

姓名

准考证号

2021年大连市高三第一次模拟考试

数学

命题人: 何艳国、姜玉小、赵文莲

审校人: 赵文莲

注意事项:

1. 请在答题纸上作答, 在试卷上作答无效。
2. 本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分, 共150分, 考试时间120分钟。

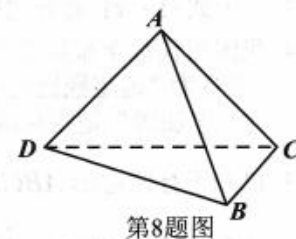
第I卷

一、选择题: 本题共8小题, 每小题5分, 共40分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x < 0\}$, $B = \{x | x < 2\}$, 则 $A \cup B =$
 - A. $(0, 2)$
 - B. $(-2, 4)$
 - C. $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$
 - D. $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
2. 已知复数 $z = \frac{2i}{1+i}$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$
 - A. 1
 - B. $\sqrt{2}$
 - C. 2
 - D. $2\sqrt{2}$
3. 已知两条不重合的直线 m 、 n 和平面 α , 则 $m \parallel n$ 的一个充分不必要条件是
 - A. $m \not\subset \alpha, n \subset \alpha$
 - B. $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$
 - C. $m \perp \alpha, n \perp \alpha$
 - D. $m \parallel \alpha, n \subset \alpha$
4. 熵的概念是由德国物理学家克劳修斯于1865年所提出, 它用来表示任何一种能量在空间中分布的均匀程度, 能量分布得越均匀, 熵就越大. 它在控制论、概率论、天体物理、生命科学等领域都有重要应用. 在数学中, 利用熵可以解决如下问题: 有 n 个互不相等的数, 需要比较 $\lceil (\log_2 n!) \rceil$ 次 ($n!$ 表示 n 的阶乘; $\lceil x \rceil$ 表示的是向上取整函数, 如 $\lceil 2.1 \rceil = 3$) 就可以将这些数从小到大排序. 现有6个互不相等的数, 将这些数从小到大排序, 需要比较的次数为
 - A. 8
 - B. 9
 - C. 10
 - D. 11
5. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点到它的一条渐近线的距离是 $3\sqrt{3}$, 则 C 的离心率为
 - A. 2
 - B. $\sqrt{3}$
 - C. $\frac{4}{3}$
 - D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
6. 我国中医药选出的“三药三方”对治疗新冠肺炎均有显著效果, 功不可没. “三药”分别为金花清感颗粒、连花清瘟胶囊、血必清注射液; “三方”分别为清肺排毒汤、化湿败毒方、宣肺败毒方. 若某医生从“三药三方”中随机选出两种, 事件 A 表示选出的两种中有一药, 事件 B 表示选出的两种中有一方, 则 $P(B|A) =$
 - A. $\frac{1}{5}$
 - B. $\frac{3}{10}$
 - C. $\frac{3}{5}$
 - D. $\frac{3}{4}$

7. 已知函数 $f(x) = 2\sin(x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ 处的切线与直线 $\sqrt{3}x - 3y + 1 = 0$ 互相垂直, 则函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到图象的解析式是
 - A. $y = 2\cos(x - \frac{\pi}{3})$
 - B. $y = 2\cos x$
 - C. $y = 2\cos(x + \frac{\pi}{6})$
 - D. $y = 2\cos(x + \frac{\pi}{3})$

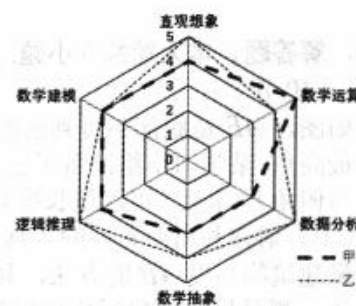
8. 如图所示, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 平面 $ACD \perp$ 平面 BCD , $\triangle ACD$ 是以 CD 为斜边的等腰直角三角形, $AB \perp BC$, $AC = 2CB = 4$, 则该三棱锥的外接球的表面积为
 - A. 32π
 - B. 40π
 - C. $\frac{40\sqrt{10}}{3}\pi$
 - D. $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$



第8题图

二、选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分。

9. 《高中数学课程标准》(2017版) 给出了数学学科的六大核心素养, 为了比较甲乙两名高中学生的数学核心素养水平, 现以六大素养为指标对二人进行了测验, 根据测验结果绘制了雷达图, 图中每项指标值满分为5分, 分值高者为优, 则下列说法正确的是
 - A. 甲的数学运算素养优于乙的数学运算素养
 - B. 甲的逻辑推理素养优于乙的逻辑推理素养
 - C. 甲的六个核心素养中只有数学运算水平最高
 - D. 乙的六个核心素养中只有数据分析水平最高



10. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $4a + b = ab$, 则
 - A. $ab \geq 16$
 - B. $2a + b \geq 6 + 4\sqrt{2}$
 - C. $a - b < 0$
 - D. $\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} \geq \frac{1}{2}$
11. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的准线方程为 $y = -2$, 焦点为 F , O 为坐标原点, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是 C 上两点, 则下列说法正确的是
 - A. 点 F 的坐标为 $(0, 2)$
 - B. 若 $|AB| = 16$, 则 AB 的中点到 x 轴距离的最小值为8
 - C. 若直线 AB 过点 $(0, 4)$, 则以 AB 为直径的圆过点 O
 - D. 若直线 OA 与 OB 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$, 则直线 AB 过点 F
12. 已知函数 $f(x) = \lg(\sqrt{x^2 - 2x + 2} - x + 1)$, $g(x) = \frac{2^x + 6}{2^x + 2}$, 则下列说法正确的是
 - A. $f(x)$ 是奇函数

B. $g(x)$ 的图象关于点 $(1, 2)$ 对称

C. 若函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 在 $x \in [1-m, 1+m]$ 上的最大值、最小值分别为 M, N , 则 $M+N=4$

D. 令 $F(x) = f(x) + g(x)$, 若 $F(a) + F(-2a+1) > 4$, 则实数 a 的取值范围是 $(-1, +\infty)$

第 II 卷

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 二项式 $(1+x)^5$ 展开式中含 x^2 项的系数为_____。

14. 我国明代数学家吴敬所著的《九章算术比类大全》中，有一道数学名题叫“宝塔装灯”，内容为“远望巍巍塔七层，红灯点点倍加增；共灯三百八十一，请问顶层几盏灯？”（“倍加增”是指从塔的顶层到底层），则宝塔的顶层有_____盏灯。

15. 已知平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=3$, $AD=4$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, 平面内有动点 E , 满足 $|ED| = 2|EC|$, 则 $(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) \cdot \overrightarrow{AE}$ 的取值范围为_____。

16. $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若该三角形的面积为 $\sqrt{5}$, 且 $\sin(A-B) = (3-4\cos A)\sin B$, 则 c 的最小值为_____。

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

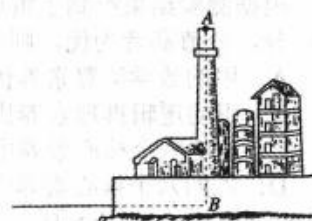
17. (10 分)

如图， AB 是底部不可到达的一个建筑物， A 为建筑物的最高点。某学习小组准备了三种工具：测角仪（可测量仰角与俯角）、米尺（可测量长度）、量角器（可测量平面角度）。

(I) 请你利用准备好的工具（可不全使用），设计一种测量建筑物高度 AB 的方法，并给出测量报告；

注：测量报告中包括你使用的工具，测量方法的文字说明与图形说明，所使用的字母和符号均需要解释说明，并给出你最后的计算公式。

(II) 该学习小组利用你的测量方案进行了实地测量，并将计算结果汇报给老师，发现计算结果与该建筑物实际的高度有误差，请你针对误差情况进行说明。



第17题图

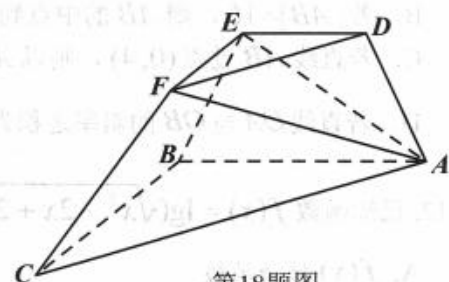
18. (12 分)

如图，在三棱台 $ABC-DEF$ 中，平面 $ABED \perp$ 平面 $BCFE$, $BA \perp BC$,

$BC=3$, $BE=DE=DA=\frac{1}{2}AB=1$.

(I) 求证: $AE \perp$ 平面 $BCFE$;

(II) 求直线 DF 与平面 AEF 成角的正弦值。



第18题图

19. (12 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 前 n 项之和为 S_n , 满足 $4S_n = (a_n + 1)^2$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{S_n}$, 其前项和为 T_n , 证明: $T_n < \frac{61}{36}$.

20. (12 分)

一款游戏规则如下：掷一枚质地均匀的硬币，若出现正面向前跳 2 步，若出现反面向前跳 1 步。

(I) 若甲乙二人同时参与游戏，每人各掷硬币 2 次，

① 求甲向前跳的步数大于乙向前跳的步数的概率；

② 记甲乙二人向前跳的步数和为 X , 求随机变量 X 的分布列和数学期望。

(II) 若某人掷硬币若干次，向前跳的步数为 $n(n \in \mathbb{N}^*)$ 的概率记为 p_n , 求 p_n 的最大值。

21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $P(1, \frac{3}{2})$ 在 C 上,

且 $PF_2 \perp F_2F_1$.

(I) 求 C 的标准方程;

(II) 设 C 的左右顶点分别为 A, B , O 为坐标原点, 直线 l 过右焦点 F_2 且不与坐标轴垂直, l 与 C 交于 M, N 两点, 直线 AM 与直线 BN 相交于点 Q , 证明点 Q 在定直线上.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x - ax + a, a \in \mathbb{R}$.

(I) 求 $f(x)$ 的极值点;

(II) 若 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{x+m+1}{e^{x-1}} - \frac{1}{4}x^2 + x$, 证明: 对任意 $m \in (-\infty, -1]$,

$x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 \neq x_2$, 有 $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 1$.