高三数学参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1.答案：D　2.答案：B　3.答案：A　4.答案：B　5.答案：A

6.答案：C　7.答案：C　8.答案：B　9.答案：D　10.答案：A

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分.

11.答案：2;2n　12.答案：1；$[-\frac{4}{3},0]$　13.答案：-1;-280

14.答案：$\frac{\pi}{3};\left[2,\sqrt{3}+1\right]$　15.答案：$\frac{93}{125}$　16.答案：-1　17.答案：$\frac{\sqrt{13}}{2}$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

18.（本题满分 14 分）

解:(1) $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-\cos^2\omega x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x-\frac{1+\cos 2\omega x}{2}=$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x-\frac{1}{2}\cos 2\omega x-\frac{1}{2}=\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$.　3 分

$\because x_1,x_2$ 是函数 $y=f(x)-\frac{1}{2}=\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})-1$ 的两个零点，

即 x_1,x_2 是方程 $\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})=1$ 的两个实根，且 $\left|x_1-x_2\right|_{\min}=\pi$，

$\therefore T=\pi$. $\because T=\frac{2\pi}{2\omega}$, $\therefore \omega=1$.　5 分

$\therefore f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$.

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，得 $-\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in Z$.

$\therefore$ $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi](k\in Z)$.　7 分

(2)　$f(\frac{\alpha}{2})=\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$，$\therefore \sin(\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{3}{5}$.

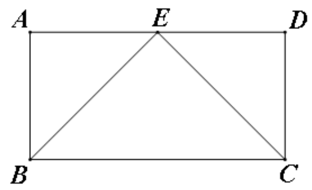
$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\therefore -\frac{\pi}{6}<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$，$\therefore \cos(\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{4}{5}$.　9 分

$\because \sin\alpha=\sin[(\alpha-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}+\cos(\alpha-\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$，　11 分

$\cos\alpha=\cos[(\alpha-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=\cos(\alpha-\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}-\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$，　13 分

$\therefore \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{4+3\sqrt{3}}{10}\times\frac{4\sqrt{3}-3}{10}=\frac{24+7\sqrt{3}}{50}$.　14 分

19.（本题满分 15 分）



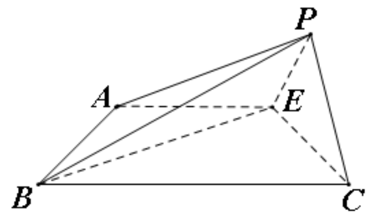
法 1：

证明：由图 1 可得 $BE\perp EC$

在图 2 中$\because BE=\sqrt{2},PE=1,PB=\sqrt{3}$，$\therefore BE\perp PE$.　　4 分

又$\because EC\bigcap PE=E$ $\therefore BE\perp$面PEC.

$\therefore BE\subset$面ABCE $\therefore$面PCE$\perp$面ABCE　　7 分



法 2：

证明：取 EC 中点 N，由 $PE=PC$，得 $PN\perp CE$，$PN=\frac{\sqrt{2}}{2}$

又 $BN=\sqrt{BC^2+CN^2-2BC\cdot CN\cdot\cos 45^\circ}=\frac{\sqrt{10}}{2}$　　4 分

则 $BN^2+PN^2=3=PB^2$，故 $PN\perp BN$

又 $CE\bigcap BN=N$，$\therefore PN\perp$面ABCE，$\therefore$面PCE$\perp$面ABCE　　7 分

（1）法 1：由 EC 中点 N，得 $AN=BN$，

又由（1）的法 2 可得，$PN\perp$面ABCE，$PN=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore AP=BP$，$S_{\Delta ABP}=\frac{\sqrt{11}}{4}$，$S_{\Delta ABC}=1$　　11 分

设 C 到面 ABP 的距离为 h

$\because V_{c-ABP}=V_{P-ABC}$ $\therefore h=\frac{2\sqrt{22}}{11}$　　13 分

又 $\sin\theta=\frac{h}{PC}=\frac{2\sqrt{22}}{11}$

所以直线 PC 与面 ABP 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{22}}{11}$　　15 分

法 2：以点 A 为原点，分别以 AB，AE 直线为 x 轴，y 轴，以经过点 A 且垂直于平面 $ABCE$ 的直线为 z 轴建立直角坐标系。

由题意可知，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$E(0,1,0)$，$P(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$　　10 分

$\overrightarrow{AP}=(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$

设面 ABP 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

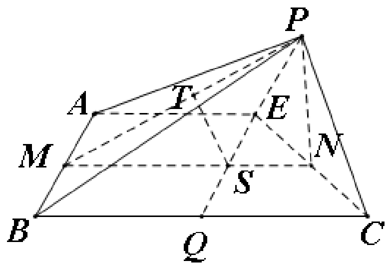
则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，令 $y=\sqrt{2}$，得 $z=-3$，所以 $\vec{n}=(0,\sqrt{2},-3)$ 　　13 分

又 $\overrightarrow{PC}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\therefore \sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{PC},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\times\left|\vec{n}\right|}=\frac{2\sqrt{22}}{11}$

所以直线 PC 与面 ABP 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{22}}{11}$ 　　15 分

法 3：



证：$\because AB\perp PM, AP\perp MN, PM\cap MN=M$

$\therefore AB\perp$ 面PMN，$\therefore$ 面PAB $\perp$ 面PMN 交于 PM，

作 $ST\perp PM$，$\therefore ST\perp$ 面PAB 　　10 分

由相似计算得 $ST=\frac{\sqrt{22}}{11}$ 　　12 分

$\because QE\,//$ 面PAB，$\therefore Q$ 到面 ABP 的距离= S 到面 ABP 的距离

又 $\because Q$ 是 BC 中点，$\therefore h$ 记为 C 到面 ABP 的距离= Q 到面 ABP 的距离的 2 倍 $=\frac{2\sqrt{22}}{11}$

又 $\sin\theta=\frac{h}{PC}=\frac{2\sqrt{22}}{11}$

所以直线 PC 与面 ABP 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{22}}{11}$ 　　15 分

20.（本题满分 15 分）

解：（1）$S_n=2a_n-(n-2)^2$，当 n=1 时，$S_1=a_1=2a_1-1\Rightarrow a_1=1$

$n\geq 2$ 时 $S_{n-1}=2a_{n-1}-(n-3)^2$

两式相减，得 $\begin{aligned}&a_n=2a_n-2a_{n-1}-(n-2)^2+(n-3)^2\\ &\Rightarrow a_n=2a_{n-1}+2n-5\,(n\geq 2)\end{aligned}$

则 $\dfrac{a_n+2n-1}{a_{n-1}+2(n-1)-1}=\dfrac{2a_{n-1}+2n-5+2n-1}{a_{n-1}+2n-3}=\dfrac{2(a_{n-1}+2n-3)}{a_{n-1}+2n-3}=2$ 为常数

$\therefore$ 数列 $\{a_n+2n-1\}$ 是等比数列，首项为 $a_1+2-1=2,$

$\therefore a_n+2n-1=2\cdot 2^{n-1}=2^n \Rightarrow a_n=2^n-2n+1$ 　　7 分

（2）$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2^n-2n+1}=\dfrac{1}{2^n(1-\dfrac{2n-1}{2^n})}\le\dfrac{1}{2^n(1-\dfrac{5}{8})}=\dfrac{8}{3\cdot 2^n}(n\ge 3)$

又 $a_1=1, a_2=1$

当 $n\ge 3$ 时，

$$T_n\le 1+1+\frac{8}{3}(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n})$$

$$=2+\frac{8}{3}\cdot\frac{\frac{1}{8}\left[1-(\frac{1}{2})^{n-2}\right]}{1-\frac{1}{2}}<2+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot 2=\frac{8}{3}$$

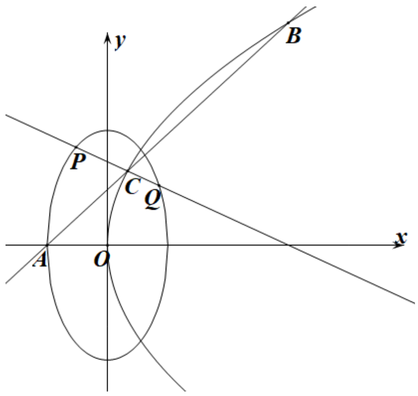
又 $T_1=1<\dfrac{8}{3}, T_2=1+1<\dfrac{8}{3}$ 故 $T_n<\dfrac{8}{3}$ 　　15 分

21.（本题满分 15 分）

解：⑴抛物线的准线方程 $x=-\dfrac{p}{2}$，焦点坐标 $(\dfrac{p}{2},0)$，

则 $-\dfrac{p}{2}=-1$， $p=2$，抛物线的标准方程为 $y^2=4x$，焦点 $(1,0)$． 　　4 分

⑵设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，$P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$



由 $\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，得点 $A(-1,0)$ 在直线 l_1 上，且 $y_2=\dfrac{\frac{1}{2}y_1}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}y_1$，

且四边形的面积 $S=3S_{\Delta APQ}=\dfrac{3}{2}|PQ|d$． 　　6 分

l_1： $y=k(x+1)$，l_2： $y=-\dfrac{k}{2}(x-x_3)+y_3$

由 $\begin{cases} y=k(x+1) \\ y^2=2px \end{cases}$，

得 $y^2-\dfrac{2p}{k}y+2p=0$

则 $\Delta=\dfrac{4p^2}{k^2}-8p>0$， $k^2<\dfrac{p}{2}$

$y_1+y_2=\dfrac{2p}{k}, y_1y_2=2p$

因为 $y_1=3y_2$，所以 $y_2^2=\frac{2}{3}p$， $x_2=\frac{y_2^2}{2p}=\frac{1}{3}$， $C(\frac{1}{3},y_2)$， $k^2=\frac{3p}{8}$， $p=\frac{y_2^2}{2x_2}=\frac{3y_2^2}{2}$

由 l_1，l_2 的斜率分别为 k 、$-\frac{1}{2}k$，由图知 l_2 必过点 $(3,0)$ 10 分

可设 l_2： $y=-\frac{k}{2}(x-3)$，且 $k=k_{AC}=\frac{y_2}{\frac{1}{3}+1}=\frac{3y_2}{4}$，

故直线 l_2： $y=-\frac{3y_2}{8}(x-3)$， 令 $t=-\frac{8}{3y_2}$

则直线 l_2： $x=ty+3$， 代入椭圆方程 $\frac{y^2}{2}+x^2=1$，

得 $(1+2t^2)y^2+12ty+16=0$，

$\Delta=16(t^2-4)>0$， $y_3+y_4=-\frac{12t}{1+2t^2}$， $y_3y_4=\frac{16}{1+2t^2}$ 12 分

$|PQ|=\sqrt{1+t^2}\cdot|y_3-y_4|=\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{\sqrt{16(t^2-4)}}{1+2t^2}$

点 A 到 l_2 的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{1+t^2}}$，

四边形的面积 $S=24\frac{\sqrt{t^2-4}}{1+2t^2}=12\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2t^2-8}}{(2t^2-8)+9}\le 12\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2t^2-8}}{6\sqrt{2t^2-8}}=2\sqrt{2}$ 15 分

当且仅当 $t^2=\frac{17}{2}$， $p=\frac{64}{51}$ 时面积最小为 $2\sqrt{2}$

22. （本题满分 15 分）

解：（1）由题意 $g(x)=\frac{e^x-ax-1}{x}$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$， $g'(x)=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x+1}{x^2}$ 2 分

令 $\varphi(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+1$，则 $\varphi'(x)=xe^x$

当 $x<0$ 时， $\varphi'(x)<0$；当 $x>0$ 时， $\varphi'(x)>0$

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增 4 分

$\therefore \varphi(x)>\varphi(0)=0$， 即 $g'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上均大于零

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增 6 分

(2) 易知 $f'(x)=e^x-a$，由 $f(x)=e^x-ax-1\ge 0$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，且 $f(0)=0$，则 $f'(0)=0$， $\therefore a=1$（也可利用 $e^x\ge x+1$ 的几何意义或分离参数 a 求解） 9 分

此时 $h(x)=e^x(e^x-x-1)$，$h'(x)=e^x(2e^x-x-2)$

令 $\tau(x)=2e^x-x-2$，则 $\tau'(x)=2e^x-1$

当 $x<-\ln 2$ 时，$\tau'(x)<0$；当 $x>-\ln 2$ 时，$\tau'(x)>0$

$\therefore \tau(x)$ 在 $(-\infty,-\ln 2)$ 上单调递减，在 $(-\ln 2,+\infty)$ 上单调递增　　11 分

又 $\because \tau(0)=0$，$\tau(-2)=\frac{2}{e^2}>0$，$\tau(-\frac{3}{2})=\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{2}=\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{4}<0$

$\therefore$ 存在唯一实数 $t\in\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$，使得 $\tau(t)=2e^t-t-2=0$

$\therefore h(x)$ 在 $(-\infty,t)$ 上递增，$(t,0)$ 上递减，$(0,+\infty)$ 上递增　　13 分

$\therefore h(x)$ 在 R 上唯一的极大值点，即为 t.

$\therefore h(t)=e^t(e^t-t-1)=\frac{t+2}{2}\left(\frac{t+2}{2}-t-1\right)=\frac{-t^2-2t}{4}<\frac{3}{16}$　　15 分