

浙江省“七彩阳光”新高考研究联盟返校联考

高三数学学科 试题

考生须知：

1. 本试题卷分选择题和非选择题两部分，共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，在答题卷指定区域填写班级、姓名、考场号、座位号及准考证号。
3. 所有答案必须写在答题卷上，写在试卷上无效。
4. 考试结束后，只需上交答题卷。

如果事件 A, B 互斥，那么 $P(A+B) = P(A) + P(B)$ 如果事件 A, B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p ，那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0, 1, 2, \dots, n).$$

棱柱的体积公式 $V = Sh$ 其中 S 表示棱柱的底面积， h 表示棱柱的高。

$$\text{棱锥的体积公式 } V = \frac{1}{3} Sh$$

其中 S 表示棱锥的底面积， h 表示棱锥的高。

$$\text{棱台的体积公式 } V = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$

其中 S_1, S_2 分别表示棱台的上、下底面积， h 表示棱台的高。

球的表面积公式 $S = 4\pi R^2$ ，其中 R 表示球的半径。

$$\text{球的体积公式 } V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

其中 R 表示球的半径。

选择题部分 (共 40 分)

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $M = \{x | 0 < x < 4\}$ ， $N = \{x | -x^2 + 2x + 3 > 0\}$ ，则 $M \cup N =$ ()

- A. $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ B. $(0, 3)$ C. $(-3, 4)$ D. $(-1, 4)$

2. 已知 i 是虚数单位，复数 $\frac{a-3i}{i}$ ($a \in \mathbb{R}$) 的虚部为 1，则复数 $z = 2 + ai$ 的模为 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{29}$ D. 3

3. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 1, \\ x - 2y + 1 \leq 0, \\ x + y - 5 \leq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = -2x + y$ 的最小值是 ()

- A. -4 B. -1 C. 2 D. -5

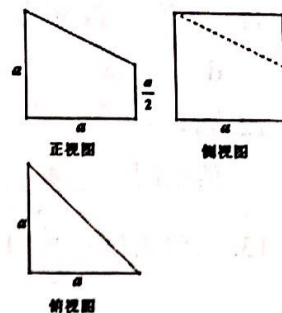


4. 已知 m, l 是不同的直线, α, β 是不同的平面, 且 $m \perp \alpha, l \subset \beta$, 则 “ $\alpha \perp \beta$ ” 是 “ $m \parallel l$ ” 的 ()

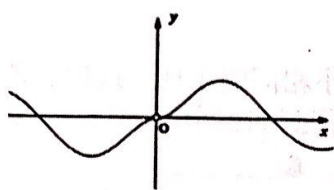
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

5. 某几何体的三视图如图所示, 若棱长为 a 的正方体的外接球表面积为 12π , 则该几何体的体积为 ()

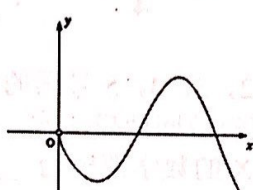
- A. $\frac{10}{3}$
B. 10
C. $\frac{14}{3}$
D. $\frac{26}{3}$



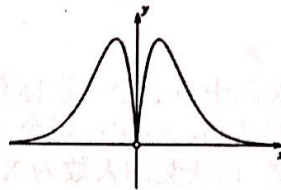
6. 函数 $f(x) = \frac{x^a \cdot \sin x}{a^{|x|} - 1}$ 的图像不可能是 ()



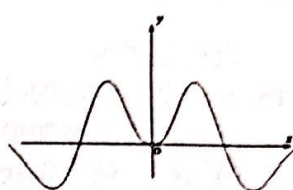
A.



B.



C.



D.

7. 设 O 为坐标原点, 直线 $y = b$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别交于 A, B 两点, 若 $\triangle OAB$ 的面积为 2, 则双曲线 C 的焦距的最小值是 ()

- A. 16
B. 8
C. 4
D. 2

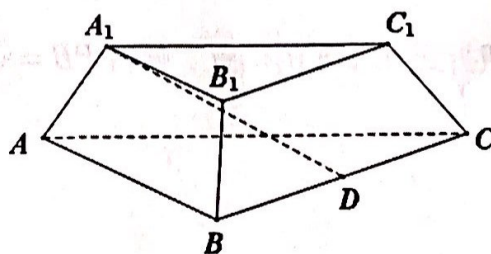
8. 十三世纪意大利数学家列昂那多·斐波那契从兔子繁殖中发现了“斐波那契数列”, 斐波那契数列 $\{a_n\}$ 满足以下关系: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*)$, 记其前 n 项和为 S_n , 若

$a_{2020} = m$ (m 为常数), 则 S_{2018} 的值为 ()

- A. $m - 2$
B. $m - 1$
C. m
D. $m + 1$

9. 在正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = 3AA_1 = \frac{3}{2}A_1B_1 = 6$, D 是 BC 的中点, 设 A_1D 与 BC, BB_1, BA 所成角分别为 α, β, γ , 则 ()

- A. $\alpha < \gamma < \beta$
B. $\alpha < \beta < \gamma$
C. $\beta < \gamma < \alpha$
D. $\gamma < \beta < \alpha$



10. 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 1, 0 < x < 1, 0 < y < 1$, 当 $\frac{4}{x} + \frac{1}{y}$ 取最小值时, $\frac{x}{y}$ 的值为 ()

- A. $\sqrt[3]{4}$
B. $\sqrt[3]{3}$
C. $\sqrt{3}$
D. 1



非选择题部分 (共 110 分)

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为非零常数 d ，且 $a_1 = 2$ ，若 a_1, a_2, a_4 成等比数列，则公差 $d = \underline{\quad\quad}$ ， $a_n = \underline{\quad\quad}$ 。

12. 圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ 的半径为 $\underline{\quad\quad}$ ，若直线 $y = kx + 1$ 与圆 C 有公共点，则实数 k 的取值范围是 $\underline{\quad\quad}$ 。

13. 二项式 $(x - \frac{2}{\sqrt{x}})^7$ 的展开式中，各项系数和为 $\underline{\quad\quad}$ ，含 x^3 项的系数是 $\underline{\quad\quad}$ 。

14. 在 $\triangle ABC$ 中， $a \cos C + (c - 2b) \cos A = 0$ ， $b = 2$ ， $\frac{\pi}{4} \leq B \leq \frac{\pi}{3}$ ，则 $A = \underline{\quad\quad}$ ，边长 c 的取值范围为 $\underline{\quad\quad}$ 。

15. 在一个不透明的摸奖箱中有五个分别标有 1, 2, 3, 4, 5 号码的大小相同的小球，现甲、乙、丙三个人依次参加摸奖活动，规定：每个人连续有放回地摸三次，若得到的三个球编号之和恰为 4 的倍数，则算作获奖。记获奖的人数为 X ，则 X 的数学期望为 $\underline{\quad\quad}$ 。

16. 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2} |\sin x - a| + \frac{b}{2}$ ($a, b \in \mathbb{R}$)，若对于任意 $x \in \mathbb{R}$ ，均有 $|f(x)| \leq 1$ ，则 $a + b$ 的最大值是 $\underline{\quad\quad}$ 。

17. 已知 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$ ，若存在 $m, n \in \mathbb{R}$ ，使得 $m\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}$ 与 $n\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OB}$ 夹角为 60° ，且 $|(m\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA}) - (n\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OB})| = \frac{1}{2}$ ，则 $|\overrightarrow{AB}|$ 的最小值为 $\underline{\quad\quad}$ 。

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. (本题满分 14 分) 已知 $\omega > 0$ ， $\vec{a} = (\sqrt{3} \sin \omega x, -\cos \omega x)$ ， $\vec{b} = (\cos \omega x, \cos \omega x)$ ， $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ ， x_1, x_2 是 $y = f(x) - \frac{1}{2}$ 的其中两个零点，且 $|x_1 - x_2|_{\min} = \pi$ 。

(I) 求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(II) 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ， $f(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{10}$ ，求 $\sin 2\alpha$ 的值。

19. (本题满分 15 分) 如图 1，在矩形 $ABCD$ 中， $BC = 2AB = 2$ ， E 是 AD 中点，将 $\triangle CDE$ 沿直线 CE 翻折到 $\triangle CPE$ 的位置，使得 $PB = \sqrt{3}$ ，如图 2。

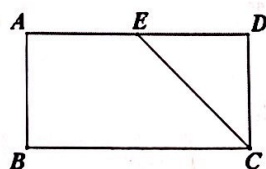


图 1

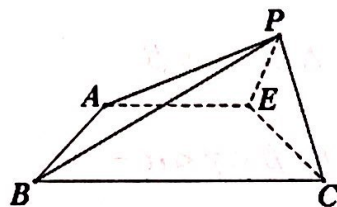


图 2

(I) 求证：面 $PCE \perp$ 面 $ABCE$ ；

(II) 求 PC 与面 ABP 所成角的正弦值。



20. (本题满分 15 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n - (n-2)^2, n \in \mathbb{N}^*$.

(I) 求证: 数列 $\{a_n + 2n - 1\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{8}{3}, n \in \mathbb{N}^*$.

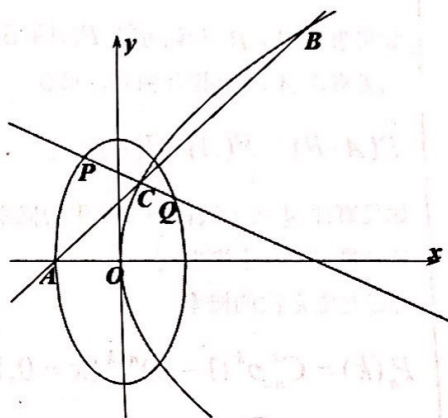
21. (本题满分 15 分) 已知椭圆 $C_1: \frac{y^2}{2} + x^2 = 1$, 抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$, 点 $A(-1, 0)$,

斜率为 k 的直线 l_1 交抛物线于 B, C 两点, 且 $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, 经过

点 C 的斜率为 $-\frac{1}{2}k$ 的直线 l_2 与椭圆相交于 P, Q 两点.

(I) 若抛物线的准线经过点 A , 求抛物线的标准方程和焦点坐标;

(II) 是否存在 p , 使得四边形 $APBQ$ 的面积取得最大值? 若存在, 请求出这个最大值及 p 的值; 若不存在, 请说明理由.



22. (本题满分 15 分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax - 1$.

(I) 讨论函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在其定义域内的单调性;

(II) 若 $f(x) \geq 0$ 对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 设 $h(x) = e^x f(x)$, 证明: $h(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在唯一的极大值点 t , 且 $h(t) < \frac{3}{16}$.

