2021 年安庆市高三模拟考试（二模）

数学试题（理科）参考答案

第 I 卷

一、 选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	C	A	D	A	B	C	C	A	D	B

1.【解析】由 $A\cap B=A$ 知 $A\subseteq B$，故 $\begin{cases}-a<2\\ a+3\geqslant 4\end{cases}$，得 $a\geqslant 1$．故选 C.

2.【解析】$z^2+\dfrac{2}{z}=(1+\mathrm{i})^2+\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=2\mathrm{i}+1-\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$，$\left|z^2+\dfrac{2}{z}\right|=\sqrt{2}$．故选 B.

3.【解析】可分两种情况：第一种情况，只有 1 位女生入选，不同的选法有 $\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_4^2=12$（种）；第二种情况，有 2 位女生入选，不同的选法有 $\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_4^1=4$（种）．根据分类加法计数原理知，至少有 1 位女生人选的不同的选法有 16 种．故选 C.

4.【解析】由函数解析式知函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的奇函数和单调递增函数，于是原不等式可化为 $f\left(2x-1\right)<f\left(-3\right)$，所以 $2x-1<-3$，解得 $x\in\left(-\infty,-1\right)$．故选 A.

5.【解析】画出线性约束区域，所以当直线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}z$ 经过 $\left(3.0\right)$ 点时，目标函数 $z=x-2y$ 有最大值， 最大值为 3．故选 D.

6.【解析】由 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\tan\dfrac{\alpha}{2}-1$，得 $\sin\alpha+\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}-1$.

因为 $\cos\alpha=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\cos\alpha$，即 $\sin\alpha=-2\cos\alpha$，所以 $\tan\alpha=-2$，故选 A.

7.【解析】设 $\{a_n\}$ 是等比数列的公比为 q，$\dfrac{S_2}{S_2+S_4}=\dfrac{1}{5}$，故 $S_4=4S_2$，从而 $a_3+a_4=3\left(a_1+a_2\right)$，

即 $\left(a_1+a_2\right)q^2=3\left(a_1+a_2\right)$，解得 $q^2=3$，$\dfrac{a_2}{a_2+a_4}=\dfrac{a_1q}{a_1q+a_1q^3}=\dfrac{1}{1+q^2}=\dfrac{1}{4}$，故选 B.

8.【解析】由图象可知$\frac{T}{2}<2<\frac{3T}{4}$，即$\frac{\pi}{\omega}<2<\frac{3\pi}{2\omega}$，得$\frac{\pi}{2}<\omega<\frac{3\pi}{4}$．因为$\omega$为正整数，所以$\omega=2$．又$x=2$时，$y_{\min}=-1$，所以$4+\varphi=2k\pi+\pi$，即$\varphi=2k\pi+\pi-4$，$k\in Z$，已知$|\varphi|<2$，所以$\varphi=\pi-4$．故选 C.

9.【解析】由题意可知，直线AB的方程为$y=\sqrt{3}(x-\frac{p}{2})$，代入$y^2=2px$，整理得$x^2-\frac{5}{3}px+\frac{1}{4}p^2=0$．设点$A$、$B$的坐标分别为$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，因为点$A$位于$x$轴上方，所以$x_1=\frac{3}{2}p$，$x_2=\frac{1}{6}p$，所以$\frac{S_1}{S_2}=\frac{|y_1|}{|y_2|}=\frac{\sqrt{2px_1}}{\sqrt{2px_2}}=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}=3$，故选 C.

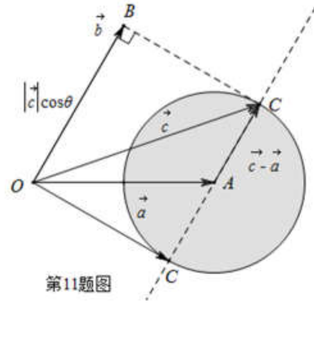
10.【解析】设“方亭”的上底面边长为a，下底面边长为b，高为h，则$V=\frac{1}{3}h\left(a^2+ab+b^2\right)$，

$$V_1=\frac{1}{2}ha\left(a+b\right)=\frac{1}{2}h\left(a^2+ab\right)$$

$$V_2=V-V_1=\frac{1}{3}h\left(a^2+ab+b^2\right)-\frac{1}{2}h\left(a^2+ab\right)=\frac{1}{6}h\left(-a^2-ab+2b^2\right)$$

$$\therefore\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{1}{6}h\left(2b^2-a^2-ab\right)}{\frac{1}{2}h\left(a^2+ab\right)}=\frac{1}{3}\times\frac{2-\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$ 故选A.

11.【解析】解法 1：取$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，则点$C$在以$A$为圆心，半径为 1 的圆面上（包括边界），设向量$\vec{b},\vec{c}$的夹角为$\theta$，由图可知，$\theta$取值范围为$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$；$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta=2|\vec{c}|\cos\theta$，由于$|\vec{c}|\cos\theta$为向量$\vec{c}$在向量$\vec{b}$上的投影，且$0\leqslant|\vec{c}|\cos\theta\leqslant 2$.故$\vec{b}\cdot\vec{c}$的取值范围是[0,4].选 D.



第11题图

解法 2：不妨设$\vec{a}=(2,0)$，$\vec{b}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{c}=(x,y)$．因为$|\vec{c}-\vec{a}|\leqslant 1$，所以$(x-2)^2+y^2\leqslant 1$，设$x=2+r\cos\alpha$，$y=r\sin\alpha$，$0\leqslant r\leqslant 1$，$\alpha\in\mathrm{R}$，

所以$\vec{b}\cdot\vec{c}=x+\sqrt{3}y=2+r\cos\alpha+\sqrt{3}r\sin\alpha=2+2r\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

由于$-1\leqslant -r\leqslant r\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant r\leqslant 1$，故$\vec{b}\cdot\vec{c}\in[0,4]$. 故选 D.

12.【解析】由题意知$(\ln x-k)x>3\ln x$，有$k<\left[\dfrac{(x-3)\ln x}{x}\right]_{\min}$，$x\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\ \mathrm{e}^2\right]$

令$g(x)=\dfrac{(x-3)\ln x}{x}$，则$g'(x)=\dfrac{3\ln x+x-3}{x^2}$. 令$\varphi(x)=3\ln x+x-3$，

易知其单调递增，因为$\varphi(2)=3\ln 2-1>0$，$\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right)=3\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}=3\ln\dfrac{3}{2\sqrt{\mathrm{e}}}<0$，所以存在

$x_0\in\left(\dfrac{3}{2},2\right)$，使得$\varphi(x_0)=3\ln x_0+x_0-3=0$，

因此$g(x)=\dfrac{(x-3)\ln x}{x}$在$\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\ x_0\right)$单调递减，$[x_0,\ \mathrm{e}^2]$单调递增，$g(x)_{\min}=\dfrac{(x_0-3)\ln x_0}{x_0}$

$=2-\dfrac{1}{3}\left(x_0+\dfrac{9}{x_0}\right)\in\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{6}\right)$，所以最大整数$k$为$-1$，故选 B.

第Ⅱ卷

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.【解析】因为$f'(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{\mathrm{e}^x}$，$f'(0)=1$，$f(0)=0$，所以切线方程为$y=x$.

14.【解析】由题意，$\mu=40$，则$X\sim N(40,\ \sigma^2)$，由$P(30\leqslant X<50)=0.3$，可得$P(X>50)=0.35$，故累计时长超过 50 小时的人数大约有$0.35n$人.

15.【解析】已知焦点F_1，F_2的坐标分别为$(-c,0)$，$(c,0)$，其中$c=\sqrt{a^2+b^2}$. 根据对称性，不妨设点G在渐近线$y=\dfrac{b}{a}x$上，则直线F_2G的方程为$y=-\dfrac{a}{b}(x-c)$，与$y=\dfrac{b}{a}x$联立，得

$G\left(\dfrac{a^2}{c},\dfrac{ab}{c}\right)$，所以$k_1=\dfrac{\dfrac{ab}{c}}{\dfrac{a^2}{c}+c}=\dfrac{ab}{a^2+c^2}$，由$k_1k_2=-\dfrac{1}{3}$，

得$\dfrac{ab}{a^2+c^2}\cdot\left(-\dfrac{a}{b}\right)=-\dfrac{1}{3}$，化简得$c^2=2a^2$，故$\mathrm{e}=\sqrt{2}$.

16.【解析】由 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin C=\frac{3\sqrt{15}}{4}$，得 $\sin C=\frac{\sqrt{15}}{4}$，若角 C 为锐角，则 $\cos C=\frac{1}{4}$，

此时 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos C=10$，即 $AB=\sqrt{10}$，由于 $AB>BC>AC$，则 ΔABC 为锐角三角形，不符合题意.故 C 为钝角，此时 $\cos C=-\frac{1}{4}$，

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos C=16$，故 $AB=4$.在 ΔACD 中，由正弦定理得

$\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}$，同理，在 ΔABD 中，$\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$，而在 ΔABC 中，$\frac{AC}{\sin\angle ABD}=\frac{AB}{\sin\angle ACD}$，由于 $\angle CAD=\angle BAD$，故 $\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$，由于 $BC=3$,故 $CD=1$，

所以 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos C=6$，所以 $AD=\sqrt{6}$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：60 分.

17.（本小题满分 12 分）

【解析】（Ⅰ）$\because (n+1)a_n=\frac{na_{n-1}}{na_{n-1}+1}$，$\frac{1}{(1+1)a_1}=1$，

$$\therefore \frac{1}{(n+1)a_n}=\frac{na_{n-1}+1}{na_{n-1}}=\frac{1}{na_{n-1}}+1,$$

$$\therefore \frac{1}{(n+1)a_n}-\frac{1}{na_{n-1}}=1,$$

$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{1}{(n+1)a_n}\right\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列； …………… 6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知：$\frac{1}{(n+1)a_n}=n$，$\therefore a_n=\frac{1}{n(n+1)}$

$$(2n+1)a_n^2=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\therefore S_n=\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

所以$\dfrac{3}{4}\leqslant S_n<1$.　　　　　　　　　　　　　　　　……………12 分

18.（本小题满分 12 分）

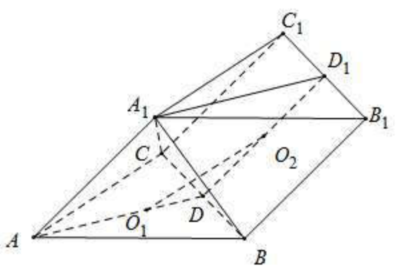
【解析】（Ⅰ）如图 1，取BC的中点D，B_1C_1的中点D_1，连接AD，A_1D_1，DD_1，根据棱柱的性质可得，$DD_1 \underline{\underline{//}} BB_1$，$AA_1 \underline{\underline{//}} BB_1$，所以$AA_1 \underline{\underline{//}} DD_1$，

所以四边形ADD_1A_1是平行四边形，

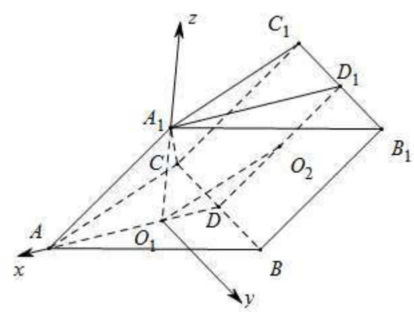
所以$O_1O_2\subset$平面ADD_1A_1.

因为O_1O_2与DD_1相交，

所以O_1O_2与AA_1相交.　　　　　　　　　　　　　　　　…………… 5 分



第 18 题解答图1



第 18 题解答图2

（Ⅱ）因为四面体A_1ABC是正四面体，O_1是$\triangle ABC$的中心，所以$A_1O_1\perp$平面ABC，$AO_1\perp BC$.

所以以O_1为坐标原点，$\overrightarrow{O_1A}$，$\overrightarrow{O_1A_1}$方向分别为x轴，z轴正方向，$|AB|$为单位长度，建立空间直角坐标系O_1-xyz.

易得$A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},0,0\right)$，$B\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6},\dfrac{1}{2},0\right)$，$C\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6},-\dfrac{1}{2},0\right)$，$A_1\left(0,0,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$B_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，

$C_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$O_2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

所以$\overrightarrow{A_1O_2}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0,-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$，$\overrightarrow{BC}=(0,-1,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{A_1O_2}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{A_1O_2}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$，故$\overrightarrow{A_1O_2}$是平面$BCC_1B_1$的法向量.

又 $\overrightarrow{A_1O_1}$ 是平面 ABC 的法向量，$\overrightarrow{A_1O_1}=\left(0,0,-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，设平面 BCC_1B_1 与平面 ABC 所成的锐二面角为 θ，则

$$\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{A_1O_2}\cdot\overrightarrow{A_1O_1}}{\left|\overrightarrow{A_1O_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1O_1}\right|}\right|=\frac{\dfrac{\sqrt{6}}{6}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$ …………… 12 分

19.（本小题满分 12 分）

【解析】（Ⅰ）小强同学前三道题都答对的概率 $P=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$. …………… 3 分

（II）X 可能取 6,7,9,10,11,14,16,17,18,19.随机变量 X 的分布列为

X	6	7	9	10	11	14	16	17	18	19
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{72}$

…………… 7 分

（III）小强同学能通过比赛的概率

$$P=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{17}{72}$$

…………… 12 分

注：答题得分情况如下

初始分	A		B		C		D		累计得分	能否通过比赛
	对错	得分 1 分	对错	得分 2 分	对错	得分 3 分	对错	得分 6 分		
10	√	11	√	13	√	16			16	能
10	√	11	√	13	×	11	√	17	17	能
10	√	11	√	13	×	11	×	9	9	否
10	√	11	×	9	√	12	√	18	18	能
10	√	11	×	9	√	12	×	10	10	否
10	√	11	×	9	×	7			7	否
10	×	8	√	10	√	13	√	19	19	能
10	×	8	√	10	√	13	×	11	11	否

10	×	8	√	10	×	8	√	14	14	能
10	×	8	√	10	×	8	×	6	6	否
10	×	8	×	6					6	否

20.（本小题满分 12 分）

【解析】(Ⅰ)设$|F_1F_2|=2c$，则△PF_1F_2的面积等于$\frac{1}{2}|F_1F_2||OP|=cb$，所以$cb=\sqrt{2}$. ①

由$\cos 2\angle OPF_2=\cos\angle F_1PF_2=-\frac{1}{3}$，即$2\cos^2\angle OPF_2-1=-\frac{1}{3}$，

得$\cos\angle OPF_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为在直角△OPF_2中，$|OP|=b$，$|OF_2|=c$，$|PF_2|=\sqrt{|OP|^2+|OF_2|^2}=\sqrt{b^2+c^2}=a$，所以

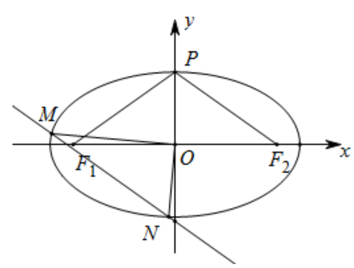
$\cos\angle OPF_2=\frac{b}{a}$，所以$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ②

由①②及$a^2=b^2+c^2$，得 $a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=\sqrt{2}$，

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.　　……………… 5 分

(Ⅱ) 因为直线PF_2的斜率为$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以可设直线l的方程为$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+m$，代入

$\frac{x^2}{3}+y^2=1$，整理得$\frac{5}{6}x^2-\sqrt{2}mx+m^2-1=0$.



由$\Delta=\left(\sqrt{2}m\right)^2-4\times\frac{5}{6}\left(m^2-1\right)>0$，得$m^2<\frac{5}{2}$.

设$M\left(x_1,-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+m\right)$，$N\left(x_2,-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+m\right)$，

则$x_1+x_2=\frac{6\sqrt{2}m}{5}$，$x_1x_2=\frac{6\left(m^2-1\right)}{5}$.

若以线段MN为直径的圆经过坐标原点O，则$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，即

$x_1x_2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+m\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+m\right)=0$，得$\frac{3}{2}x_1x_2-\frac{\sqrt{2}}{2}m(x_1+x_2)+m^2=0$，

所以$\frac{3}{2}\times\frac{6(m^2-1)}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}m\times\frac{6\sqrt{2}m}{5}+m^2=0$，得$m^2=\frac{9}{8}$.

因为$\frac{9}{8}<\frac{5}{2}$，所以$m=\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

所以存在满足条件的直线l，方程为$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{4}$或$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

…………… 12 分

21.（本小题满分 12 分）

【解析】（Ⅰ）当$a=1$，$b=0$时，$f(x)=x^2+x-\ln x$，

所以$f'(x)=2x+1-\frac{1}{x}=\frac{(2x-1)(x+1)}{x}$，$x>0$，

所以当$x>\frac{1}{2}$时，$f'(x)>0$；当$0<x<\frac{1}{2}$时，$f'(x)<0$，所以当且仅当$x=\frac{1}{2}$时，$f(x)$有最小值．因为$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+\ln 2$，$f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{4}=-\frac{1}{2}+\ln 2=\frac{1}{2}(\ln 4-1)>0$，

所以$f(x)>\frac{5}{4}$.　　…………… 5 分

（Ⅱ）解法 1：$f(x)\geqslant x^2$恒成立，即$x-\ln(ax+b)\geqslant 0$，且要求$ax+b>0$，

所以$\mathrm{e}^x-ax\geqslant b$，

①若$a<0$，对任意的实数b，当$x<0$且$x<\frac{1-b}{a}$时，由于$0<\mathrm{e}^x<1$，$ax+b>1$，

故不等式$\mathrm{e}^x-ax\geqslant b$不成立.

②若$a>0$，设$g(x)=\mathrm{e}^x-ax$，则$g'(x)=\mathrm{e}^x-a$.

当$x\in(-\infty,\ln a)$，$g'(x)<0$，当$x\in(\ln a,+\infty)$，$g'(x)>0$，

从而$g(x)=e^x-ax$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减，在$(\ln a,+\infty)$单调递增；

故$g(x)=\mathrm{e}^x-ax$有最小值$g(\ln a)=a-a\ln a$

因此$b\leqslant a-a\ln a$，所以$ab\leqslant a^2-a^2\ln a$.

设$h(a)=a^2-a^2\ln a$（$a>0$）则$h'(a)=a(1-2\ln a)$

所以$h(a)=a^2-a^2\ln a$在$\left(0,\ e^{\frac{1}{2}}\right)$上单调递增，在$\left(e^{\frac{1}{2}},+\infty\right)$上单调递减.

从而$h(a)=a^2-a^2\ln a$的最大值为$h\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=e-e\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{e}{2}$.

当$a=e^{\frac{1}{2}}$，$b=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}$时，取等号，故$ab$的最大值为$\frac{e}{2}$. ………… 12 分

解法 2：$f\left(x\right)\geqslant x^2$恒成立，即$x-\ln\left(ax+b\right)\geqslant 0$恒成立.

若$a<0$，对任意的实数b，当$x<0$且$x<\frac{1-b}{a}$时，$\ln\left(ax+b\right)>0$，不等式$x-\ln\left(ax+b\right)\geqslant 0$不成立，所以$a>0$.

令$g(x)=x-\ln\left(ax+b\right)$，则$g'\left(x\right)=1-\frac{a}{ax+b}=\frac{a}{ax+b}\left(x-\frac{a-b}{a}\right)$，由于$ax+b>0$，

当$-\frac{b}{a}<x<\frac{a-b}{a}$时，$g'(x)<0$，当$x>\frac{a-b}{a}$时，$g'(x)>0$，所以$g(x)=x-\ln\left(ax+b\right)$在$\left(-\frac{b}{a},+\infty\right)$上有最小值，最小值为$g\left(\frac{a-b}{a}\right)=\frac{a-b}{a}-\ln a$.

由$x-\ln\left(ax+b\right)\geqslant 0$恒成立，得$g\left(\frac{a-b}{a}\right)=\frac{a-b}{a}-\ln a\geqslant 0$，

所以$b\leqslant a-a\ln a$（以下同解法一）

解法 3：$f(x)\geqslant x^2$恒成立，即$x-\ln\left(ax+b\right)\geqslant 0$，从而$e^x\geqslant ax+b$，曲线$y=e^x$不在直线$y=ax+b$的下方.

设与直线$y=ax+b$平行且与曲线$y=e^x$相切的直线与曲线$y=e^x$相切的切点为$\left(x_0,\ e^{x_0}\right)$，则该切线方程为$y=e^{x_0}\left(x-x_0\right)+e^{x_0}$，所以$a=e^{x_0}$.

要使曲线$y=e^x$不在直线$y=ax+b$的下方，必须$b\leqslant -x_0e^{x_0}+e^{x_0}$

因为$a=e^{x_0}>0$，所以$ab\leqslant e^{x_0}\left(-x_0e^{x_0}+e^{x_0}\right)=e^{2x_0}\left(1-x_0\right)$，

令 $g(x)=e^{2x}(1-x)$，则 $g'(x)=e^{2x}(1-2x)$，所以函数 $g(x)$ 在（$-\infty,\frac{1}{2}$）上单调递增，在（$\frac{1}{2},+\infty$）上单调递减，所以$\left[g(x)\right]_{\min}=g(\frac{1}{2})=\frac{e}{2}$，即$ab\leqslant\frac{e}{2}$

故ab的最大值为$\frac{e}{2}$.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修 4—4：坐标系与参数方程］（本小题满分 10 分）

【解析】（Ⅰ）曲线C_1的普通方程为$x^2+y^2=r^2(r>0)$，

曲线C_2的普通方程为$x^2+\left(y-4\right)^2=1$

若C_1与C_2有公共点，则$|\ r-1\ |\leqslant\sqrt{\left(0-0\right)^2+\left(4-0\right)^2}\leqslant r+1$，所以$3\leqslant r\leqslant 5$.

…………… 5 分

（Ⅱ）设$P\left(\cos\alpha,\sin\alpha\right)$，由$\left|PQ\right|^2=\left|PC_2\right|^2-\left|C_2Q\right|^2=\left|PC_2\right|^2-1$，

得$\left|PQ\right|^2=\cos^2\alpha+\left(\sin\alpha-4\right)^2-1=16-8\sin\alpha\geqslant 16-8=8$.

当且仅当$\sin\alpha=1$时取最大值，故$\left|PQ\right|$的最小值为$2\sqrt{2}$. …………… 10 分

23. [选修 4- 5：不等式选讲]（本小题满分 10 分）

【解析】（Ⅰ）由$\left|3x+1\right|+\left|x-2\right|>5$得

$\begin{cases}x<-\frac{1}{3}\\-3x-1-x+2>5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-\frac{1}{3}\leqslant x<2\\3x+1-x+2>5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 2\\3x+1+x-2>5\end{cases}$，

解得$x<-1$或$1<x<2$或$x\geqslant 2$.

故不等式$f\left(x\right)>5$的解集为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. …………5 分

（Ⅱ）由题意知，当$x\in\left[0,3\right]$时，$\left|3x+1\right|+\left|x-2\right|\geqslant x^2+m$恒成立.

若$0\leqslant x<2$，则$3x+1+2-x\geqslant x^2+m$，$m\leqslant\left(-x^2+2x+3\right)_{\min}=3$. …………7 分

若$2\leqslant x\leqslant 3$，则$3x+1+x-2\geqslant x^2+m$，$m\leqslant\left(-x^2+4x-1\right)_{\min}=2$.

综上可知，实数m的取值范围是$(-\infty,2]$. …………10 分