

2021 年大连市高三第一次模拟考试
数学参考答案

一、选择题

1. B 2. B 3. C 4. C 5. A 6. D 7. A 8. B

二、选择题

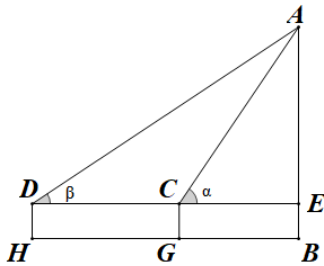
9. AC 10. ABD 11. AD 12. BCD

三、填空题

13. 10 14. 3 15. [12, 24] 16. $\sqrt{10}$

四、解答题

17. 解: (I) 选用测角仪和米尺, 如图所示



.....2 分

(1) 选择一条水平基线 HG (图 1), 使 H, G, B 三点在同一条直线上4 分

(2) 在 H, G 两点用测角仪测得 A 的仰角分别为 $\alpha, \beta, CD = a,$

测得测角仪器的高是 h

.....6 分

(3) 经计算得建筑物 $AB = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} + h$ (也可以为 $\frac{a \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} + h$)8 分

(II) (1) 测量工具问题

(2) 两次测量时位置的间距差

(3) 用身高代替测角仪的高度

.....10 分

注: 如果有其它的合理测量方法, 相应给分; 第二问中, 写出以上三种原因中之一即可.

18. (I) 证明: 在三棱台 $ABC - DEF$ 中, $DE \parallel AB,$

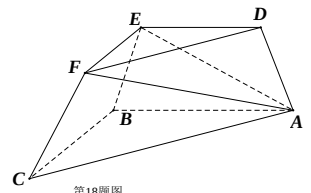
因为 $BE = AD$

所以四边形 $ABED$ 为等腰梯形

因为 $BE = DE = 1, AB = 2$

所以可得 $\angle ABE = \frac{\pi}{3}$

.....2 分



第18题图

在 $\triangle ABE$ 中，由余弦定理可得 $AE = \sqrt{3}$ ，所以 $BE^2 + AE^2 = AB^2$
 所以 $AE \perp BE$ 4 分

因为平面 $ABED \perp$ 平面 $BCFE$ 且平面 $ABED \cap$ 平面 $BCFE = BE$ ，
 $AE \subset$ 平面 $ABED$
 所以 $AE \perp$ 平面 $BEFC$ 6 分

(II) 法一：由(I)可知 $AE \perp$ 平面 $BEFC$ ，因为 $BC \subset$ 平面 $BCFE$
 所以 $AE \perp BC$ ，又 $BA \perp BC$ ，且 $AE, BC \subset$ 平面 $ABED$
 $BC \perp$ 平面 $ABED$ ，又 $BC \subset$ 平面 ABC
 所以平面 $ABC \perp$ 平面 $ABED$
 在平面 $ABED$ 内过 B 作 $BH \perp BA$
 则 $BH \perp$ 平面 ABC 8 分
 以 B 为坐标原点， BC, BA, BH 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系

由题意可得 $A(0, 2, 0), E(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), B(0, 0, 0), C(3, 0, 0), D(0, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

因为 $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = (\frac{3}{2}, 0, 0)$ 所以 $F(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

所以 $\overrightarrow{DF} = (\frac{3}{2}, -1, 0), \overrightarrow{AF} = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

设平面 AEF 一个法向量为 $\mathbf{n} = (x_0, y_0, z_0)$

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}x_0 = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}x_0 - \frac{3}{2}y_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_0 = 0 \end{cases},$$

$$\text{所以} \begin{cases} x_0 = 0 \\ 3x_0 - 3y_0 + \sqrt{3}z_0 = 0 \end{cases}$$

取 $y_0 = 1$ ，则得 $z_0 = \sqrt{3}$

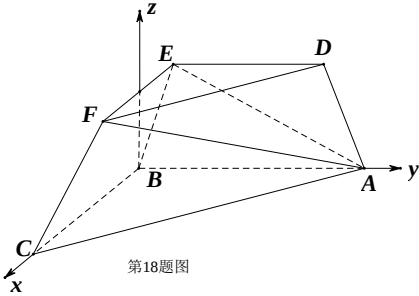
所以 $\mathbf{n} = (0, 1, \sqrt{3})$ 10 分

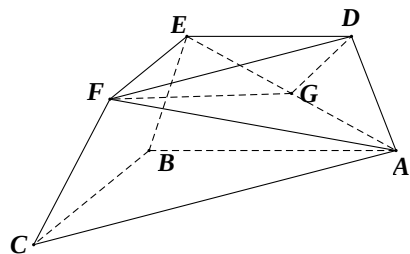
设直线 DF 与平面 AEF 成角为 θ

$$\text{则} \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{DF}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{DF} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{DF}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{|-1|}{\frac{\sqrt{13}}{2} \times 2} = \frac{\sqrt{13}}{13}$$

直线 DF 与平面 AEF 成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$12 分

法二：由(1)可知 $BC \perp$ 平面 $ABED$





第18题图

因为 $EF \parallel BC$ ，所以 $EF \perp$ 平面 $ABED$

又 $EF \subset$ 平面 AEF

所以平面 $AEF \perp$ 平面 $ABED$

过 D 作 $DG \perp AE$ ，垂足为 G ，连接 GF

又平面 $AEF \cap$ 平面 $ABED = AE$

所以 $DG \perp$ 平面 AEF

所以 DF 在平面 AEF 内的射影为 GF

所以 $\angle DFG$ 为直线 DF 与平面 AEF 所成的角

.....10 分

在 $\triangle ADE$ 中， $DG = DE \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ，又 $FD = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{13}}{2}$

在 $Rt\triangle DGF$ 中， $\sin \angle DFG = \frac{DG}{DF} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$

直线 DF 与平面 AEF 成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$ 。

.....12 分

19. 证明：(I) 因为 $4S_n = (a_n + 1)^2$ ①，所以当 $n \geq 2$ 时，有 $4S_{n-1} = (a_{n-1} + 1)^2$ ②

所以①-②，得 $(a_n - 1)^2 = (a_{n-1} + 1)^2$

.....2 分

所以有 $a_n - a_{n-1} = 2$ 或 $a_n + a_{n-1} = 0$

又因为 $\{a_n\}$ 是正项数列

所以 $a_n - a_{n-1} = 2$

所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列

.....4 分

又因为 $n=1$ 时，有 $4a_1 = (a_1 + 1)^2$ ，解得 $a_1 = 1$

所以 $a_n = 2n - 1$

.....6 分

(II) 法一：

由 (I) 可得 $S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$

.....7 分

所以 $b_n = \frac{1}{n^2}$ 所以 $T_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

当 $n=1$ 时， $T_1 = 1 < \frac{61}{36}$ ，当 $n=2$ 时， $T_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < \frac{61}{36}$ ，

当 $n=3$ 时， $T_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36} < \frac{61}{36}$

.....9 分

当 $n \geq 4$ 时，因为 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} (n \geq 2)$

所以 $T_n < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{61}{36} - \frac{1}{n} < \frac{61}{36}$

综上对任意 $n \in N^*$ ，有 $T_n < \frac{61}{36}$ 12 分

法二：

由（I）可得 $S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$ 7 分

所以 $b_n = \frac{1}{n^2}$ 所以 $T_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

当 $n=1$ 时， $T_1 = 1 < \frac{61}{36}$ ，当 $n=2$ 时， $T_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < \frac{61}{36}$ ，9 分

当 $n \geq 3$ 时，因为 $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) (n \geq 2)$

所以 $T_n < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$
 $= \frac{5}{3} - \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}) < \frac{5}{3} < \frac{61}{36}$

综上对任意 $n \in N^*$ ，有 $T_n < \frac{61}{36}$ 12 分

20. 解（I）①设甲向前跳的步数为Y，乙向前跳的步数为Z

所以 $p(Y=2) = p(Z=2) = \frac{1}{4}$

$p(Y=3) = p(Z=3) = \frac{1}{2}$

$p(Y=4) = p(Z=4) = \frac{1}{4}$

所以 $p(Y > Z) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{5}{16}$ 3 分

②由①知 X 的所有可能取值为 4,5,6,7,8

所以 $p(X=4) = \frac{1}{16}$ ， $p(X=5) = \frac{1}{4}$ ， $p(X=6) = \frac{3}{8}$ ， $p(X=7) = \frac{1}{4}$ ， $p(X=8) = \frac{1}{16}$

所以 X 的分布列为

X	4	5	6	7	8
p	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

.....5 分

所以 X 的数学期望 $E(X) = 4 \times \frac{1}{16} + 5 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{3}{8} + 7 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{16} = 6 \dots\dots\dots 6$
分

(II) 法一由题知 $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{3}{4}$

当 $n \geq 3$ 时, $p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{2} p_{n-2} \dots\dots\dots 8$ 分

$$p_n - p_{n-1} = -\frac{1}{2}(p_{n-1} - p_{n-2}) = \frac{1}{4}(p_{n-2} - p_{n-3}) = \dots = (-\frac{1}{2})^{n-2}(p_2 - p_1) = (-\frac{1}{2})^n$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } p_n &= p_{n-1} + (-\frac{1}{2})^n \\ &= p_{n-2} + (-\frac{1}{2})^n + (-\frac{1}{2})^{n-1} = \dots = p_2 + (-\frac{1}{2})^n + (-\frac{1}{2})^{n-1} + \dots + (-\frac{1}{2})^3 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } p_n = \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n + \frac{2}{3} \quad (n \geq 3)$$

$$\text{因为 } p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{3}{4}$$

$$\text{所以 } p_n = \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n + \frac{2}{3} \dots\dots\dots 11$$
 分

当 n 为奇数时 $p_n < \frac{2}{3}$, 当 n 为偶数时 $p_n > \frac{2}{3}$ 且数列 $\{p_n\}$ 为递减数列

$$\text{所以 } p_n \text{ 的最大值为 } p_2 = \frac{3}{4} \dots\dots\dots 12$$
 分

$$\text{法二 由题知 } p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{3}{4}$$

$$\text{当 } n \geq 3 \text{ 时, } p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{2} p_{n-2} \dots\dots\dots 8$$
 分

$$p_n - p_{n-1} = -\frac{1}{2}(p_{n-1} - p_{n-2}), \text{ 所以 } \frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1} - p_{n-2}} = -\frac{1}{2}$$

所以 $\{p_n - p_{n-1}\}$ 是首项为 $\frac{1}{4}$, 公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列

$$\text{所以 } p_n - p_{n-1} = (-\frac{1}{2})^n,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } p_n &= (p_n - p_{n-1}) + (p_{n-1} - p_{n-2}) + \dots + (p_2 - p_1) + p_1 \\ &= (-\frac{1}{2})^n + (-\frac{1}{2})^{n-1} + \dots + (-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}[1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}]}{1 - (-\frac{1}{2})} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n + \frac{2}{3} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

当 n 为奇数时 $p_n < \frac{2}{3}$, 当 n 为偶数时 $p_n > \frac{2}{3}$ 且数列 $\{p_n\}$ 为递减数列

所以 p_n 的最大值为 $p_2 = \frac{3}{4}$ \dots\dots\dots 12 \text{ 分}

21 解: (I) 方法一: 设半焦距为 c , 因为 $PF_2 \perp F_2F_1$, 所以 $c=1$

所以 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$

所以 $|PF_1| + |PF_2| = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$ \dots\dots\dots 2 \text{ 分}

所以 $2a=4$, $a=2$

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ \dots\dots\dots 4 \text{ 分}

方法二: 设半焦距为 c , 因为 $PF_2 \perp F_2F_1$, 所以 $c=1$

由题意得 $\begin{cases} a^2 = b^2 + 1 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \end{cases}$, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}

解得 $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 3 \end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}

解 (II) 方法一: 设直线 $l: y=k(x-1)$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, $Q(x_0, y_0)$

由题知 $A(-2,0), B(2,0)$

联立 $\begin{cases} y = k(x-1) \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}$, 消 y 整理得 $(3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$

所以 $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2} \\ x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2} \end{cases}$ \dots\dots\dots 6 \text{ 分}

由 A, M, Q 三点共线可得 $\frac{y_0}{x_0+2} = \frac{y_1}{x_1+2}$

由 B, N, Q 三点共线可得 $\frac{y_0}{x_0-2} = \frac{y_2}{x_2-2}$

所以 $\frac{(x_0-2)^2}{(x_0+2)^2} = \frac{y_1^2(x_2-2)^2}{y_2^2(x_1+2)^2}$

因为 $y_1^2 = \frac{3}{4}(4-x_1^2), y_2^2 = \frac{3}{4}(4-x_2^2)$

所以 $\frac{(x_0-2)^2}{(x_0+2)^2} = \frac{(2-x_1)(2-x_2)}{(2+x_1)(2+x_2)} = \frac{4-2(x_1+x_2)+x_1x_2}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}$ 9 分

所以 $\frac{(x_0-2)^2}{(x_0+2)^2} = \frac{4 - \frac{16k^2}{3+4k^2} + \frac{4k^2-12}{3+4k^2}}{4 + \frac{16k^2}{3+4k^2} + \frac{4k^2-12}{3+4k^2}} = \frac{1}{9}$

由题可知 $x_0 > 2$ 所以 $\frac{x_0-2}{x_0+2} = \frac{1}{3}$

解得 $x_0 = 4$ 11 分

所以点 Q 在直线 $x = 4$ 上12 分

方法二:

设直线 $l: x = ty + 1, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), Q(x_0, y_0)$

由题知 $A(-2, 0), B(2, 0)$

联立 $\begin{cases} x = ty + 1 \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}$, 消 x 整理得 $(3t^2 + 4)y^2 + 6ty - 9 = 0$

所以 $\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-6t}{3t^2 + 4} \\ y_1 y_2 = \frac{-9}{3t^2 + 4} \end{cases}$ 6 分

所以有 $y_1 y_2 = \frac{3}{2t}(y_1 + y_2)$

由 A, M, Q 三点共线可得 $\frac{y_0}{x_0+2} = \frac{y_1}{x_1+2}$

由 B, N, Q 三点共线可得 $\frac{y_0}{x_0-2} = \frac{y_2}{x_2-2}$ 8 分

所以 $\frac{x_0-2}{x_0+2} = \frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)} = \frac{y_1(ty_2-1)}{y_2(ty_1+3)} = \frac{ty_1y_2-y_1}{ty_1y_2+3y_2}$

因为 $y_1 y_2 = \frac{3}{2t}(y_1 + y_2)$

$$\text{所以 } \frac{x_0 - 2}{x_0 + 2} = \frac{\frac{3}{2}(y_1 + y_2) - y_1}{\frac{3}{2}(y_1 + y_2) + 3y_2} = \frac{1}{3} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

解得 $x_0 = 4$ \dots\dots\dots 11 分

所以点 Q 在直线 $x = 4$ 上 \dots\dots\dots 12 分

22. (I) 解: 因为 $f(x) = x \ln x - ax + a$ ($x > 0$)

所以 $f'(x) = \ln x + 1 - a$

由 $f'(x) > 0$ 得 $x > e^{a-1}$

由 $f'(x) < 0$ 得 $0 < x < e^{a-1}$

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, e^{a-1})$, 单调递增区间为 $(e^{a-1}, +\infty)$ \dots\dots\dots 2 分

所以函数 $f(x)$ 有极小值点 $x = e^{a-1}$, 无极大值点 \dots\dots\dots 4 分

(II) 证法一:

证明: 由 (1) 可知当 $a = 1$ 时, $f(x) \geq 0$

所以 $x \ln x \geq x - 1$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号 \dots\dots\dots 5 分

$$\text{又因为 } x - 1 - \frac{x - 1}{e^{x-1}} = \frac{(x - 1)(e^{x-1} - 1)}{e^{x-1}}$$

当 $0 < x < 1$ 时 $x - 1 < 0, e^{x-1} - 1 < 0$, 所以 $\frac{(x - 1)(e^{x-1} - 1)}{e^{x-1}} > 0$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } \frac{(x - 1)(e^{x-1} - 1)}{e^{x-1}} = 0$$

当 $x > 1$ 时, $x - 1 > 0, e^{x-1} - 1 > 0$, 所以 $\frac{(x - 1)(e^{x-1} - 1)}{e^{x-1}} > 0$

所以 $x > 0$ 时 $x - 1 \geq \frac{x - 1}{e^{x-1}}$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号

所以 $x \ln x \geq \frac{x - 1}{e^{x-1}}$ 成立, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号 \dots\dots\dots 7 分

$$\text{令 } h(x) = g(x) - x, \text{ 则 } h'(x) = x \ln x - \frac{x + m}{e^{x-1}}$$

因为 $m \leq -1$ 所以 $\frac{x - 1}{e^{x-1}} \geq \frac{x + m}{e^{x-1}}$ 所以 $h'(x) \geq 0$

因为函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的任意子区间内不恒为零

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数 \dots\dots\dots 10 分

不妨设 $x_1 > x_2 > 0$

则 $h(x_1) > h(x_2)$

所以 $g(x_1) - x_1 > g(x_2) - x_2$

所以 $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 1$ 12 分

证法二：证明：不妨设 $x_1 > x_2 > 0$

若证 $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 1$ 成立

只需证 $g(x_1) - x_1 > g(x_2) - x_2$ 成立

令 $h(x) = g(x) - x$

即证 $h(x_1) > h(x_2)$ 5 分

只需证 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数

因为函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的任意子区间内不恒为零

所以只需证 $h'(x) \geq 0$

由题有 $h'(x) = x \ln x - \frac{x+m}{e^{x-1}}$

即证 $x \ln x \geq \frac{x+m}{e^{x-1}}$ 7 分

因为 $m \leq -1$

只需证 $x \ln x \geq \frac{x-1}{e^{x-1}}$ 8 分

由 (1) 可知当 $a=1$ 时, $f(x) \geq 0$

所以 $x \ln x \geq x-1$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号10 分

又因为 $x-1 - \frac{x-1}{e^{x-1}} = \frac{(x-1)(e^{x-1}-1)}{e^{x-1}}$

当 $0 < x < 1$ 时 $x-1 < 0, e^{x-1}-1 < 0$, 所以 $\frac{(x-1)(e^{x-1}-1)}{e^{x-1}} > 0$

当 $x=1$ 时, $\frac{(x-1)(e^{x-1}-1)}{e^{x-1}} = 0$

当 $x > 1$ 时, $x-1 > 0, e^{x-1}-1 > 0$, 所以 $\frac{(x-1)(e^{x-1}-1)}{e^{x-1}} > 0$

所以 $x > 0$ 时 $x-1 \geq \frac{x-1}{e^{x-1}}$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号

所以 $x \ln x \geq \frac{x-1}{e^{x-1}}$ 成立, 当且仅当 $x=1$ 时取等号

所以 $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 1$ 成立.12 分