记为X，求X的期望和方差；

（2）18世纪30年代，数学家棣莫弗发现，如果随机变量X服从二项分布$B(n,p)$，那么当n比较大时，可视为X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$．任意正态分布都可变换为标准正态分布（$\mu=0$且$\sigma=1$的正态分布），如果随机变量$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，那么令$Z=\frac{Y-\mu}{\sigma}$，则可以证明$Z\sim N(0,1)$．当$Z\sim N(0,1)$时，对于任意实数a，记$\Phi(a)=P(Z<a)$．

已知如表为标准正态分布表（节选），该表用于查询标准正态分布对应的概率值．例如当$a=0.16$时，由于$0.16=0.1+0.06$，则先在表的最左列找到数字0.1（位于第三行），然后在表的最上行找到数字0.06（位于第八列），则表中位于第三行第八列的数字0.5636便是$\Phi(0.16)$的值．

（ⅰ）求在晚自习时间阅览室座位不够用的概率；

（ⅱ）若要使在晚自习时间阅览室座位够用的概率高于0.7，则至少需要添加多少个座位？

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5834	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6404	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224

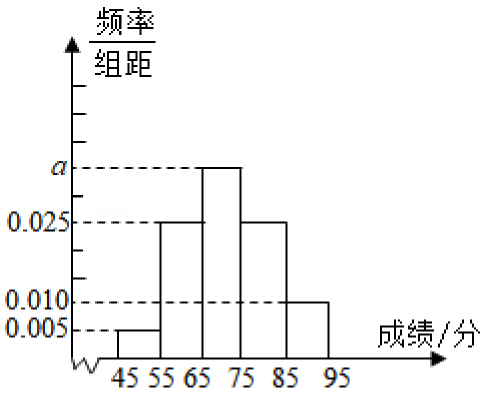
48.（2021 临沂二模 18）2021 年是“十四五”规划开局之年，也是建党 100 周年．为了传承红色基因，某学校开展了“学党史，担使命”的知识竞赛．现从参赛的所有学生中，随机抽取 100 人的成绩作为样本，得到成绩的频率分布直方图，如图．

（1）求频率分布直方图中 a 的值，并估计该校此次竞赛成绩的平均分$\overline{x}$（同一组中的数据用该组区间中点值代表）；

（2）在该样本中，若采用分层抽样的方法，从成绩高于 75 分的学生中随机抽取 7 人查看他们的答题情况，再从这 7 人中随机抽取 3 人进行调查分析，求这 3 人中至少有 1 人成绩在$[85，95]$内的概率；

（3）假设竞赛成绩服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$，已知样本数据的方差为 121，用平均分$\overline{x}$作为 μ 的近似值，用样本标准差 s 作为σ的估计值，求该校本次竞赛的及格率（60 分及以上为及格）．

参考数据：$P(\mu-\sigma<\xi\leqslant\mu+\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\sigma<\xi\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.9545$，$P(\mu-2\sigma<\xi\leqslant\mu+3\sigma)\approx0.9973$．



49.（2021聊城二模19）2020年是全面建成小康社会之年，是脱贫攻坚收官之年．上坝村是乡扶贫办的科学养鱼示范村，为了调查上坝村科技扶贫成果，乡扶贫办调查组从该村办鱼塘内随机捕捞两次，上午进行第一次捕捞，捕捞到60条鱼，共105kg，称重后计算得出这60条鱼质量（单位kg）的平方和为200.41，下午进行第二次捕捞，捕捞到40条鱼，共66kg．称重后计算得出这40条鱼质量（单位kg）的平方和为117．

（1）请根据以上信息，求所捕捞100条鱼儿质量的平均数$\overline{z}$和方差s^2；

（2）根据以往经验，可以认为该鱼塘鱼儿质量X服从正态分布$N(\mu,\ \sigma^2)$，用$\overline{z}$作为μ的估计值，用s^2作为σ^2的估计值．随机从该鱼塘捕捞一条鱼，其质量在[1.21，2.71]的概率是多少？

（3）某批发商从该村鱼塘购买了5000条鱼，若从该鱼塘随机捕捞，记ξ为捕捞的鱼儿质量在[1.21，2.71]的条数，利用（2）的结果，求ξ的数学期望．

附：（1）数据t_1，t_2，…，t_n的方差$s^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2=\frac{1}{n}(\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^2-n\overline{t}^2)$，

（2）若随机变量X服从正态分布$N(\mu,\ \sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=0.6827$；$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9545$；$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)=0.9973$．

50.（2021 泰安二模 21）某新型双轴承电动机需要装配两个轴承才能正常工作，且两个轴承互不影响．现计划购置甲，乙两个品牌的轴承，两个品牌轴承的使用寿命及价格情况如表：

品牌	价格（元、件））	使用寿命（月）
甲	1000	7 或 8
乙	400	3 或 4

已知甲品牌使用 7 个月或 8 个月的概率均为$\frac{1}{2}$，乙品牌使用 3 个月或 4 个月的概率均为$\frac{1}{2}$．

（1）若从 4 件甲品牌和 2 件乙品牌共 6 件轴承中，任选 2 件装入电动机内，求电动机可工作时间不少于 4 个月的概率；

（2）现有两种购置方案，方案一：购置 2 件甲品牌；方案二：购置 1 件甲品牌和 2 件乙品牌（甲，乙两品牌轴承搭配使用）．试从性价比（即电动机正常工作时间与购置轴承的成本之比）的角度考虑，选择哪一种方案更实惠？

51.（2021 潍坊三模 20）第 24 届冬季奥运会将于 2022 年 2 月 4 日至 2 月 20 日在中国举行，其中冰壶比赛项目是本届奥运会的正式比赛项目之一，1998 年中国女子冰壶队第一次参加奥运会冰壶比赛就获得了铜牌．冰壶比赛的场地如图所示，其中左端（投掷线 MN 的左侧）有一个发球区，运动员在发球区边沿的投掷线 MN 将冰壶掷出，使冰壶沿冰道滑行，冰道的右端有一圆形的营垒，以场上冰壶最终静止时距离营垒区圆心 O 的远近决定胜负．

某学校冰壶队举行冰壶投掷测试，规则为：

①每人至多投 3 次，先在点 M 处投第一次，冰壶进入营垒区得 3 分，未进营垒区不得分；

②自第二次投掷开始均在点 A 处投掷冰壶，冰壶进入营垒区得 2 分，未进营垒区不得分；

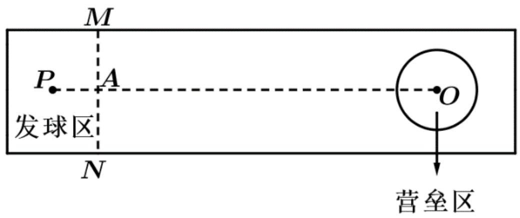
③测试者累计得分高于 3 分即通过测试，并立即终止投掷．

已知投掷一次冰壶，甲得 3 分和 2 分的概率分别为 0.1 和 0.5，乙得 3 分和 2 分的概率分别为 0.2 和 0.4，甲，乙每次投掷冰壶的结果互不影响．

（1）求甲通过测试的概率；

（2）设 Y 为本次测试中乙的得分，求 Y 的分布列；

（3）请根据测试结果来分析，甲，乙两人谁的水平较高？



52.（2021 烟台适应性练习二 20）随着时代发展和社会进步，教师职业越来越受青睐，考取教师资格证成为不少人的就业规划之一. 当前，中小学教师资格考试分笔试和面试两部分. 已知某市 2020 年共有 10000 名考生参加了中小学教师资格考试的笔试，现从中随机抽取 100 人的笔试成绩（满分视为 100 分）作为样本，整理得到如下频数分布表：

笔试成绩 X	[40，50）	[50，60）	[60，70）	[70，80）	[80，90）	[90，100]
人数	5	10	25	30	20	10

（1）假定笔试成绩不低于 90 分为优秀，若从上述样本中笔试成绩不低于 80 分的考生里随机抽取 2 人，求至少有 1 人笔试成绩为优秀的概率；

（2）由频数分布表可认为该市全体考生的笔试成绩 X 近似服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ 近似为 100 名样本考生笔试成绩的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值代替），$\sigma^2=166$，据此估计该市全体考生中笔试成绩不低于 85.9 的人数（结果四舍五入精确到个位）；

（3）考生甲为提升综合素养报名参加了某拓展知识竞赛，该竞赛要回答 3 道题，前两题是哲学知识，每道题答对得 3 分，答错得 0 分；最后一题是心理学知识，答对得 4 分，答错得 0 分. 已知考生甲答对前两题的概率都是$\dfrac{3}{4}$，答对最后一题的概率为$\dfrac{7}{10}$，且每道题答对与否相互独立，求考生甲的总得分 Y 的分布列及数学期望.

（参考数据：$\sqrt{166}\approx 12.9$；若 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.6827$，$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.9545$，$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.9973$.）

53.（2021 德州二模 21）2020 年 1 月 15 日教育部制定出台了《关于在部分高校开展基础学科招生改革试点工作的意见》(也称“强基计划”),《意见》宣布：2020 年起不再组织开展高校自主招生工作，改为实行强基计划，强基计划主要选拔培养有志于服务国家重大战略需求且综合素质优秀或基础学科拔尖的学生，据悉强基计划的校考由试点高校自主命题，校考过程中通过笔试后才能进入面试环节.

参考公式：

①线性相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2)}}$ ，一般地，相关系数 r 的绝对值在 0.95 以上（含 0.95 ）认为线性相关性较强；否则，线性相关性较弱.

②对于一组数据 (x_1,y_1) ，(x_2,y_2) ，$\cdots$ (x_n,y_n) ，其回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为： $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$ ， $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

（1）为了更好的服务于高三学生，某研究机构对随机抽取的 5 名高三学生的记忆力 x 和判断力 y 进行统计分析，得到下表数据

x	6	8	9	10	12
y	2	3	4	5	6

请用相关系数说明该组数据中 y 与 x 之间的关系可用线性回归模型进行拟合，并求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$.

（2）现有甲、乙两所大学的笔试环节都设有三门考试科目且每门科目是否通过相互独立，若某考生报考甲大学，每门笔试科目通过的概率均为 $\frac{2}{5}$ ，该考生报考乙大学，每门笔试科目通过的概率依次为 m ，$\frac{1}{4}$ ， $\frac{2}{3}$ ，其中 $0<m<1$ ，根据规定每名考生只能报考强基计划的一所试点高校，若以笔试过程中通过科目数的数学期望为依据作出决策，求该考生更希望通过乙大学笔试时 m 的取值范围.

54.（2021 枣庄二模 20）天问一号火星探测器于 2021 年 2 月 10 日成功被火星捕获，实现了中国在深空探测领域的技术跨越．为提升探测器健康运转的管理水平，西安卫星测控中心组织青年科技人员进行探测器遥控技能知识竞赛，已知某青年科技人员甲是否做对每个题目相互独立，做对 A，B，C 三道题目的概率以及做对时获得相应的奖金如表所示．

题目	A	B	C
做对的概率	0.8	0.6	0.4
获得的奖金/元	1 000	2 000	3 000

规则如下：按照 A，B，C 的顺序做题，只有做对当前题目才有资格做下一题．

（1）求甲获得的奖金 X 的分布列及均值；

（2）如果改变做题的顺序，获得奖金的均值是否相同？如果不同，你认为哪个顺序获得奖金的均值最大？（不需要具体计算过程，只需给出判断）

55.（2021 青岛二模 20）现对某市工薪阶层对于“楼市限购令”的态度进行调查，随机抽调了 50 人，他们月收入（单位：百元）的频数分布及对“楼市限购令”赞成人数如表：

月收入	[25，35）	[35，45）	[45，55）	[55，65）	[65，75）	[75，85）
频数	5	10	15	10	5	5
赞成人数	4	8	12	5	2	1

（1）根据以上统计数据完成下面的 2×2 列联表，并问能否有 97.5%的把握认为“某市工薪阶层对于‘楼市限购令’的态度与月收入以 6500 元为分界点有关”？

	月收入不低于 65 百元的人数	月收入低于 65 百元的人数	合计
赞成			
不赞成			
合计			

（2）若对月收入在[55，65）和[65，75）的被调查人中各随机选取两人进行追踪调查，求在选中的 4 人中有人不赞成的条件下，赞成“楼市限购令”的人数 ξ 的分布列及数学期望.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

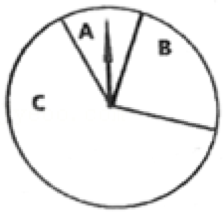
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

56.（2021 烟台适应性练习一 20）如图是一个质地均匀的转盘，一向上的指针固定在圆盘中心，盘面分为 A，B，C 三个区域．每次转动转盘时，指针最终都会随机停留在 A，B，C 中的某一个区域．现有一款游戏：每局交 10 元钱随机转动上述转盘 3 次；每次转动转盘时，指针停留在区域 A，B，C 分别获得积分 10，5，0；三次转动后的总积分不超过 5 分时获奖金 2 元，超过 25 分时获奖金 50 元，其余情况获奖金 5 元．假设每次转动转盘相互独立，且指针停留在区域 A，B 的概率分别是 p 和 $2p$（$0<p<\frac{1}{6}$）．

（1）设某人在一局游戏中获得总积分为 5 的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$ 的最大值点 P_0；

（2）以（1）中确定的 p_0 作为 p 值，某人进行了 5 局游戏，设"在一局游戏中获得的总积分不低于 5"的局数为 ξ，求 ξ 的数学期望；

（3）有人注意到：很多玩家进行了大量局数的该游戏，不但没赚到钱，反而输得越来越多．请用概率统计的相关知识给予解释．



57.（2021淄博二模20）某市在司法知识宣传周活动中，举办了一场司法知识网上答题考试，要求本市所有机关、企事业单位工作人员均要参加考试，试题满分为100分，考试成绩大于等于90分的为优秀．考试结束后，组织部门从所有参加考试的人员中随机抽取了200人的成绩作为统计样本，得到样本平均数为82、方差为64．假设该市机关、企事业单位工作人员有20万人，考试成绩 ξ 服从正态分布 $N(82,64)$ ．

（1）估计该市此次司法考试成绩优秀者的人数有多少万人？

（2）该市组织部门为调动机关、企事业单位工作人员学习司法知识的积极性，制定了如下奖励方案：所有参加考试者，均可参与网上“抽奖赢手机流量”活动，并且成绩优秀者可有两次抽奖机会，其余参加者抽奖一次．抽奖者点击抽奖按钮，即随机产生一个两位数 $(10,11,\cdots,99)$ ，若产生的两位数的数字相同，则可获赠手机流量 $5G$ ， 否则获赠手机流量 $1G$ ． 假设参加考试的所有人均参加了抽奖活动，试估计此次抽奖活动赠予的手机流量总共有多少 G?

参考数据：若 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$ ，则 $P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=0.68$

58.（2021 济南二模 22）某企业对生产设备进行优化升级，升级后的设备控制系统由 $2k-1$（$k\in N_+$）个相同的元件组成，每个元件正常工作的概率均为 p（$0<p<1$），各元件之间相互独立．当控制系统有不少于 k 个元件正常工作时，设备正常运行，否则设备停止运行，记设备正常运行的概率为 p_k（例如：p_2表示控制系统由 3 个元件组成时设备正常运行的概率；p_3表示控制系统由 5 个元件组成时设备正常运行的概率）．

（1）若每个元件正常工作的概率 $p=\frac{2}{3}$．

（ⅰ）当 $k=2$ 时，求控制系统中正常工作的元件个数 X 的分布列和期望；

（ⅱ）计算 p_3．

（2）已知设备升级前，单位时间的产量为 a 件，每件产品的利润为 1 元，设备升级后，在正常运行状态下，单位时间的产量是原来的 4 倍，且出现了高端产品，每件产品成为高端产品的概率为$\frac{1}{4}$，每件高端产品的利润是 2 元．请用 p_k表示出设备升级后单位时间内的利润 y（单位：元），在确保控制系统中元件总数为奇数的前提下，分析该设备能否通过增加控制系统中元件的个数来提高利润．

专题十　概率、统计

一、单项选择题

1.【答案】C

【解析】设高三抽取　人数为 x 人，则 $\frac{6}{30}=\frac{x}{20}$，即 $x=4$.

故选：C

2.【答案】B

【解答】解：随机变量 ξ 服从正态分布 N（2，3^2），P（ξ <3 - 5a）＝P（ξ >2a+1），

可知 3 - 5a 与 2a+1 关于 x＝2 对称，

所以 2a+1 - 2＝2 - （3 - 5a），即 2a - 1＝5a - 1，

所以 a＝0.

故选：B.

3.【答案】 D

【解析】因为 $P(X\le 0)=0.2$ ，所以 $P(X<2)=1-P(X<0)=1-0.2=0.8$ ，

故答案为：D

4.【答案】 A

【解析】由条形统计图的数据，根据分层抽样的定义可以知道，

若抽取 60 人，则从 40 岁至 50 岁之间的人群中抽取人数为 $60\times\frac{300}{200+400+300+100}=18$.

故答案为：A.

5.【答案】C

【解析】根据 2×2 列联表中数据，计算 $K^2=\frac{100\times(35\times 25-25\times 15)^2}{50\times 50\times 60\times 40}=\frac{25}{6}\approx 4.167$，

经查对临界值表知 P（K^2≥3.841）≈0.05.

所以有 95%的把握认为该市居民是否关注冰雪运动与性别有关，选项 C 正确.

故选：C.

6.【答案】A

【解析】A 选项，相关指数越大，说明残差平方和越小，则模型拟合效果越好，故 A 错；

B 选项，正态分布图像关于 x=5 对称，因为 x<1 概率为 0.1，所以 x>9 概率为 0.1，故 x≤9 的概率为 0.9，B 正确；

C 选项，服从二项分布$Y\sim B\left(n,\frac{3}{5}\right)$，因此 E(Y)=3，则 $E(2Y+1)=7$，故 C 正确；

D 选项，对于分类变量进行独立性检验时，随机变量 K^2 的观测值越小，则分类变量间越有关系的可信度越小，故判定两分类变量约有关系发错误的概率越大，故 D 正确.

7.【答案】C

【解析】6 个球中出 3 个的基本事件总数为：$C_6^3=20$，

其中三个球号码之和是 3 的倍数的事件有：（1，2，3）（1，2，6）（1，3，5）（1，5，6），（2，3，4）（2，4，6）（3，4，5）（4，5，6）共 8 个，

∴摸一次球获奖的概率为$\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$，

4 人参加，可看作一人进行 4 次独立重复试验，每一次中奖的概率为$\frac{2}{5}$，

∴4 人参加，恰有 2 人获奖的概率为$C_4^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$，

故选：*C*.

8.【答案】D

【解析】对于 A 选项，由图可知第三次增幅最大，之后增幅减小，所以年增长率是先增后减的，故 A 错；

对于 B 选项，极差为$2.09\%-0.53\%=1.56\%$，故 B 错；

对于 C 选项，第七次增幅最小，故 C 错；

对于 D 选项，第七次普查的人口数最多，且第三次增幅最大，故正确

故选：D

9.【答案】D

【解析】解：因为每人每次至少抓取 1 个，最多抓取 4 个，

所以当两人所拿的和为 5 时，有 14÷（1+4）=2 ••• 4，

则甲第一次应该抓 4 个玻璃球，后面只要满足甲拿的球与乙拿的球和为 5，则甲一定获胜.

故选：*D*.

10.【答案】D

【解析】解：∵只有一个是假命题，∴乙、丙必为真命题（乙与丙共真假），

∴$\mu=a$，则 $\xi\sim N(a,\ \sigma^2)$，

由正态分布曲线的对称性可得，$P(\xi<a-1)>P(\xi>a+2)$，

$P(a<\xi<a+1)>P(a+1<\xi<a+2)$，则甲为真命题，丁为假命题，

故选：*D*.

11.【答案】A

【解析】在个、十、百、千位档中随机选择一档拨上一颗下珠，再随机选择两个不同档位各拨一颗上珠，

基本事件总数 $n=C_4^1\cdot C_4^2=24$，

所表示的数字大于 300 包含的基本事件个数为：

$m=C_2^1C_2^1C_4^1+C_2^2C_4^1+C_1^1C_2^2=21$，

则所表示的数字大于 300 的概率为 $P=\frac{m}{n}=\frac{21}{24}=\frac{7}{8}$.

故选：A.

12.【答案】 C

【解析】设男性有 x 人，则女性有 $36-x$ 人

∵男性多于女性，∴ $x>36-x$ ，即 $x>18$

∵选出的两人性别相同的概率为 $\frac{1}{2}$

∴ $\frac{C_x^2+C_{36-x}^2}{C_{36}^2}=\frac{1}{2}$ ，即 $x^2-36x+315=0$

∴ $x=21$ 或 $x=15$ （舍）

所以男性有 21 人

故答案为：C.

13.【答案】D

【解析】对于丁，P(X≥1)＝$1-C_{50}^{0}0.02275^{0}0.97725^{50}=1-0.3164\approx0.7$，故假命题是丁，选 D.

14.【答案】B

【解析】工商局 12345 电话接到一个关于儿童玩具不合格的投诉，

则这个儿童玩具是在网上购买的可能性为：

$$P=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{10}}=\frac{3}{4}.$$

故选：B.

二、多项选择题

15.【答案】AC

【解析】对于 A，甲的中位数是：$\frac{23+25}{2}=24$，

乙的中位数是：$\frac{22+24}{2}=23$，

∴甲的中位数大于乙的中位数，故 A 正确；

对于 B，甲的平均数为：$\frac{1}{10}$（8+12+15+21+23+25+26+28+30+34）＝22.2，

乙的平均数为：$\frac{1}{10}$（7+13+15+18+22+24+29+30+36+38）＝23.2，

∴甲的平均数小于乙的平均数，故 B 错误；

由茎叶图得甲的数据更集中，故甲的竞技状态比乙的更稳定，故 C 正确，D 错误．

故选：AC．

16.【答案】ABD

【解析】解：对于 A：由频率之和为 1，得（0.35+b+0.15+0.1×2+0.05）×1＝1，解得 b＝0.25，所以选项 A 正确，

对于选项 B：长度落在区间[93，94）内的个数为 100×0.35＝35，所以选项 B 正确，

对于选项 C：对这 100 件产品，长度的众数不一定落在区间[93，94）内，所以选项 C 错误，

对于选项 D：对这 100 件产品，因为 0.1+0.1+0.25＜0.5，而 0.1+0.1+0.25+0.35＞0.5，所以长度的中位数一定落在区间[93，94）内，所以选项 D 正确，

故选：ABD．

17.【答案】AB

【解析】对于 A，由该行业从业者学历分布饼状图得到：

该高科技行业从业人员中学历为博士的占一半以上，故 A 正确；

对于 B，由从事该行业岗位分布条形图得到：

在高科技行业中从事科技岗位的人数超过总人数的 30%，故 B 正确；

对于 C，由该行业从业者学历分布饼状图、从事该行业岗位分布条形图，

无法得到该高科技行业中从事运营岗位的人员主要是本科生，故 C 错误；

对于 D，由该行业从业者学历分布饼状图、从事该行业岗位分布条形图，

无法得到该高科技行业中从事技术岗位的人员主要是博士，故 D 错误．

故选：AB．

18.【答案】 B,C,D

【解析】若两变量 x ， y 具有线性相关关系，即满足 $y=\hat{b}x+\hat{a}$ ，则一定满足 $\bar{y}=\hat{b}\bar{x}+\hat{a}$ ，样本点

不一定在拟合直线上，A 不符合题意，B 符合题意；

若以模型 $y=ae^{bx}$ 拟合该组数据， $z=\ln y=bx+\ln a=6x+\ln 3$ ，故 $a=3,b=6$ ，C 符合题意；

用 $R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$ 来刻画回归模型的拟合效果时，若所有样本点都落在一条斜率为非零实数的直线上，则 $y_i=\bar{y}_i$ ，即 $R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}=1-0=1$ ，D 符合题意；

故答案为：BCD

19.【答案】ACD

【解析】对于 *A*，用分层抽样的方法从该校三个年级的学生中抽取一个容量为 60 的样本，

应从高二年级中抽取的学生数为 $60\times\frac{5}{6+5+4}=20$，故 *A* 正确；

对于 *B*，由最小二乘法求得的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 不一定经过其样本数据点，故 *B* 错误；

命题“$\forall x>0$，$lg(x^2+1)\geqslant 0$”的否定是“$\exists x>0$，$lg(x^2+1)<0$”，故 *C* 正确；

方差是和中心偏离的程度，用来衡量一批数据的波动大小，在样本容量相同的情况下，

方差越大，数据的波动越大，即离散程度越大，方差越小，数据的波动越小，即离散程度越小，故 *D* 正确.

故选：*ACD*.

20.【答案】BC

【解析】对于 *A*：线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 对应的直线经过其样本数据的中心点（$\bar{x}$，$\bar{y}$），故 *A* 错误；

对于 *B*：10 件产品中有 7 件正品，3 件次品，从中任取 2 件，恰好取到 1 件次品的概率为 $P(A)=\frac{C_3^1\cdot C_7^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$，故 *B* 正确；

对于 *C*：用分层抽样的方法从该校三个年级的学生中抽取一个容量为 60 的样本，已知该校高一、高二、高三年级学生之比为 6：5：4．则应从高二年级中抽取 $60\times\frac{5}{15}=20$ 人，故 *C* 正确；

对于 *D*：有 2 个红球和 2 个黑球的口袋内任取 2 个球，“至少有一个黑球”为一黑一红和两黑；“至少有一个红球”为一红一黑和两红，故既不是互斥事件也不是对立事件，故 *D* 错误.

故选：*BC*.

21.【答案】ACD

【解析】对于 *A*，因为[95，100）分组对应小矩形的高为 0.01，组距为 5，

所以[95，100）分组对应的频率为 0.01×5＝0.05，n＝1000×0.05＝50，

则 m＝1000 - 100 - 100 - 350 - 150 - 50＝250，故选项 *A* 正确；

对于 B，鱼苗体长在[90，100）上的频率为$\frac{150+50}{1000}$=0.2，故选项 B 错误；

对于 C，因为鱼的总数为 1000，100+100+250＝450，100+100+250+350＝800，

所以鱼苗体长的中位数一定落在区间[85，90）内，故选项 C 正确；

对于 D，由表中的数据 可知，鱼苗体长落在区间[80，90）上的概率为 $P=\frac{250+350}{1000}$=0.6，

设所抽取鱼苗体长落在区间[80，90）上的次数为 X，

则 X 服从二项分布，即 $X\sim B$（50，0.6），

则 E（X）＝50×0.6＝30，故选项 D 正确．

故选：ACD．

22．【答案】ABC

【解析】解：由题意，事件 A 为“第 1 次抽到选择题”，事件 B 为“第 2 次抽到选择题”，

对于 A，$P(A)=\frac{C_3^1}{C_5^1}=\frac{3}{5}$，故选项 A 正确；

对于 B，$P(AB)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^1C_4^1}=\frac{3}{10}$，故选项 B 正确；

对于 C，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$，故选项 C 正确；

对于 D，$P(\overline{A})=\frac{C_2^1}{C_5^1}=\frac{2}{5}$，$P(\overline{A}B)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^1C_4^1}=\frac{3}{10}$，

所以$P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}$，故选项 D 错误．

故选：ABC．

23．【答案】ABD

【解析】对 A，所有可能的情况有 $C_7^3=35$ 种，其中既有男志愿者，也有女志愿者的情况有 $C_4^1C_3^2+C_4^2C_3^1=30$ 种，故 $P(A)=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$，故 A 正确；

对 B，$P(AB)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$，$P(A)=\frac{C_4^1C_3^2+C_4^2C_3^1+C_4^3}{C_7^3}=\frac{34}{35}$，

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{4}{34}=\frac{2}{17}$，故 B 正确；

对 C，可得 X 的可能取值为 0，1，2，3，

则 $P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2C_4^1}{C_7^3}=\frac{12}{35}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$，

所以 $E(X)=0\times\dfrac{4}{35}+1\times\dfrac{18}{35}+2\times\dfrac{12}{35}+3\times\dfrac{1}{35}=\dfrac{9}{7}$，故 C 错误.

对 D，可得 Y 的可能取值为 0，1，2，3，

则 $P(Y=0)=\dfrac{C_3^3}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$，$P(Y=1)=\dfrac{C_3^2C_4^1}{C_7^3}=\dfrac{12}{35}$，$P(Y=2)=\dfrac{C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{18}{35}$，

$P(Y=3)=\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{4}{35}$，

则 $E(Y^2)=0\times\dfrac{1}{35}+1\times\dfrac{12}{35}+4\times\dfrac{18}{35}+9\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{24}{7}$，$E(Y)=0\times\dfrac{1}{35}+1\times\dfrac{12}{35}+2\times\dfrac{18}{35}+3\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{12}{7}$，

则 $D(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\dfrac{24}{7}-\left(\dfrac{12}{7}\right)^2=\dfrac{24}{49}$，故 D 正确.

故选：ABD.

24.【答案】ABD

【解析】甲随机选择的情况有 $C_6^3=20$ 种，乙随机选择的情况有 $C_8^3=56$ 种，

对于 A，甲选择的三个点构成正三角形，只有一种情况：

甲从上下两个点中选一个，从中间四个点中选相邻两个，共有 $C_2^1C_4^1=8$ 种，

故甲选择的三个点构成正三角形的概率为 $\dfrac{8}{10}=\dfrac{2}{5}$，故选项 A 正确；

对于 B，甲选择的三个点构成等腰直角三角形，有三种情况：

①上下两点都选，中间四个点中选一个，共有 $C_4^1=4$ 种；

②上下两点钟选一个，中间四个点中选相对的两个点，共有 $C_2^1C_2^1=4$ 种；

③中间四个点中选三个点，共有 $C_4^3=4$ 种，

故共有 4+4+4=12 种，

所以甲选择的三个点构成等腰直角三角形的概率为 $\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$，故选项 B 正确；

对于 C，乙选择的三个点构成正三角形，只有一种情况：

上面四个面的中心中选一个点且从下面四个面的中心选相对的两个点，或下面四个面的中心中选一个点且从上面四个面的中心选相对的两个点，共有 $C_4^1C_2^1=8$ 种，

所以乙选择的三个点构成正三角形的概率为$\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$，故选项 C 错误；

对于 D，选择的三个点构成等腰直角三角形同上所求，共有 8+16＝24 种，概率为$\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$，

甲乙相似，则甲乙均为正三角形或均为等腰直角三角形，

所以甲选择的三个点构成的三角形与乙选择的三个点构成的三角形相似的概率为$\frac{2}{5}\times\frac{1}{7}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{11}{35}$，

故选项 D 正确．

故选：ABD．

三、填空题

25.【答案】20

【解析】2000×50%×2%＝20（人）

26.【答案】0. 2

【解析】由题意易得 $\mu=90$，所以 $P(X\le 70)=P(X\ge 110)=0.2$，

故答案为：0. 2．

27.【答案】3413

【解析】由题意可知，合格率为 P（－0. 5＜X＜0. 5）＝0. 6826，

所以合格的零件总数为 5000×0. 6826＝3413．

故答案为：3413．

28.【答案】300

【解析】因为 X 服从正态分布 N（80， σ^2），

故正态曲线的对称轴为 X＝80，

所以 P（X＜60）＝P（X＞100）＝0. 2，

所以 P（60≤X≤100）＝1－P（X＜60）－P（X＞100）＝1－0. 4＝0. 6，

则综合质量指标值位于[60，100]的零件个数为 0. 6×500＝300 个．

故答案为：300．

29.【答案】 0. 3

【解析】由题意，随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ ，且 $P(X>5)=P(X<-1)=0.2$ ，

根据正态分布曲线的对称性，可得 $\mu=\frac{5+(-1)}{2}=2$ ，

所以 $P(-1<X<2)=\frac{1}{2}-P(X<-1)=0.3$ ．

故答案为：0.3.

30.【答案】甲

【解析】由图中可以看出甲的成绩为 90，乙的成绩为 80，丙的成绩为 95，

丁的成绩为 85，戊的成绩为 90～95，己的成绩为 80～85，庚的成绩为 95～100，

故 7 个人的成绩从小到大排列为：乙，己，丁，甲，丙，戊，庚，

所以这 7 个成绩的中位数所对应的党员是甲.

故答案为：甲.

31.【答案】 60

【解析】因为甲实得 80 分，记为 60 分，少记 20 分，乙实得 70 分，记为 90 分，多记 20 分，

所以总分没有变化，因此更正前后的平均分没有变化，都是 80 分，

设甲乙以外的其他同学的成绩分别为 $a_3,a_4,\ldots,a_{40}$ ，

因为更正前的方差为 70，

所以 $(60-80)^2+(90-80)^2+(a_3-80)^2+\ldots+(a_{40}-80)^2=70\times 40$ ，

所以 $(a_3-80)^2+\ldots+(a_{40}-80)^2=2800-400-100=2300$ ，

更正后的方差为：

$s^2=\frac{(80-80)^2+(70-80)^2+(a_3-80)^2+\ldots+(a_{40}-80)^2}{40}=\frac{100+2300}{40}=60$ ，

所以更正后的方差为 60，

故答案为：60.

32.【答案】$\frac{5}{12}$

【解析】解：因为 a，b，c 成等差数列，则有 $2b=a+c$①，

又 $E(X)=\frac{5}{2}$，则 $a+2b+3c=\frac{5}{2}$②，且 $a+b+c=1$③，

由①②③可得，$a=\frac{1}{12}$，$b=\frac{1}{3}$，$c=\frac{7}{12}$,

所以 $D(X)=\frac{1}{12}\times(1-\frac{5}{2})^2+\frac{1}{3}\times(2-\frac{5}{2})^2+\frac{7}{12}\times(3-\frac{5}{2})^2=\frac{5}{12}$.

故答案为：$\frac{5}{12}$.

33.【答案】(1)$\frac{4}{5}$ (2)$\frac{1}{2}$（第一空 2 分，第二空 3 分）

【解析】设第一次击中为事件 A，则$P(A)=\frac{4}{5}$

第二次击中为事件 B，则$P(A)=\frac{4}{5}$

由题意知，第一次击中与否对第二次没有影响，因此已知第一次击中，则第二次击中的概率$\frac{4}{5}$

仅击中一次的概率为$P(C)=C_2^1\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{8}{25}$

在仅击中一次的条件下，第二次击中的概率是$P(B|C)=\frac{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}{\frac{8}{25}}=\frac{1}{2}$

34. 【答案】700

【解析】3150÷0.9＝3500，(4850 - 4500)÷0.7＋5000＝5500，3500＋5500＝9000，

4500＋4000×0.7＝7300，3150＋4850 - 7300＝700.

35. 【答案】$\frac{8}{63}$

【解析】由题意可知 A、B、C 三点是有序的，故讨论 A 即可.

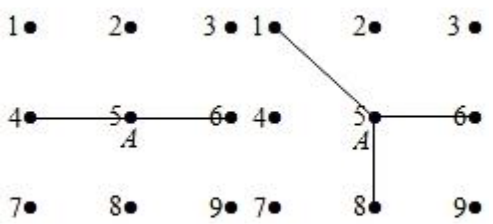
对点 A 可分三种情况讨论，如下图所示：

（1）第一类 A 为 5 号点，

①若$\angle BAC$＝180°，三点共线有 4 条直线，此时有 $4A_2^2$=8种；

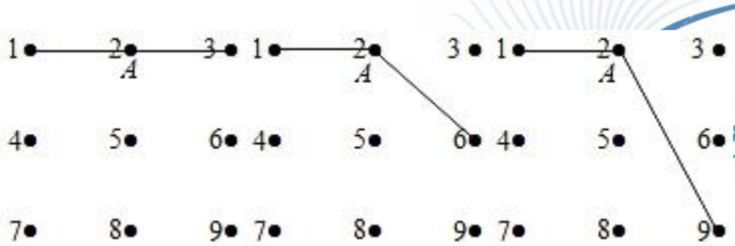
②若$\angle BAC$＝135°，如点 B 再 1 号位，则点 C 再 6 号为或 8 号位，即确定第二号点有 4 种方法，确定第三号点有 2 种方法，

此时有 $4\times 2A_2^2$＝16 种；



（2）第二类 A 为 1、3、7、9 号点，此时，不存在这样的点；

（3）第三类 A 为 2、4、6、8 号点，以 2 号点为例，有三种情况，如下图所示：



故有（1+2+2）× $4A_2^2$＝40 种，

综上所述，满足$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$共有 8+16+40 种，因此，所求概率为 $P=\frac{64}{A_9^3}=\frac{8}{63}$，

故答案为：$\frac{8}{63}$，

四、解答题

36.【解析】（1）由频率分布直方图可得：

在日均校内体育锻炼时间在[60，80]内“锻炼时间达标”的学生概率为：0.010×10+0.005×10=0.15，

其人数为：100×0.015=15 人，

已知样本中“锻炼时间达标”的学生中有 5 名女生，

所以男生有 10 人．

未达标人数中男生：60 - 10=50 人，女生：100 - 60 - 5=35 人；

若该校共有 2000 名学生，该校“锻炼时间达标”的学生人数为：2000×0.15=300 人；

（2）根据样本数据完成下面的 2×2 列联表，

是否达标 性别	锻炼时间达标	锻炼时间未达标	合计
男	10	50	60
女	5	35	40
合计	15	85	100

$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100\times(10\times35-50\times5)^2}{60\times40\times15\times85}\approx0.327<6.635$，

故答案为：没有 90%的把握认为“锻炼时间达标”与性别有关．

37.【解析】（1）由题意知，比赛三局且甲获胜的概率$P_1=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$，

比赛四局且甲获胜的概率为$P_2=C_3^2(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$，

比赛五局且甲获胜的概率为$P_3=C_4^2(\frac{2}{3})^2\times(\frac{1}{3})^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$，

所以甲获胜的概率为$P=P_1+P_2+P_3=\frac{8}{27}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}=\frac{64}{81}$．

（2）随机变量X的取值为 3，4，5，

则$P(X=3)=(\frac{2}{3})^3+(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{3}$，$P(X=4)=C_3^2(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+C_3^2(\frac{1}{3})^2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{27}+\frac{2}{27}=\frac{10}{27}$，

$P(X=5)=C_4^2(\frac{2}{3})^2\times(\frac{1}{3})^2=\frac{8}{27}$，

所以随机变量X的分布列为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{8}{27}$

所以$E(X)=3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{10}{27}+5\times\frac{8}{27}=\frac{107}{27}$.

38.【解析】(1) 比赛结束时恰好打了 6 局，甲获胜的概率为$P_1=C_5^4\times\left(\frac{3}{5}\right)^4\times\left(\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{486}{3125}$,

恰好打了 6 局，乙获胜的概率为$P_2=C_5^1\times\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\left(\frac{2}{5}\right)^4\times\frac{2}{5}=\frac{96}{3125}$,

所以比赛结束时恰好打了 6 局的概率为$P=P_1+P_2=\frac{486}{3125}+\frac{96}{3125}=\frac{582}{3125}$.

(2) X的可能取值为 2，3，4，5，

$$P(X=2)=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25},$$

$$P(X=3)=C_2^1\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{36}{125},$$

$$P(X=4)=C_3^1\times\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{124}{625},$$

$$P(X=5)=C_4^1\times\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\frac{3}{5}+C_4^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{96}{625}.$$

所以 X的分布列如下：

X	2	3	4	5
P	$\frac{9}{25}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{124}{625}$	$\frac{96}{625}$

故$E(X)=2\times\frac{9}{25}+3\times\frac{36}{125}+4\times\frac{124}{625}+5\times\frac{96}{625}=\frac{1966}{625}$

39.【解析】(1) X的可能取值为 0，1，2，

则 P（X=0）$=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{9}$,

$P(X=1)=\dfrac{C_5^1C_5^1}{C_{10}^2}=\dfrac{5}{9}$,

$P(X=2)=\dfrac{C_5^2}{C_{10}^2}=\dfrac{2}{9}$,

所以 X 的分布列如下：

X	0	1	2
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

则 $E(X)=0\times\dfrac{2}{9}+1\times\dfrac{5}{9}+2\times\dfrac{2}{9}=1$；

（2）该训练方式无效的情况有：10 人中有 1 人 800 米跑达到优秀；10 人中有 0 人 800 米跑达到优秀，

所以通过试验该训练方式被认定无效的概率 $p=C_{10}^0\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}+C_{10}^1\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^9=$

$\dfrac{11}{1024}\approx0.01<5\%$,

故可认为该训练方式无效事件是小概率事件，从而认为该训练方式有效，

故该试验方案合理．

40.【解析】（1）假设甲和乙答对的题目个数分别为 a_1 和 a_2，

故所求概率 $P=P(a_1=2,a_2=3)+P(a_1=3,a_2=2)+P(a_1=3,a_2=3)$

$=C_3^2\left(\dfrac{4}{5}\right)^2\times\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^3+\left(\dfrac{4}{5}\right)^3\times C_3^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{4}{5}\right)^3\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{297}{500}$,

所以甲乙同学这一组在一轮竞赛中获得一个积分的概率为 $\dfrac{297}{500}$；

（2）由（1）得 $P=P(a_1=2,a_2=3)+P(a_1=3,a_2=2)+P(a_1=3,a_2=3)$

$=C_3^2\times p_1^2\times(1-p_1)\times(p_2)^3+(p_1)^3\times C_3^2\times p_2^2\times(1-p_2)+p_1^3\times p_2^3$,

整理得 $P=p_1^2p_2^2\left[3(p_1+p_2)-5p_1p_2\right]=p_1^2p_2^2(4-5p_1p_2)$,

因为 $0\le p_1\le1, 0\le p_2\le1$ 且 $p_1+p_2=\dfrac{4}{3}$，所以 $\dfrac{1}{3}\le p_1\le1, \dfrac{1}{3}\le p_2\le1$,

所以 $\dfrac{1}{9}\le p_1p_2\le\left(\dfrac{p_1+p_2}{2}\right)^2$，当且仅当 $p_1=p_2=\dfrac{2}{3}$ 时等号成立，即 $\dfrac{1}{9}\le p_1p_2\le\dfrac{4}{9}$,

令 $p_1p_2=t$，则 $t\in\left[\dfrac{1}{9},\dfrac{4}{9}\right]$,

所以 $P(t)=-5t^3+4t^2,t\in\left[\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right]$，则 $P'(t)=-15t^2+8t$，

当 $t\in\left[\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right]$ 时，$P'(t)>0$，则当 $t=\frac{4}{9}$ 时，$P(t)_{\max}=\frac{256}{729}$，

甲乙两同学在 n 轮比赛中获得的积分数 X 满足 $X\sim B(n,P)$，

所以由 $nP\geq 5$，即 $n\times\frac{256}{729}\geq 5$ 解得 $n\geq 5\times\frac{729}{256}\approx 14.2$，

因为 n 为正整数，所以 n 至少为 15，

所以若甲乙同学这一组想至少获得 5 个积分，那么理论上至少要进行 15 轮竞赛.

41.【解析】（Ⅰ）（ⅰ）记事件 A 为“甲答对了某道题”，事件 B 为“甲确实会做”，

则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\frac{5}{6}$.

（ⅱ）X 可能取值为 0，1，2，3，4，甲答对某道题的概率为 $P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$，

则 $X\sim B(4,\frac{3}{5})$，$P(X=k)=C_4^k(\frac{3}{5})^k(\frac{2}{5})^{4-k}$（$k=0$，1，2，3，4），

则 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{81}{625}$

则 $E(X)=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$

（Ⅱ）记事件 A_i 为“甲答对了 i 道题”，事件 B_i 为“乙答对了 i 道题”，其中甲答对某道题的概率为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p=\frac{1}{2}(1+p)$，答错某道题的概率为 $1-\frac{1}{2}(1+p)=\frac{1}{2}(1-p)$，

则 $P(A_1)=C_2^1\cdot\frac{1}{2}(1+p)\cdot\frac{1}{2}(1-p)=\frac{1}{2}(1-p^2)$，

$P(A_2)=[\frac{1}{2}(1+p)]^2=\frac{1}{4}(1+p)^2$，

$P(B_0)=(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$，$P(B_1)=C_2^1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$，

所以甲答对题数比乙多的概率为：

$P(A_1B_0\cup A_2B_0\cup A_2B_1)=P(A_1B_0)+P(A_2B_0)+P(A_2B_1)$

$=\frac{1}{2}(1-p^2)\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{4}(1+p)^2\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{4}(1+p)^2\cdot\frac{4}{9}$

$=\frac{1}{36}(3p^2+10p+7)\geqslant\frac{15}{36}$，

解得$\frac{2}{3}\leqslant p<1$，

甲的亲友团助力的概率 P 的最小值为$\frac{2}{3}$.

42.【解析】（1）解：由题意得，$X=0,1,2,3,4,5,6$，

$P(X=0)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$，$P(X=1)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{5}\times 2=\frac{1}{25}$，$P(X=2)=\frac{1}{10}\times\frac{2}{5}\times 2+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{25}$，$P(X=3)=$

$\frac{1}{10}\times\frac{3}{10}\times 2+\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times 2=\frac{11}{50}$，

$P(X=4)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}\times 2+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{7}{25}$，$P(X=5)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{5}\times 2=\frac{6}{25}P(X=6)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$，

∴X 的分布列为

X	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{100}$

（2）解：选择方案一：所需费用为Y_1元，则$X\leq 2$时，$Y_1=5000$，$X=3$时，$Y_1=6000$；$X=4$时，$Y_1=7000$；$X=5$时，$Y_5=8000$，$X=6$时，$Y_1=9000$，

∴Y_1的分布列为

Y_1	5000	6000	7000	8000	9000
P	$\frac{17}{100}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{100}$

$E(Y_1)=5000\times\frac{17}{100}+6000\times\frac{11}{50}+7000\times\frac{7}{25}+8000\times\frac{6}{25}+9000\times\frac{9}{100}=6860$，

选择方案二：所需费用为Y_2元，则$X\leq 4$时，$Y_2=6230$；$X=5$时，$Y_2=6230+t$；$X=6$时，$Y_2=6230+2t$，则Y_2的分布列为

Y_2	6230	$6230+t$	$6230+2t$
P	$\frac{67}{100}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{100}$

$E(Y_2)=6230\times\frac{67}{100}+(6230+t)\times\frac{6}{25}+(6230+2t)\times\frac{9}{100}=6230+\frac{21t}{50}$，

要使选择方案二对客户更合算，则$E(Y_2)<E(Y_1)$，

∴$6230+\frac{21t}{50}<6860$，解得$t<1500$，即t的取值范围为$[0,1500)$

43.【解析】（1）由题意，$\overline{x}=\frac{1}{5}\times(87+90+91+92+95)=91$，

$\overline{y}=\frac{1}{5}\times(86+89+89+92+94)=90$，

则$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=34$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=35$，

所以$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{35}{34}$，

则$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=90-\frac{35}{34}\times 91=-\frac{125}{34}$，

所以 y 关于 x 的线性回归方程为$\hat{y}=\frac{35}{34}x-\frac{125}{34}$；

（2）随机变量 ξ 的可能取值为 0，1，2，

因为笔试成绩在 90 分或 90 分以上的选手有 S_2，S_3，S_4，S_5共 4 人，

他们笔试和抢答的成绩平均分分别为：89.5，90，92，94.5，

平均分高于 90 分的有 2 人，

所以 $P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$，

$P(\xi=1)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\frac{2}{3}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$

故 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

所以 $E(\xi)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}=1$.

44.【解析】（1）为了判断两个函数模型：$y=\alpha+\beta x^2$；$y=e^{\lambda x+t}$，拟合程度，只需要判断两个函数模型 $y=\alpha+\beta u, v=\lambda x+t$拟合程度即可.

设$\{u_i\}$和$\{y_i\}$的相关系数为 r_1，$\{x_i\}$和$\{v_i\}$的相关系数为 r_2，由题意

$r_1=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(u_i-\overline{u})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}(u_i-\overline{u})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{260}{150\times 2}\approx 0.87$， …… 2 分

$r_2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(v_i-\overline{v})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{10}(v_i-\overline{v})^2}}=\dfrac{18}{\sqrt{100\times 4}}=0.9$， …… 3 分

显然 $r_2>r_1>0$，因此从相关系数的角度，模型 $y=e^{\lambda x+t}$的拟合程度更好. …… 4 分

(2)先建立 v 关于 x 的线性回归方程，由 $y=e^{\lambda x+t}$ 得，$\ln y=\lambda x+t$，即 $v=\lambda x+t$， …… 5 分

$\lambda=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(v_i-\overline{v})}{\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{18}{100}=0.18$， …… 6 分

$t=\overline{v}-\lambda\overline{x}=5.36-0.18\times 26=0.68$， …… 7 分

所以 v 关于 x 的线性回归方程为 $v=0.18x+0.68$，即 $\ln y=0.18x+0.68$， …… 8 分

所求回归方程为：$y=e^{0.18x+0.68}$. …… 9 分

(3)若 2021 年盈利额为 500 亿元，即为 $500=e^{0.18x+0.68}$， …… 10 分

$\ln 500=0.18x+0.68$，$6.213=0.18x+0.68$，解得：$x\approx 30.74$， …… 11 分

所以 2021 年的研发资金投入量约为 30.74 亿元. …… 12 分

45. 【解析】（1）由题意可知，$\overline{x}=10\times 0.05+12\times 0.1+14\times 0.15+16\times 0.4+18\times 0.2+20\times 0.06+22\times 0.04=15.88$；

（2）由 $P(14\leqslant X\leqslant 17.76)=0.5$，且正态分布密度曲线关于 $x=\mu=15.88$ 对称，

所以 $P(X<14)=P(X>17.76)=\dfrac{1-P(14\leqslant X\leqslant 17.76)}{2}=\dfrac{1}{4}$，

故 $P(X\geqslant 14)=1-P(X<14)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$，

由题意可知，甲为“阅读之星”的概率为$\dfrac{3}{4}$，甲获赠购书卡金额 Y 的可能取值为 20，40，50，70，100，

所以 $P(Y=20)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{16}$，

$P(Y=40)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{27}{64}$，

$P(Y=50)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$，

$P(Y=70)=C_2^1\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{18}{64}=\dfrac{9}{32}$，

$P(Y=100)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{64}$，

所以 Y 的分布列为：

Y	20	40	50	70	100
P	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{27}{64}$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{9}{32}$	$\dfrac{3}{64}$

所以 $E(Y)=20\times\dfrac{3}{16}+40\times\dfrac{27}{64}+50\times\dfrac{1}{16}+70\times\dfrac{9}{32}+100\times\dfrac{3}{64}=\dfrac{3080}{64}=48.125$.

46.【解析】（1）随机变量 X 的可能取值为 0，1，2，

$P(X=0)=\frac{C_3^0C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2C_2^0}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$.

（2）$\mu=\bar{t}=\frac{35\times300+45\times600+55\times900+65\times450+75\times450+85\times300}{3000}=58.5$，

又 $43.9=58.5-14.6=\mu-\sigma$，$87.7=58.5+14.6\times2=\mu+2\sigma$，

所以 $P(43.9<t\leqslant87.7)=P(\mu-\sigma<t\leqslant\mu+2\sigma)\frac{0.6827+0.9545}{2}=0.8186$，

所以 $P(t\leqslant\mu-\sigma$ 或 $t>\mu+2\sigma)=1-0.8186=0.1814$，

所以 $Y\sim B(10，0.1814)$，

所以 $P(Y=2)=C_{10}^2\times0.1814^2\times0.8186^8\approx45\times0.033\times0.202\approx0.300$.

47.【解析】（1）由题意可得，随机变量 X 服从二项分布 $B(n，p)$，

则 $E(X)=np=10000\times0.1=1000$，

$D(X)=np(1-p)=10000\times0.1\times0.9=900$；

（2）（i）由于（1）中二项分布的 n 值较大，故可以认为随机变量 X 服从正态分布，

由（1）可得，$\mu=1000$，$\sigma=30$，

由题意，可得 $X\sim N(1000，900)$，

则 $\frac{X-1000}{30}\sim N(0，1)$，

则 $P(X<994)=P(\frac{X-1000}{30}<-0.2)=\Phi(-0.2)$，

由标准正态分布性质可得，$\Phi(-0.2)=1-\Phi(0.2)$，

故 $P(X<994)=1-\Phi(0.2)$，

则 $P(X\geqslant994)=1-P(X<994)=\Phi(0.2)=0.5793$，

故阅览室晚上座位不够用的概率为 0.5793；

（ii）查表可得，$\Phi(0.53)=0.7019$，

则 $P(\frac{X-1000}{30}<0.53)=0.7019$，即 $P(X<1015.9)=0.7019$，

又 P（X<1015）＝P（$\frac{X-1000}{30}$ <0.5）＝Φ（0.5）＝0.6915<0.7，

故座位数至少要 1016 个，

由于 1016 - 994＝22，

所以阅览室至少还需要增加 22 个座位．

48.【解析】解：（1）由频率分布直方图的性质知，（0.005+0.010+0.025×2+a）×10＝1，

解得 a＝0.035．

平均分$\bar{x}$＝（50×0.005+60×0.025+70×0.035+80×0.025+90×0.010）×10＝71．

（2）成绩在[75，85）和[85，95]的人数比例为$\frac{0.025}{0.010}=\frac{5}{2}$，

所以抽取的 7 人中，成绩在[75，85）和[85，95]的人数分别为 5 人和 2 人，

设“3 人中至少有 1 人成绩在[85，95]“为事件 A，

则 P（A）$=\frac{C_2^1C_5^2+C_2^2C_5^1}{C_7^3}=\frac{5}{7}$，

所以这 3 人中至少有 1 人成绩在[85，95]内的概率为$\frac{5}{7}$.

（3）由题意知，μ＝71，σ＝11，

所以 P（μ - σ＜ξ≤μ+σ）＝P（60＜ξ≤82）≈0.6827，

所以 P（ξ＜60）＝0.5−$\frac{0.6827}{2}$ ＝0.15865，

所以 P（ξ≥60）＝1 - P（ξ＜60）＝0.84135，

故该校本次竞赛的及格率（60 分及以上为及格）为 0.84135．

49.【解析】（1）$\bar{z}=\frac{105+66}{60+40}=1.71$，$s^2=\frac{200.41+117}{100}-1.71^2=0.25$．

（2）该鱼塘鱼儿质量 X～N（μ，σ^2），

其中 μ＝1.71，σ^2＝0.25，

所以$P(1.21\leqslant X\leqslant 2.71)=P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant \mu+2\sigma)=\frac{0.6827+0.9545}{2}=0.8186$.

（3）由题意可知 ξ～B（5000，0.8186），

所以 ξ 的数学期望为 E（ξ）＝5000×0.8186＝4093．

50.【解析】解：（1）若取 2 个甲品牌，必满足题意，对应的概率为：$\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$，

若取一甲一乙，要能连续使用 4 个月的概率：$\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{15}$，

若取 2 个乙，能连续使用 4 个月的概率为：$\dfrac{C_2^2(\frac{1}{2})^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{60}$，

∴所求概率为：$\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{15}+\dfrac{1}{60}=\dfrac{41}{60}$；

（2）设电机正常工作时间为 X 个月，

①方案一中，X 的取值为 7，8，

$P(X=8)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$；

$P(X=7)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$，

∴$E(X)=7\times\dfrac{3}{4}+8\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{29}{4}$，

由于甲为 1000 元每件，故性价比为$\dfrac{29}{4}\div 2000=\dfrac{29}{8000}$；

②方案二中，Y 的所有可能取值为：6，7，8，

$P(Y=6)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$；

$P(Y=8)=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{8}$；

$P(Y=7)=1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{8}$；

∴$E(Y)=6\times\dfrac{1}{4}+7\times\dfrac{5}{8}+8\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{55}{8}$，

又因甲为 1000 元每件，乙为 400 元每件，两件共 800 元，

故性价比为$\dfrac{55}{8}\div 1800=\dfrac{11}{2880}$；

∵$\dfrac{29}{8000}<\dfrac{11}{2880}$；

∴从性价比看方案二更实惠．

51.【解析】解：（1）若甲通过测试，则甲的得分 X 为 4 或 5，

$P(X=4)=0.9\times0.5\times0.5=0.225$，

$P(X=5)=0.1\times0.5\times0.5+0.1\times0.5=0.025+0.05=0.075$，

所以 $P=P(X=4)+(X=5)=0.225+0.075=0.3$．

（2）Y 的可能取值为 0，2，3，4，5．

$P(Y=0)=0.8\times0.6\times0.6=0.288$，

$P(Y=2)=0.8\times0.4\times0.6+0.8\times0.6\times0.4=0.384$,

$P(Y=3)=0.2\times0.6\times0.6=0.072$,

$P(Y=4)=0.8\times0.4\times0.4=0.128$,

$P(Y=5)=0.2\times0.6\times0.4+0.2\times0.4=0.128$.

Y	0	2	3	4	5
P	0.288	0.384	0.072	0.128	0.128

（3）甲水平高

理由如下：乙通过测试的概率 $P=P(Y=4)+P(Y=5)=0.128+0.128=0.256$

甲通过测试的概率 0.3 大于乙通过测试的概率 0.256.

52.【解析】（1）由已知，样本中笔试成绩不低于 80 分的考生共有 30 人，其中成绩优秀的 10 人，

故至少有 1 人笔试成绩为优秀的概率为 $P=\dfrac{C_{20}^{1}C_{10}^{1}+C_{10}^{2}}{C_{30}^{2}}=\dfrac{49}{87}$;

（2）由表格中的数据可知，$\mu=0.05\times45+0.1\times55+0.25\times65+0.3\times75+0.2\times85+0.1\times95=73$，

又 $\sigma^2=166$，即 $\sigma\approx12.9$，

所以 $P(X\geqslant85.9)=P(X\geqslant\mu+\sigma)=\dfrac{1}{2}[1-P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)]\approx0.15865$，

由此可估计该市全体考生中笔试成绩不低于 85.9 的人数为 $10000\times0.15865\approx1587$ 人；

（3）考生甲的总得分 Y 的所有可能取值为 0，3，4，6，7，10，

则 $P(Y=0)=(\dfrac{1}{4})^2\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{3}{163}$，

$P(Y=3)=C_2^1\cdot\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{80}$，

$P(Y=4)=(\dfrac{1}{4})^2\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{7}{160}$，

$P(Y=6)=(\dfrac{3}{4})^2\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{27}{160}$，

$P(Y=7)=C_2^1\cdot\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{21}{80}$，

$P(Y=10)=(\dfrac{3}{4})^2\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{63}{160}$，

故 Y 的分布列为：

Y	0	3	4	6	7	10
P	$\frac{3}{163}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{7}{160}$	$\frac{27}{160}$	$\frac{21}{80}$	$\frac{63}{160}$

所以 $E(Y)=0\times\frac{3}{163}+3\times\frac{9}{80}+4\times\frac{7}{160}+6\times\frac{27}{160}+7\times\frac{21}{80}+10\times\frac{63}{160}=\frac{73}{10}$.

53.【解析】(1) 解：根据表格中的数据，可得 $\bar{x}=\frac{6+8+9+10+12}{5}=9$ ， $\bar{y}=\frac{2+3+4+5+6}{5}=4$ ，

$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=12+24+36+50+72=194$ ， $\sum_{i=1}^{5}x_i^2=36+64+81+100+144=425$ ，

$\sum_{i=1}^{5}y_i^2=4+9+16+25+36=90$ ，

可得相关系数 $r=\frac{194-5\times9\times4}{\sqrt{(425-5\times81)(90-5\times16)}}=\frac{14}{10\sqrt{2}}\approx0.99>0.95$ ，

故 y 与 x 之间的关系可用线性回归模型进行拟合，

又由 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{194-5\times9\times4}{425-5\times81}=0.7$ ，可得 $\hat{a}=4-9\times0.7=-2.3$.

综上回归直线方程 $\hat{y}=-2.3+0.7x$.

(2) 解：通过甲大学的考试科目数 $X\sim B(3,\frac{2}{5})$ ，则 $E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$ ，

设通过乙大学的考试科目数为 Y ，则 Y 可能的取值为 0，1，2，3，

则 $P(Y=0)=(1-m)(1-\frac{1}{4})(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{4}(1-m)$ ，

$P(Y=1)=m(1-\frac{1}{4})(1-\frac{2}{3})+(1-m)\times\frac{1}{4}\times(1-\frac{2}{3})+(1-m)\times(1-\frac{1}{4})\times\frac{2}{3}=\frac{7}{12}-\frac{1}{3}m$ ，

$P(Y=2)=m\times\frac{1}{4}(1-\frac{2}{3})+m\times(1-\frac{1}{4})\times\frac{2}{3}+(1-m)\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{5}{12}m$ ，

$P(Y=3)=m\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}m$ ，

所以 $E(Y)=\frac{7}{12}-\frac{1}{3}m+2(\frac{1}{6}+\frac{5}{12}m)+3\times\frac{1}{6}m=\frac{11}{12}+m$ ，

因为该考生更希望通过乙大学的笔试考试，所以 $E(Y)>E(X)$ ，即 $\frac{11}{12}+m>\frac{6}{5}$ ，

又由 $0<m<1$ ，解得 $\frac{17}{60}<m<1$ ，

即为该考生更希望通过乙大学的笔试时 m 的范围为 $(\frac{17}{60},1)$.

54.【解析】(1) 分别用 A，B，C 表示做对题目 A，B，C 的事件，则 A，B，C 相互独立，

由题意，X 的可能取值为 0，1000，3000，6 000

$P(X=0)=P(\bar{A})=0.2$；$P(X=1000)=P(A\bar{B})=0.8\times0.4=0.32$

P(X＝3000)＝$P(AB\overline{C})$＝0.8×0.6×0.6＝0.288

P(X＝6000)＝P(ABC)＝0.8×0.6×0.4＝0.192

所以甲获得的奖金 X 的分布列为：

X	0	1000	3000	6000
P	0.2	0.32	0.288	0.192

E(X)＝0×0.2＋1000×0.32＋3000×0.288＋6000×0.192＝2336；

（2）改变做题的顺序，获得奖金的均值互不相同，

决策的原则是选择期望值 E(X)大的做题顺序，这称为期望值原则，做对的概率大表示题目比较容易，做对的概率小表示题目比较难．猜想：按照由易到难的顺序做题，即按照题目 A，B，C 的顺序做题，得到奖金的期望值最大．

55.【解析】解：（1）2×2 列联表为：

	月收入不低于 65 百元的人数	月收入低于 65 百元的人数	合计
赞成	3	29	32
不赞成	7	11	18
合计	10	40	50

根据列联表可得 K^2 的观察值 $k=\frac{50\times(3\times11-29\times7)^2}{10\times40\times18\times32}$ ≈6.27＞5.024，

所以有 97.5%的把握认为“某市工薪阶层对于‘楼市限购令’的态度与月收入以 6500 元为分界点有关”．

（2）ξ 的所有可能取值有 0，1，2，3，

则 P（ξ＝0）$=\frac{C_5^2C_3^2}{C_{10}^2C_5^2-C_5^2C_2^2}=\frac{30}{440}=\frac{3}{44}$，

P（ξ＝1）$=\frac{C_5^1C_5^1C_3^2+C_5^2C_2^1C_3^1}{C_{10}^2C_5^2-C_5^2C_2^2}=\frac{135}{440}=\frac{27}{88}$，

P（ξ＝2）$=\frac{C_5^2C_3^2+C_5^1C_5^1C_2^1C_3^1+C_5^2C_2^2}{C_{10}^2C_5^2-C_5^2C_2^2}=\frac{190}{440}=\frac{19}{44}$，

P（ξ＝3）$=\frac{C_5^2C_2^1C_3^1+C_5^1C_5^1C_2^2}{C_{10}^2C_5^2-C_5^2C_2^2}=\frac{85}{440}=\frac{17}{88}$，

所以 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{3}{44}$	$\frac{27}{88}$	$\frac{19}{44}$	$\frac{17}{88}$

数学期望 E（ξ）$=0\times\frac{3}{44}+1\times\frac{27}{88}+2\times\frac{19}{44}+3\times\frac{17}{88}=\frac{7}{4}$.

56.【解析】解：（1）由题意可得，$f(p)=C_3^1(2p)(1-3p)^2=54p^3-36p^2+6p$（$0<p<\frac{1}{6}$），

则 $f'(p)=162p^2-72p+6$，

令 $f'(p)=0$，解得 $p=\frac{1}{9}$或$p=\frac{1}{3}$（舍），

当 $0<p<\frac{1}{9}$时，$f'(p)>0$，则 $f(p)$ 单调递增，

当$\frac{1}{9}<p<\frac{1}{6}$时，$f'(p)<0$，则 $f(p)$ 单调递减，

所以当 $p=\frac{1}{9}$时，$f(p)$ 取得最大值，

故 $f(p)$ 的最大值点为$p_0=\frac{1}{9}$；

（2）由（1）可知，$p=p_0=\frac{1}{9}$，

所以每一局游戏中总积分不低于 5 的概率为$p_1=1-(1-3p)^3=1-(1-\frac{1}{3})^3=\frac{19}{27}$，

由题意可知，$\xi\sim B(5,\frac{19}{27})$，

所以 $E(\xi)=5\times\frac{19}{27}=\frac{95}{27}$；

（3）设每一局游戏中获得奖金数为 X，则 X 的所有可能取值为 2，5，50，

所以 $P(X=2)=(1-3p)^3+C_3^2(1-3p)^2(2p)=27p^3-9p^2-3p+1$，

$P(X=50)=p^3$，

$P(X=5)=1-(27p^3-9p^2-3p+1)-p^3=-28p^3+9p^2+3p$，

所以 $E(X)=2\times(27p^3-9p^2-3p+1)+5\times(-28p^3+9p^2+3p)+50\times p^3=-36p^3+27p^2+9p+2$，

令 $g(p)=-36p^3+27p^2+9p+2$，

则 $g'(p)=-108p^2+54p+9$（$0<p<\frac{1}{6}$），

因为 $g'(p)$ 在 $(0,\frac{1}{6})$ 上单调递增，

所以 $g'(p)>g'(0)=0>0$，

故 $g(p)$ 在 $(0,\frac{1}{6})$ 上单调递增，

所以 $E(X)=g(p)<g(\frac{1}{6})=\frac{49}{12}<10$，

所以每局游戏获得奖金的期望远低于所交的钱数，玩的越多，输的越多．

57.【解析】（1）解：由题意，随机抽取了 200 人的成绩作为统计样本，得到样本平均数为 82、方差为 64，

即 $\mu=82,\sigma=8$，所以考试成绩优秀者得分 $\xi\geq 90$，即 $\xi\geq\mu+\sigma$．

又由 $P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)\approx 0.68$ ，

得 $P(\xi\geq\mu+\sigma)\approx\frac{1}{2}(1-0.68)=0.16$ ．

所以估计该市此次司法考试成绩优秀者人数可达 $20\times 0.16=3.2$ 万人．

（2）解：设每位抽奖者获赠的手机流量为 X G，则 X 的值为 1，2，5，6，10．

可得 $P(X=1)=(1-0.16)\times\frac{9}{10}=\frac{756}{1000}$ ，

$P(X=2)=0.16\times(\frac{9}{10})^2=\frac{1296}{10000}$ ，

$P(X=5)=(1-0.16)\times\frac{1}{10}=\frac{84}{1000}$ ，

$P(X=6)=0.16\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}\times 2=\frac{288}{10000}$ ，

$P(X=10)=0.16\times(\frac{1}{10})^2=\frac{16}{10000}$ ．

所以随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	5	6	10
P	$\frac{756}{1000}$	$\frac{1296}{10000}$	$\frac{84}{10000}$	$\frac{288}{10000}$	$\frac{16}{10000}$

所以 $E(X)=1\times\frac{756}{1000}+2\times\frac{1296}{10000}+5\times\frac{84}{1000}+6\times\frac{288}{10000}+10\times\frac{16}{10000}=1.624$ （G）．

因此，估计此次抽奖活动赠予的手机流量总值为 $20\times 1.624=32.48$ （万 G）．

58.【解析】（1）（i）因为 $k=2$，所以控制系统中正常工作的元件个数 X 的可能取值为 0，1，2，3，

因为每个元件的工作相互独立且正常工作的概率均为 $p=\frac{2}{3}$，

所以 $X\sim B(3,\frac{2}{3})$，

则 $P(X=0)=C_3^0(\frac{2}{3})^0(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$，

$P(X=1)=C_3^1(\frac{2}{3})^1(\frac{1}{3})^2=\frac{2}{9}$，

$P(X=2)=C_3^2(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^1=\frac{4}{9}$，

$P(X=3)=C_3^3(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^0=\frac{8}{27}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

则 X 的数学期望为 $E(X)=0\times\frac{1}{27}+1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{8}{27}=2$；

（ii）由题意可知，$p_3=C_5^3(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^2+C_5^4(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^1+C_5^5(\frac{2}{3})^5=\frac{80}{243}+\frac{80}{243}+\frac{32}{243}=\frac{192}{243}=\frac{64}{81}$；

（2）升级改造后单位时间内产量的分布列为：

产量	$4a$	0
设备运行概率	p_k	$1-p_k$

所以升级改造后单位时间内产量的期望为 $4ap_k$，

产品类型	高端产品	一般产品
产量（单位：件）	ap_k	$3ap_k$
利润（单位：元）	2	1

设备升级后单位时间内的利润为 $y=2ap_k+3ap_k=5ap_k$，

因为控制系统中元件总数为奇数，若增加 2 个元件，

则第一类：原系统中至少有 $k+1$ 个元件正常工作，其概率为 $p(1)=p_k-C_{2k-1}^{k}p^k(1-p)^{k-1}$，

第二类：原系统中恰好有 k 个元件正常工作，新增 2 个元件中至少有 1 个正常工作，

其概率为 $p(2)=C_{2k-2}^{k}p^k(1-p)^{k-1}[1-(1-p)^2]=C_{2k-1}^{k}p^{k+1}(1-p)^{k-1}(2-p)$，

第三类：原系统中有 $k-1$ 个元件正常工作，新增 2 个元件全部正常工作，

其概率为 $p(3)=C_{2k-1}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^kp^2=C_{2k-1}^{k-1}p^{k+1}(1-p)^k$，

所以 $p_{k+1}=p_k-C_{2k-1}^{k}p^k(1-p)^{k-1}+C_{2k-1}^{k}p^{k+1}(1-p)^{k-1}(2-p)+C_{2k-1}^{k-1}p^{k+1}(1-p)^k$

$=p_k+C_{2k-1}^{k}p^k(1-p)^k(2p-1)$，即 $p_{k+1}-p_k=C_{2k-1}^{k}p^k(1-p)^k(2p-1)$，

所以当 $p>\frac{1}{2}$ 时，$p_{k+1}-p_k>0$，故 p_k 单调递增，即增加元件个数，设备正常工作的概率变大；

当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$p_{k+1}-p_k\leqslant0$，即增加元件个数，设备正常工作的概率没有变大．

又因为 $y=5ap_k$，

所以当 $p>\frac{1}{2}$ 时，设备可以通过增加控制系统中元件的个数来提高利润；

当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，设备不可以通过增加控制系统中元件的个数来提高利润．