

## 2021 年北京大学强基计划笔试数学试题回忆版



本试卷共 20 题，每一道题均为单选题，下为回忆版，部分题目条件可能与实际考试有所出入，仅供参考。

1. 已知  $O$  为  $\triangle ABC$  的外心， $AB$ 、 $AC$  与  $\triangle OBC$  的外接圆交于  $D$ 、 $E$ 。若  $DE = OA$ ，则  $\angle OBC =$  \_\_\_\_\_。

答案：  $\frac{\pi}{4}$

解：

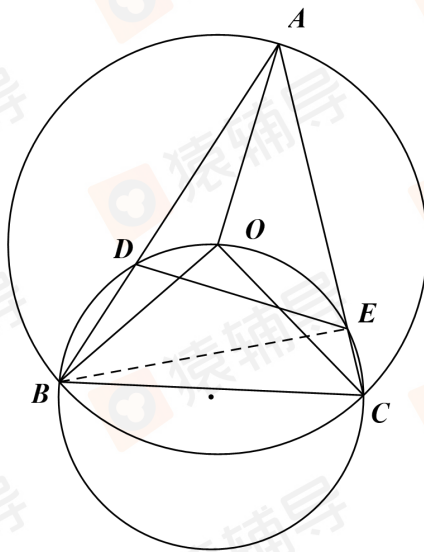


图 1: 第 1 题图

如图 1 所示，联结  $BE$ 。

因为  $DE = OC$ ，在  $\triangle OBC$  外接圆中， $\angle DBE = \angle OBC$ ，进而可得  $\angle DBO = \angle EBC$ 。

另外在  $\odot O$  中， $\angle AOB = 2\angle ACB$ 。

以及  $\angle AOB + 2\angle OBD = 180^\circ$ 。

即  $2\angle BCE + 2\angle EBC = 180^\circ$ .

即  $\triangle EBC$  为直角三角形, 且  $BC$  为直角边,  $BC$  为第二个圆的直径.

所以  $\angle OBC = \frac{\pi}{4}$ .  $\square$

2. 方程  $y^3 + f^4 = d^5$  的正整数解  $(y, f, d)$  的组数为 \_\_\_\_\_.

答案: 无穷

解: 考虑到  $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ , 取  $n \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $n \equiv -1 \pmod{5}$  即可.

例如取  $n = 60k + 24$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

此时  $(2^{20k+8})^3 + (2^{15k+6})^4 = (2^{12k+5})^5$ .  $\square$

3. 若实数  $a, b, c, d$  满足  $ab + bc + cd + da = 1$ , 则  $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2$  的最小值为 \_\_\_\_\_.

答案: 2

解: 因式分解可得  $(a + c)(b + d) = 1$ .

根据柯西不等式可得  $(a^2 + 3c^2) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \geq (a + c)^2$ , 即  $a^2 + 3c^2 \geq \frac{3}{4}(a + c)^2$ .

同样地,  $(2b^2 + 4d^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \geq (b + d)^2$ , 即  $2b^2 + 4d^2 \geq \frac{4}{3}(b + d)^2$ .

因此  $a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 \geq \frac{3}{4}(a + c)^2 + \frac{4}{3}(b + d)^2 \geq 2(a + c)(b + d) = 2$ .

等号成立条件为  $a : b : c : d = 3 : 2 : 1 : 1$ , 其中  $c = d = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ .  $\square$

4. 已知  $Y = \sum_{i=0}^{2021} \left\lfloor \frac{2^i}{7} \right\rfloor$ , 则  $Y$  的个位数字是 \_\_\_\_\_.

答案: 5

解: 由  $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ , 可知  $2^i$  模 7 是三循环的,

$2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $2^{3k+1} \equiv 2 \pmod{7}$ ,  $2^{3k+2} \equiv 4 \pmod{7}$ , 其中  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{i=0}^{2021} \left\lfloor \frac{2^i}{7} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{2021} \frac{2^i}{7} - \frac{2022}{3} \left( \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7} \right) = \frac{2^{2022} - 1}{7} - 674 \\ &= \frac{(2^3 - 1)(1 + 2^3 + 2^6 + \cdots + 2^{2019})}{7} - 674 = 1 + 2^3 + 2^6 + \cdots + 2^{2019} - 674. \end{aligned}$$

结合  $8^{4k} \equiv 6 \pmod{10}$ ,  $8^{4k+1} \equiv 8 \pmod{10}$ ,  $8^{4k+2} \equiv 4 \pmod{10}$ ,  $8^{4k+3} \equiv 2 \pmod{10}$  (其中  $k \in \mathbb{N}$ ), 可知

$Y \equiv 1 + 168(8 + 4 + 2 + 6) + 8 - 674 \equiv 5 \pmod{10}$ .  $\square$

5. 若平面上有 100 条二次曲线, 则这些曲线可以把平面分成若干个连通区域, 则连通区域数量最大值为\_\_\_\_\_.

答案: 20101

解: 从第  $k$  个二次曲线开始计算, 新增加一个二次曲线变成  $k+1$  条的情形, 这条二次曲线与原来每一个二次曲线最多有 4 个交点, 相当于最多新增加  $4k$  个交点.

- (1) 如果是椭圆或者圆, 被分成  $4k$  段圆弧, 相当于增加连通区域最多  $4k$  个;
- (2) 如果是抛物线, 被分成  $4k+1$  段曲线, 相当于最多增加连通区域  $4k+1$  个;
- (3) 如果是双曲线, 被分成  $4k+2$  段曲线, 相当于最多增加连通区域  $4k+2$  个;
- (4) 如果是两条直线, 明显相交直线更优, 相当于依次加入两条直线, 最多增加连通区域  $4k+3$  个.

如果包括二次曲线的退化情形, 例如两条相交直线, 则从第一个曲线开始, 每次均引入相交直线, 答案为  $4 + (4 \times 1 + 3) + (4 \times 2 + 3) + \cdots + (4 \times 99 + 3) = 20101$ . 选取 200 条直线两两相交, 但交点不重合的情形均可.  $\square$

【注】 如果二次曲线只计算圆, 椭圆, 双曲线, 抛物线, 则从第一个曲线开始, 每次均引入双曲线, 答案为  $3 + (4 \times 1 + 2) + (4 \times 2 + 2) + \cdots + (4 \times 99 + 2) = 20001$ . 选取 200 条离心率足够大 (几乎一组平行直线), 绕着其中心旋转  $180^\circ$  过程中, 选取任意 200 个位置即可.

6. 已知实数  $x_0 \in [0, 1)$ . 数列  $\{x_k\}$  满足: 若  $x_{n-1} < \frac{1}{2}$ , 则  $x_n = 2x_{n-1}$ , 若  $x_{n-1} \geq \frac{1}{2}$ , 则  $x_n = 2x_{n-1} - 1$  ( $n = 1, 2, \cdots$ ). 现知  $x_0 = x_{2021}$ , 则可能的  $x_0$  的个数为\_\_\_\_\_.

答案:  $2^{2021} - 1$

解: 首先我们证明  $x_n \in [0, 1)$  恒成立.

若  $x_i \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ , 则  $x_{i+1} = 2x_i \in [0, 1)$ ;

若  $x_i \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ , 则  $x_{i+1} = 2x_i - 1 \in [0, 1)$ .

由数学归纳法知,  $x_n \in [0, 1)$  对  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  成立, 那么有

$$x_n = \{x_n\} = \{2^n x_0\}, \text{ 其中 } \{\alpha\} \text{ 表示 } \alpha \text{ 的小数部分.}$$

$$\therefore x_{2021} = \{2^{2021} x_0\}.$$

$$\therefore \{2^{2021} x_0\} = x_0, \text{ 即 } 2^{2021} x_0 - x_0 \text{ 为整数.}$$

$$\therefore x_0 = \frac{k}{2^{2021} - 1} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, 2^{2021} - 2).$$

∴ 可能的  $x_0$  的值共有  $2^{2021} - 1$  个.  $\square$

7. 设  $y_n = 1 \overbrace{22 \cdots 2}^n 1$ . 若  $10^9 - 1 | y_n$ , 则  $n$  的最小值为\_\_\_\_\_.

答案: 80

解: 由于  $y_n = \overbrace{11 \cdots 1}^{n+1} \times 11 = \frac{10^{n+1} - 1}{9}$ ,

那么由  $10^9 - 1 | y_n$  可得

$$10^9 - 1 \mid \frac{10^{n+1} - 1}{9} \times 11.$$

故

$$9 \times (10^9 - 1) \mid 10^{n+1} - 1.$$

于是  $10^9 - 1 \mid 10^{n+1} - 1$ .

利用辗转相除法可以证明  $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$  ( $a$  为大于 1 的正整数).

于是, 我们有  $9 \mid n+1$ . 令  $n+1 = 9k$ , 代入原式则有  $9 \times (10^9 - 1) \mid 10^{9k} - 1$ .

而

$$10^{9k} - 1 = (10^9 - 1) \times (10^{9(k-1)} + 10^{9(k-2)} + \cdots + 10^9 + 1),$$

因此, 我们有

$$9 \mid 10^{9(k-1)} + 10^{9(k-2)} + \cdots + 10^9 + 1,$$

继而  $9 \mid k$ . 所以  $k \geq 9$ . 再结合  $n+1 \geq 81$  可知,  $n$  的最小值为 80.  $\square$

8. 已知  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是三个不全相等的实数且满足  $a = ab + c$ 、 $b = bc + a$ 、 $c = ca + b$ . 则  $a + b + c =$ \_\_\_\_\_.

答案: 3

解: 先证明  $a$ 、 $b$ 、 $c$  均不为 0, 若否, 不妨设  $a = 0$ , 则由  $a = ab + c$  可得  $c = 0$ , 同理可得  $b = 0$ , 与  $a$ 、 $b$ 、 $c$  不全相等矛盾. 所以  $a$ 、 $b$ 、 $c$  均不为 0.

题目中三式相加容易得到  $ab + bc + ca = 0$ ,

又因为题目中三式等价于  $a(1-b) = c$ 、 $b(1-c) = a$ 、 $c(1-a) = b$ ,

此三式相乘得到  $abc(1-a)(1-b)(1-c) = abc$ .

由  $abc \neq 0$ , 所以  $(1-a)(1-b)(1-c) = 1$ , 即  $1 - (a+b+c) + (ab+bc+ca) - abc = 1$ .

由于  $ab+bc+ca = 0$ , 所以  $abc = -(a+b+c)$ ,

又因为题目中三式等价于  $ac = abc + c^2$ 、 $ab = abc + a^2$ 、 $bc = abc + b^2$ ,



此三式相加得到  $ab + bc + ca = 3abc + a^2 + b^2 + c^2$ ,

即  $3(ab + bc + ca) = 3abc + (a + b + c)^2$ .

由  $ab + bc + ca = 0$  及  $abc = -(a + b + c)$  得到  $-3(a + b + c) + (a + b + c)^2 = 0$

因为  $a + b + c = -abc \neq 0$ ,

所以  $a + b + c = 3$ .  $\square$

9. 如图,  $AD$  为  $\triangle ABC$  中  $\angle A$  的平分线. 过  $A$  作  $AD$  的垂线  $AH$ , 过  $C$  作  $CE \parallel AD$  交  $AH$  于点  $E$ . 若  $BE$  与  $AD$  交于点  $F$ , 且  $AB = 6, AC = 8, BC = 7$ . 则  $CF =$ \_\_\_\_\_.

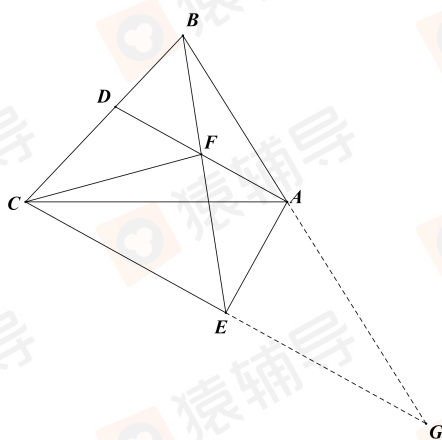


图 2: 第 9 题图

答案:  $\sqrt{31}$

解: 延长  $CE, BA$  交于  $G$ .  $AE$  是  $\angle BAC$  的外角平分线, 结合  $AE$  垂直于  $CE$  易可知  $E$  为  $CG$  的中点, 从而  $F$  为  $AD$  的中点. 因此,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CF}| &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2 + 2\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 8^2 + 2 \times 4 \times 8 \times \cos \angle BCA} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{124} \\ &= \sqrt{31}. \end{aligned}$$

故  $CF = \sqrt{31}$ .  $\square$

10. 如果一个十位数  $F$  的各位数字之和为 81, 则称  $F$  是一个“小猿数”. 则小猿数的个数为\_\_\_\_\_.

答案: 48619

解: 设  $F = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10}}$ .

则

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 81,$$

其中  $1 \leq a_1 \leq 9, 0 \leq a_i \leq 9, i = 2, 3, \cdots, 10$ .

令  $b_i = 9 - a_i$  则有

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{10} = 9,$$

其中  $0 \leq b_1 \leq 8, 0 \leq b_i \leq 9, i = 2, 3, \cdots, 10$

而该方程的非负整数解共  $C_{9+10-1}^{10-1} = C_{18}^9 = 48620$  组.

除去唯一一组不合题意的  $(9, 0, \cdots, 0)$ , 故共有  $48620 - 1 = 48619$  个小猿数.  $\square$

11. 设  $a_n$  是与  $\sqrt{\frac{n}{2}}$  的差的绝对值最小的整数,  $b_n$  是与  $\sqrt{2n}$  的差的绝对值最小的整数. 记  $\{\frac{1}{a_n}\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $\{\frac{1}{b_n}\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ . 则  $2T_{100} - S_{100}$  的值为\_\_\_\_\_.

答案: 1

解:  $a_n = k \Leftrightarrow \sqrt{\frac{n}{2}} \in \left(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{n}{2} \in \left(k^2 - k + \frac{1}{4}, k^2 + k + \frac{1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow n \in \left(2k^2 - 2k + \frac{1}{2}, 2k^2 + 2k + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow n \in [2k^2 - 2k + 1, 2k^2 + 2k]$ .

故有  $4k$  个  $n$  使得  $a_n = k$

于是

$$S_{100} = \sum_{k=1}^6 \left(\frac{1}{k} \times 4k\right) + \frac{1}{7} \times 16 = 24 + \frac{16}{7}.$$

类似地,  $b_n = k \Leftrightarrow \sqrt{2n} \in \left(k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow n \in \left[\frac{k^2 - k}{2} + 1, \frac{k^2 + k}{2}\right]$ .

故共有  $k$  个  $n$  使得  $b_n = k$ .

则

$$T_{100} = \sum_{k=1}^{13} \left(\frac{1}{k} \times k\right) + \frac{1}{14} \times 9 = 13 + \frac{9}{14}.$$

故  $2T_{100} - S_{100} = 2\left(13 + \frac{9}{14}\right) - \left(24 + \frac{16}{7}\right) = 1$ .  $\square$

12. 设正整数  $n \leq 2021$ , 且  $n^5 - 5n^3 + 4n + 7$  是完全平方数. 则可能的  $n$  的个数为\_\_\_\_\_.

答案: 0

解:  $n^5 - 5n^3 + 4n + 7 = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) + 7$ .

由于完全平方数模 4 余 0 或 1, 故  $(n^2 - 1)(n^2 - 4)$  被 4 整除. 从而  $n(n^2 - 1)(n^2 - 4) + 7$  模 4 余 3, 不可能是完全平方数. 故这样的  $n$  共 0 个.  $\square$

13. 方程  $x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 5 = 0$  的整数解的组数为\_\_\_\_\_.

答案: 2

解: 方程等价于  $x^2 - (2y + 4)x + 3y^2 + 5 = 0$ ,

判别式  $\Delta = (2y + 4)^2 - 4(3y^2 + 5) = 4(-2y^2 + 4y - 1) = 4(1 - 2(y - 1)^2) \leq 4$ .

判别式是一个平方数, 经检验只能  $\Delta = 4$ , 此时  $y = 1$ .

方程转化为  $x^2 - 6x + 8 = 0$ , 解得  $x = 2$  或  $x = 4$ .

因此  $(x, y) \in \{(2, 1), (4, 1)\}$ .  $\square$

14. 现有 7 把钥匙和 7 把锁. 用这些钥匙随机开锁, 则  $D_1, D_2, D_3$  这三把钥匙不能打开对应的锁的概率是\_\_\_\_\_.

答案:  $\frac{67}{105}$

解: 全部情形共  $7!$  种.

记第  $i$  把锁所被打开的情形构成集合  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

则  $|A_i| = 6!$ ,  $|A_i \cap A_j| = 5!$ ,  $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 4!$ .

由容斥原理知概率为  $\frac{7! - 3 \times 6! + 3 \times 5! - 4!}{7!} = \frac{67}{105}$ .  $\square$

15. 设正整数  $m, n$  均不大于 2021, 且  $\frac{m}{n+1} < \sqrt{2} < \frac{m+1}{n}$ . 则这样的数组  $(m, n)$  个数为\_\_\_\_\_.

答案: 3449.

解: 原式等价于  $\sqrt{2}n - 1 < m < \sqrt{2}(n+1)$ .

记区间  $I_n = (\sqrt{2}n - 1, \sqrt{2}(n+1))$ .

则  $I_j \cap I_{j+1} = (\sqrt{2}(j+1) - 1, \sqrt{2}(j+1))$ , 且  $I_j \cap I_k = \emptyset$  ( $k \geq j+2$ ).

由于  $\sqrt{2}(j+1)$  不为整数, 故  $I_j \cap I_{j+1}$  内恰有一个整数.

当  $n \geq 1430$  时,  $\sqrt{2}n - 1 > 2021$ .

故所求数组  $(m, n)$  的个数是诸  $|I_n|$  ( $n = 1, 2, \dots, 1429$ ) 之和.

每个  $m \in \{1, 2, \dots, 2021\}$  都出现在某个  $I_n$  之中, 且当且仅当对于某个  $j$ ,  $m \in I_j \cap I_{j+1}$  时,  $m$  会出现在两个  $I_n$  内.

因此, 所求数组个数为  $2021 + 1428 = 3449$ .  $\square$

16. 有三个给定的经过原点的平面. 过原点作第四个平面  $\alpha$ , 使之与给定的三个平面形成的三个二面角均相等. 则这样的  $\alpha$  的个数是\_\_\_\_\_.

答案: 1 或 4

解: 若三个平面法向量共面 (记平面为  $\beta$ ), 则只有一个和他们均垂直的平面满足要求. 这是因为  $\alpha$  的法向量在  $\beta$  上的投影必须在这三个平面法向量两两形成的角的角平分线上, 因此投影只能是零向量, 也就是  $\alpha$  的法向量需要与  $\beta$  垂直.

若三个平面法向量不共面, 则任意两个法向量所在基线均有两个角分面. 我们考虑第一个平面和第二个平面的两个角分面, 以及第二个平面和第三个平面的两个角分面, 一共可以产生四条交线, 这四条交线即为第四个平面法向量的基线. 极特殊情况, 前三个平面如果两两垂直, 即可以考虑空间直角坐标系中  $xOy$ ,  $yOz$ ,  $zOx$ , 与他们三个夹角一样的第四个平面法向量的方向, 即为每个卦限的中分线, 一共四条, 对应四个平面.

$\square$

【注】 非常容易产生的一种错误是认为此题的答案仅有 4. 这是因为没有考虑三个平面的法向量共面的情形.

17. 若  $a, b, c$  为非负实数, 且  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 25$ , 则  $a + b + c$  的最小值为\_\_\_\_\_.

答案: 5

解:  $(a + b + c)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 25$ .

当  $(a, b, c) = (5, 0, 0), (0, 5, 0)$  或  $(0, 0, 5)$  取等.  $\square$

18. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = 2^{a_n}$ . 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = 5$ ,  $b_{n+1} = 5^{b_n}$ . 若正整数  $m$  满足  $b_m > a_{25}$ , 则  $m$  的最小值为\_\_\_\_\_.

答案: 24

解: 分两步证明:

(1) 先证明对任意正整数  $n$  有  $b_n > a_{n+1}$ ,

采用数学归纳法,



当  $n = 1$  时有  $b_1 = 5 > 2^2 = a_2$  显然成立,

假设当  $n = k$  时结论成立, 即  $b_k > a_{k+1}$ ,

则当  $n = k + 1$  时, 有  $b_{k+1} = 5^{b_k} > 5^{a_{k+1}} > 2^{a_{k+1}} = a_{k+2}$

所以对  $n = k + 1$  结论也成立.

所以对任意正整数  $n$  有  $b_n > a_{n+1}$ .

(2) 再证明对任意正整数  $n$  有  $a_{n+2} > 3b_n$ ,

当  $n = 1$  时, 有  $a_3 = 16 > 15 = 3b_1$ ,

假设当  $n = k$  时结论成立, 即  $a_{k+2} > 3b_k$ ,

则当  $n = k + 1$  时,  $a_{k+3} = 2^{a_{k+2}} > 2^{3b_k} = 8^{b_k} = \left(\frac{8}{5}\right)^{b_k} \times 5^{b_k} \geq \left(1 + \frac{3}{5}\right)^5 > 3 \times 5^{b_k}$

所以对  $n = k + 1$  结论也成立.

所以对任意正整数  $n$  有  $a_{n+2} > 3b_n$ .

此时我们由 (1) 可以得到  $b_{24} > a_{25}$ ,

由 (2) 可以得到  $a_{25} > 3b_{23} > b_{23}$ ,

所以满足  $b_m > a_{25}$  的  $m$  的最小值为 24.  $\square$

19. 若  $x_1, x_2, \dots, x_7$  为非负整数, 则方程  $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = x_1 x_2 \dots x_7$  的解有\_\_\_\_\_组.

答案: 85

解: 显然  $x_1 = x_2 = \dots = x_7 = 0$  是满足条件的一组解, 且只要  $x_1, x_2, \dots, x_7$  中有 0, 则剩余的必须全为 0.

下面只考虑  $x_1, x_2, \dots, x_7$  非零的情形. 不妨设  $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_7$ . 则  $x_1 x_2 \dots x_7 \leq 7x_7 \Rightarrow x_1 x_2 \dots x_6 \leq 7$ .

显然此时必有  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$  (否则  $x_4 x_5 x_6 \geq 2^3 = 8 > 7$ , 矛盾). 于是命题等价于  $x_5 x_6 x_7 = 4 + x_5 + x_6 + x_7$ , 且由  $x_5 x_6 \leq 7$ , 可得  $x_5 \leq 2$ .

情形 1:  $x_5 = 1$ .

则  $x_6 x_7 = 5 + x_6 + x_7 \Rightarrow (x_6 - 1)(x_7 - 1) = 6$ .

满足条件的解有  $(x_6, x_7) = (2, 7), (3, 4)$ .

情形 2:  $x_5 = 2$ .

则  $x_6 = 2$  或 3.

$x_6 = 2$  时,  $4x_7 = 8 + x_7$  (舍);

$x_6 = 3$  时,  $6x_7 = 9 + x_7$  (舍).

故此类情形无解.

综上  $(x_1, x_2, \dots, x_7) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 1, 2, 7)$  或  $(1, 1, 1, 1, 1, 3, 4)$ .

考虑到轮换性, 故共有  $7 \times 6 \times 2 + 1 = 85$  组解.  $\square$

20. 已知  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ , 且  $(a+b-c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) = 3$ , 求  $(a^4 + b^4 + c^4)\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}\right)$  的最小值.

答案:  $417 + 240\sqrt{3}$

解: 原式整理可得

$$\begin{aligned}(a+b-c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) &= 3 \\ \Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) - (a+b)\left(\frac{c}{ab} + \frac{1}{c}\right) + 1 &= 3 \\ \Rightarrow (a+b)\left(\frac{c}{ab} + \frac{1}{c}\right) &= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \\ \Rightarrow \frac{c}{ab} + \frac{1}{c} &= \frac{a^2 + b^2}{ab(a+b)} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}.\end{aligned}$$

由齐次性, 不妨设  $ab = 1$ . 则  $\frac{a^2 + b^2}{a+b} \geq 2$ , 即  $(a+b)^2 - 2 \geq 2(a+b)$ . 因此  $a+b \geq 1 + \sqrt{3}$ . 于是,

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2 \geq \left((1 + \sqrt{3})^2 - 2\right)^2 - 2 = 14 + 8\sqrt{3}.$$

故

$$\begin{aligned}&(a^4 + b^4 + c^4)\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}\right) \\ &= (a^4 + b^4)\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}\right) + (a^4 + b^4)\left(\frac{1}{c^4} + \frac{c^4}{a^4 b^4}\right) + 1 \\ &\geq (a^4 + b^4)^2 + (a^4 + b^4) \cdot 2\sqrt{\frac{1}{c^4} \cdot \frac{c^4}{a^4 b^4}} + 1 \\ &= (a^4 + b^4 + 1)^2 \\ &\geq (15 + 8\sqrt{3})^2 \\ &= 417 + 240\sqrt{3}.\end{aligned}$$

当  $c = 1, ab = 1, a + b = 1 + \sqrt{3}$  时等号成立. 这样的  $a, b$  显然是存在的  $\square$ .