

机密★启用前

湖北省七市(州)教科研协作体 2021 年高三年级 3 月联考

数 学

本试卷共 4 页, 22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

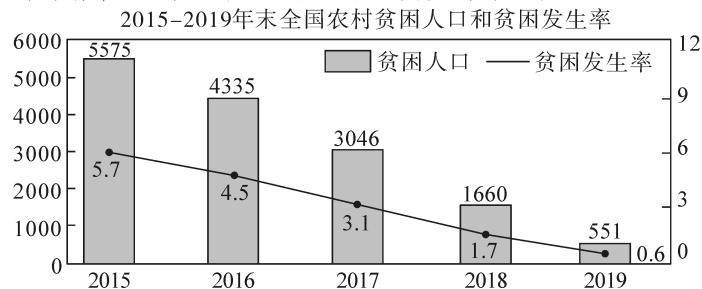
★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答: 用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x > 1\}$, $B = \{x | |x - 1| < 3\}$, 则 $A \cap B =$
A. $(-2, 4)$ B. $(1, 2)$ C. $(1, 4)$ D. $(2, 4)$
2. 设 $i \cdot z = 4 - 3i$ (i 为虚数单位), 则复数 z 的虚部为
A. -4 B. 4 C. $-4i$ D. $4i$
3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 4$, $a_2 a_7 = 8a_4$, 则 $a_1 =$
A. 1 B. 2 C. ± 1 D. ± 2
4. 2020 年, 我国脱贫攻坚已取得决定性胜利. 下图是 2015 - 2019 年年末全国农村贫困人口和贫困发生率(贫困人口占目标调查人口的比重)的变化情况(数据来源: 国家统计局 2019 年统计年报). 根据图表可得出的正确统计结论是

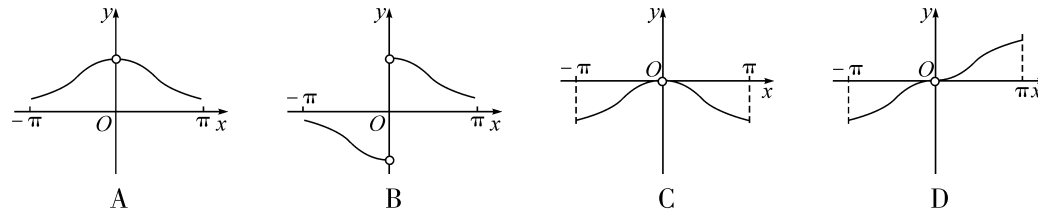


- A. 五年来贫困发生率下降了 5.2 个百分点
- B. 五年来农村贫困人口减少超过九成
- C. 五年来农村贫困人口减少得越来越快
- D. 五年来目标调查人口逐年减少

5. 已知圆 M 过点 $A(1, -1)$, $B(1, 2)$, $C(5, 2)$, 则圆 M 在点 B 处的切线方程为

- A. $3x + 4y - 2 = 0$
- B. $3x - 4y - 2 = 0$
- C. $4x - 3y + 2 = 0$
- D. $4x - 3y - 2 = 0$

6. 函数 $f(x) = \frac{5x + 2\sin x}{3^x - 3^{-x}}$ ($x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$) 的大致图象为



7. 清明节前夕, 某校团委决定举办“缅怀革命先烈, 致敬时代英雄”主题演讲比赛, 经过初赛, 共 10 人进入决赛, 其中高一年级 2 人, 高二年级 3 人, 高三年级 5 人, 现采取抽签方式决定演讲顺序, 则在高二年级 3 人相邻的前提下, 高一年级 2 人不相邻的概率为

- A. $\frac{1}{12}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $\frac{3}{4}$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, +\infty)$ 上的可导函数, 满足 $f(x) > 0$, 且 $f(x) + f'(x) < 0$ ($f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数), 若 $0 < a < 1 < b$ 且 $ab = 1$, 则下列不等式一定成立的是

- A. $f(a) > (a + 1)f(b)$
- B. $f(b) > (1 - a)f(a)$
- C. $af(a) > bf(b)$
- D. $af(b) > bf(a)$

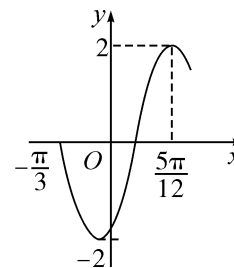
二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多个选项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 设 a, b, c, d 为实数, 且 $a > b > 0 > c > d$, 则下列不等式正确的是

- A. $c^2 < cd$
- B. $a - c < b - d$
- C. $ac > bd$
- D. $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0$

10. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则下列结论正确的是

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2
- B. 把 $y = f(x)$ 图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到函数 $g(x) = 2\cos 2x$ 的图象
- C. $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{12}]$ 上单调递减
- D. $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 是 $y = f(x)$ 图象的一个对称中心

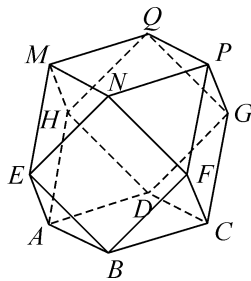


11. 已知抛物线 $\Gamma: x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 过 F 与 y 轴垂直的直线交抛物线 Γ 于 M, N 两点, 则下列说法正确的是

- A. 点 F 的坐标为 $(1, 0)$
- B. 抛物线 Γ 的准线方程为 $y = -1$
- C. 线段 MN 的长为 4
- D. 直线 $y = x - 2$ 与抛物线 Γ 相切

12. 半正多面体(semiregular solid)亦称“阿基米德多面体”,是由边数不全相同的正多边形围成的多面体,体现了数学的对称美.二十四等边体就是一种半正多面体,是由正方体切截而成的,它由八个正三角形和六个正方形构成(如图所示),若它的所有棱长都为 $\sqrt{2}$,则

- A. $BF \perp$ 平面 EAB
 B. 该二十四等边体的体积为 $\frac{20}{3}$
 C. 该二十四等边体外接球的表面积为 8π
 D. PN 与平面 $EBFN$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$



三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。请将答案填在答题卡对应题号的位置上。答错位置,书写不清,模棱两可均不得分。

13. 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB=2,AD=1$,设 AC 与 BD 交于点 O ,则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO} =$ _____.

14. 二项式 $\left(\frac{a}{x} - x^2\right)^5$ 的展开式中, x 的系数为 270,则:(1) $a =$ _____,(2)该二项式展开式中所有项的系数和为_____.(本题第一空 3 分,第二空 2 分)

15. 为了衡量星星的明暗程度,古希腊天文学家喜帕恰斯在公元前二世纪首先提出了星等这个概念.星等的数值越小,星星就越亮;星等的数值越大,星星就越暗.到了 1850 年,由于光度计在天体光度测量的应用,英国天文学家普森又提出了亮度的概念,天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述.两颗星的星等与亮度满足 $m_1 - m_2 = 2.5(\lg E_2 - \lg E_1)$,其中星等为 m_k 的星的亮度为 $E_k(k=1,2)$.已知“心宿二”的星等是 1.00,“天津四”的星等是 1.25,则“心宿二”的亮度大约是“天津四”的_____倍.(结果精确到 0.01.当 $|x|$ 较小时, $10^x \approx 1 + 2.3x + 2.7x^2$)

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(3\sqrt{5}, 0)$,点 N 的坐标为 $(0, 2)$,点 M 为双曲线 C 左支上的动点,且 $\triangle MNF$ 的周长不小于 20,则双曲线 C 的离心率的取值范围为_____.

四、解答题:本大题共 6 小题,共计 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

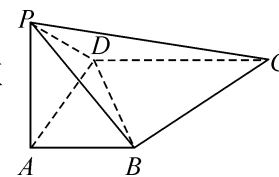
17. (10 分)
 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ,且 $4\cos(A+C) + 2\cos 2B + 3 = 0$.
 (1)求角 B ;
 (2)若 D 是 BC 的中点, $AD = 4\sqrt{3}, AB = 8$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分)
 已知等差数列 $\{a_n\}$,其前 n 项和为 S_n ,若 $a_1 + a_3 = 10, S_5 = 35$.
 (1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2)若数列 $\{b_n\}$ 满足: $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n = 1 + (2n-1)2^n$,求数列 $\left\{\frac{1}{a_n \cdot (\log_2 b_{2n+4})}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是直角梯形, $AB \parallel DC, \angle BAD = 90^\circ, PD = DC = BC = 2PA = 2AB = 2, PD \perp DC$.

- (1)求证: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;
 (2)设 $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BD}(0 < \lambda < 1)$,当二面角 $A-PM-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$ 时,求 λ 的值.



20. (12 分)

已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左、右焦点分别是双曲线 $C_2: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的左、右顶点,且椭圆 C_1 的上顶点到双曲线 C_2 的渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

- (1)求椭圆 C_1 的方程;
 (2)设椭圆 C_1 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$,经过左焦点 F_1 的直线 l 与椭圆 C_1 交于 M, N 两点,且满足 $\overrightarrow{F_2P} = \overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N}$ 的点 P 也在椭圆 C_1 上,求四边形 F_2MPN 的面积.

21. (12 分)

某电子公司新开发一电子产品,该电子产品的一个系统 G 有 $2n-1$ 个电子元件组成,各个电子元件能正常工作的概率均为 p ,且每个电子元件能否正常工作相互独立.若系统中有超过一半的电子元件正常工作,则系统 G 可以正常工作,否则就需维修.

- (1)当 $n=2, p=\frac{1}{2}$ 时,若该电子产品由 3 个系统 G 组成,每个系统的维修所需费用为 500 元,设 ξ 为该电子产品需要维修的系统所需的总费用,求 ξ 的分布列与数学期望;
 (2)为提高系统 G 正常工作的概率,在系统内增加两个功能完全一样的电子元件,每个新元件正常工作的概率均为 p ,且新增元件后有超过一半的电子元件正常工作,则系统 G 可以正常工作,问 p 满足什么条件时,可以提高整个系统 G 的正常工作概率?

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$,其中 $e = 2.718\ 28\cdots$ 为自然对数的底数.

- (1)求 $f(x)$ 的单调区间;
 (2)若 $e^x - 2x\ln x - kx - 1 \geq 0$ 对 $\forall x > 0$ 恒成立,记 $k_{\max} = \lambda$,证明: $\lambda > 1.1$.