

2021 年 1 月“八省联考”考前预热卷

数 学

1. D 【解析】因为 $A = \{x | -5 < x < 1\}$, $B = \{x | x^2 \leq 4\} = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 所以 $A \cap B = \{x | -2 \leq x < 1\}$.

2. C 【解析】由 $(1+i)z=1$ 得 $z = \frac{1}{1+i}i = \frac{1(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, 所以 z 的虚部为 $-\frac{1}{2}$. 故选 C.

3. A 【解析】因为 $1 - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, 所以 $1 - \frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = \sin\theta$, 所以

$$\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = 1, \text{ 所以 } \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以 } \cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

故选 A.

4. C 【解析】两组至少都是 3 人, 则分组中两组的人数分别为 3、5 或 4、4, 又因为 3 名女干部不能单

独成一组, 则不同的派遣方案种数为 $\left(C_8^3 + \frac{C_8^4}{A_2} - 1\right)A_2^2 = 180$. 故选 C.

5. D 【解析】对于选项 A, 当 $x=0$ 时, $x^2 \geq 1$ 不成立, 故 A 错误;

对于选项 B, 命题“ $\exists a, b \in R, \frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$ ”的否定是“ $\forall a, b \in R, \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \leq 2$ ”, 当 $a=3, b=1$ 不成立,

故 B 错误;

对于选项 C, 当一直线斜率为 0, 另一直线斜率不存在时, “它们的斜率之积一定等于 -1”不成立, 故 C

错误;

对于选项 D, 由方程 $\frac{x^2}{2+m} - \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示双曲线等价于 $(2+m)(m+1) > 0$, 即 $m < -2$ 或 $m > -1$, 所

以“ $m > -1$ ”是“方程 $\frac{x^2}{2+m} - \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示双曲线”的充分不必要条件, 故 D 正确. 故选 D.

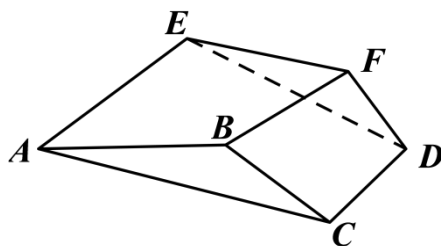
6. B 【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 关于原点对称, 且 $f(-x) = \frac{\ln(-x)^2}{-x} = -\frac{\ln x^2}{x} = -f(x)$, $\therefore f(x)$

为奇函数, 图象关于原点对称, 故 A, C 错误; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$, 故当 $x \in (0, e)$ 时,

$f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 故 D 错误, B 正确. 故选

B.

7. D 【解析】如图所示, $AE \parallel BF \parallel CD$, 四边形 $ACDE$ 为梯形.



对选项 A, 由题知: “羡除”有且仅有两个面为三角形, 故 A 正确;

对选项 B, 因为 $AE \parallel BF \parallel CD$, 所以“羡除”一定不是台体, 故 B 正确;

对选项 C, 假设四边形 $ABFE$ 和四边形 $BCDF$ 为平行四边形,

则 $AE \parallel BF \parallel CD$, $AE = BF = CD$, 则四边形 $ACDE$ 为平行四边形,

与已知四边形 $ACDE$ 为梯形矛盾, 故不存在, C 正确.

对选项 D, 若 $AE \neq BF \neq CD$, 则“羡除”有三个面为梯形, 故 D 错误.

故选 D.

8. C 【解析】 $F(x) = (f(x) - 1)(f(x) - a) = 0$, $f(x) = 1$ 或 $f(x) = a$,

$x < 0$ 时, $f(x) = xe^x + 1 < 1$, $f'(x) = (x + 1)e^x$,

$x < -1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减, $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增,

$\therefore f(x)$ 的极小值为 $f(-1) = 1 - \frac{1}{e}$, 又 $f(x) < 1$, 因此 $f(x) = 1$ 无解.

此时 $f(x) = a$ 要有两解, 则 $1 - \frac{1}{e} < a < 1$,

又 $f(x)$ 是奇函数, $\therefore x > 0$ 时, $f(x) = 1$ 仍然无解, $f(x) = a$ 要有两解, 则 $-1 < x < \frac{1}{e} - 1$.

综上, $a \in \left(-1, \frac{1}{e} - 1\right) \cup \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right)$.

故选 C.

9. CD 【解析】 $\because \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$, $\therefore b > a > 0$, $\therefore b^3 > a^3$, A 错误; $|a| < |b|$, B 错误; $\frac{b}{a} > 1$, C 正确; $\left(\frac{1}{2}\right)^a > \left(\frac{1}{2}\right)^b$,

D 正确. 故选 CD.

10. ACD 【解析】由双曲线方程 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$ 知 $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, 焦点在 y 轴, 渐近线方程为 $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \sqrt{2}x$,

A 正确: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6}$, 以 F_1F_2 为直径的圆的方程是 $x^2 + y^2 = 6$, B 错; 由 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ y = \sqrt{2}x \end{cases}$ 得

$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -2 \end{cases}$, 由对称性知 M 点横坐标是 $\pm\sqrt{2}$, C 正确;

$S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{1}{2}|F_1F_2||x_M| = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$, D 正确. 故选 ACD.

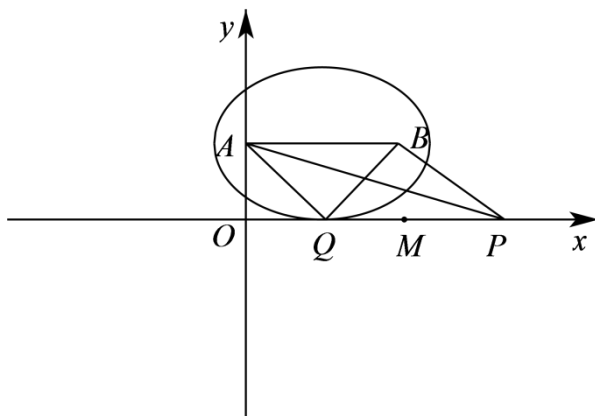
11. ABD 【解析】因为 $a_1 = 1, a_5 = 27a_2$, 所以有 $a_1 \cdot q^4 = 27a_1 \cdot q \Rightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3$, 因此选项 A 正确; 因为

$S_n = \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$, 所以 $S_n + 2 = \frac{1-3^n}{1-3} + 2 = \frac{1}{2}(3^n + 3)$, 因为 $\frac{S_{n+1} + 2}{S_n + 2} = \frac{\frac{1}{2}(3^{n+1} + 3)}{\frac{1}{2}(3^n + 3)} = 1 + \frac{2}{1 + 3^{1-n}} \neq$ 常

数, 所以数列 $\{S_n + 2\}$ 不是等比数列, 故选项 B 正确; 因为 $S_5 = \frac{1}{2}(3^5 - 1) = 121$, 所以选项 C 不正确;

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3^{n-1} > 0$, 因为当 $n \geq 3$ 时, $\lg a_{n-2} + \lg a_{n+2} = \lg(a_{n-2} \cdot a_{n+2}) = \lg a_n^2 = 2\lg a_n$, 所以选项 D 正确. 故选 ABD.

12. ACD 【解析】设 $A(0,1)$, $B(2,1)$, $f(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (0-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (0-1)^2}$ 表示 x 轴上点 $P(x,0)$ 到 A, B 两点的距离之和, 设 $Q(1,0)$, 以 A, B 为焦点, Q 为短轴上一个端点, 作椭圆, x 轴与此椭圆相切于点 Q , 当 P 从 Q 向右移动时, $|PA| + |PB|$ 逐渐增大, 即函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, A 正确; 当 P 与 Q 重合时, $|PA| + |PB|$ 最小, 最小值为 $2\sqrt{2}$, 因此 $f(x)$ 的值域是 $[2\sqrt{2}, +\infty)$, C 正确; 函数图象关于直线 $x = 1$ 对称, 不是中心对称, B 错误; 当 $x = 0$ 或 $x = 2$ 时, $f(x) = 1 + \sqrt{5}$, 由于 $f(x) \geq 2\sqrt{2}$, 因此 $f(x) = 0$ 和 $f(x) = 2$ 都无解, D 正确. 故选 ACD.



13. 8 【解析】因为 $\vec{a} = (-1, m)$, $\vec{b} = (2, -3)$, 所以 $\vec{a} + 2\vec{b} = (3, m-6)$. 因为 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \perp \vec{b}$, 所以

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \vec{b} = 6 - 3(m - 6) = 0, \text{ 解得 } m = 8.$$

14. 15 【解析】因为 $(\sqrt{x} - \frac{1}{x})^6$ 的展开式的通项是 $C_6^r (\sqrt{x})^{6-r} (-1)^r (\frac{1}{x})^r = C_6^r (-1)^r x^{3-\frac{3r}{2}}$, 当 $3 - \frac{3r}{2} = 0$ 时, $r = 2$, 所以展开式中的常数项是 $C_6^2 (-1)^2 = 15$.

15. $\frac{\pi}{12}$ 【解析】函数 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$, 将函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 φ 个单位后, 得到函数 $y = 2 \sin(2x + 2\varphi + \frac{\pi}{3})$ 的图象, 因为 $g(x)$ 为偶函数, 所以 $2\varphi + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 则 $\varphi = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$. 当 $k = 0$ 时, $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

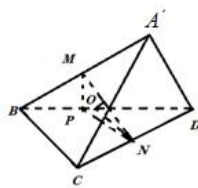
16. $\frac{\sqrt{58}}{2}$ 【解析】过 M 做 $MP \perp BD$ 于点 P , 连接 PN , 因为平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , 所以 $MP \perp PN$, 可

求得 $MP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BP = \frac{3}{2}$, 所以 $DP = \frac{5}{2}$, 在三角形 DPN 中, $\angle PDN = 30^\circ$, $DN = \sqrt{3}$, 所以 $PN = \frac{\sqrt{7}}{2}$,

所以 $MN = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 由题意可知, 四面体 $ABCD$ 的外接为 BD 中点, 设为 O , 过 O 做 $OH \perp MN$ 于 H , 连

接 ON , 可求得 $ON = 1$, 从而得 $HN = \frac{\sqrt{10}}{4}$, 所以 $OP = \sqrt{1 - \frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, 因为球的半径为 2, 故所截得的

线段长为 $2\sqrt{2^2 - (\frac{\sqrt{6}}{4})^2} = \frac{\sqrt{58}}{2}$.



17. (10 分)

【解析】解法 1: 由正弦定理, 得 $3 \sin C \cos B = 3 \sin[\pi - (B + C)] + 2 \sin B$,

整理得 $3 \sin B \cos C + 2 \sin B = 0$. 因为 $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos C = -\frac{2}{3}$. (5 分)

解法 2: 由 $3c \cos B = 3a + 2b$, 得 $3ac \cos B = 3a^2 + 2ab$,

由余弦定理, 得 $3(a^2 + c^2 - b^2) = 6a^2 + 4ab$, 整理得 $3(-a^2 + c^2 - b^2) = 4ab$,

即 $3ab \cos C + 2ab = 0$. 所以 $\cos C = -\frac{2}{3}$. (5 分)

选① $a = 3$. 由余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow 21 = 9 + b^2 - 6 \times b \times (-\frac{2}{3})$,

所以 $b^2+4b-12=0$, 解得 $b=2$ 或 $b=-6$ (舍去),

所以问题中的三角形存在. (10 分)

选② $S_{ABC} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, 故 $ab=9$, (7 分)

由余弦定理可得 $c^2+a^2+b^2-2ab\cos C \Rightarrow 21 = a^2+b^2 + \frac{4}{3}ab$, 又 $a^2+b^2 \geq 2ab$,

所以 $21 = a^2+b^2 + \frac{4}{3}ab \geq \frac{10}{3}ab \Rightarrow ab \leq 6.3$, 与 $ab=9$ 矛盾,

所以问题中的三角形不存在. (10 分)

选③ $3\sin B=2\sin A$. 由正弦定理得, $3\sin B=2\sin A \Rightarrow 3b=2a$, (7 分)

由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \Rightarrow 21 = \frac{21}{4}b^2$,

所以 $b=2$ 或 $b=-2$ (舍去),

所以问题中的三角形存在. (10 分)

18. (12 分)

【解析】(1) 由 $S_n = 2a_n - 1$ 得: $S_1 = 2a_1 - 1$, 即 $a_1 = 1$,

由 $S_n = 2a_n - 1$ 得: $S_{n+1} = 2a_{n+1} - 1$, 两式相减得: $a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n$,

即 $a_{n+1} = 2a_n$, 即数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, (4 分)

则 $a_n = 2^{n-1}$,

则 $S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$. (6 分)

(2) 由 (1) 知: $b_n = |2^n - 16|$, 则 $b_n = \begin{cases} 16-2^n & (1 \leq n \leq 4) \\ 2^n-16 & (n > 4) \end{cases}$,

则当 $1 \leq n \leq 4$ 时, $T_n = (16-2^1) + (16-2^2) + \cdots + (16-2^n)$

$$= 16n - (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) = 16n - \frac{2(1-2^n)}{1-2}$$

$$= 16n - 2^{n+1} + 2; \quad (9 \text{ 分})$$

当 $n > 4$ 时,

$$T_n = (16-2^1) + (16-2^2) + \cdots + (16-2^4) + (2^5-16) + (2^6-16) + (2^7-16) + \cdots + (2^n-16)$$

$$= 2T_4 + (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) - 16n$$

$$= 2 \times 34 + \frac{2(1-2^n)}{1-2} - 16n = 2^{n+1} - 16n + 66,$$

$$\text{则 } T_n = \begin{cases} 16n - 2^{n+1} + 2 & (1 \leq n \leq 4) \\ 2^{n+1} - 16n + 66 & (n > 4) \end{cases}. \quad (12 \text{ 分})$$

19. (12 分)

【解析】(1) 由题, 不超过 6 小时的频率为 $\frac{100+100+200}{1000} = 0.4$, 则 100 辆车中有 40 辆不超过 6 小时, 60

辆超过 6 小时, (2 分)

则 2×2 列联表如下:

	男	女	合计
不超过 6 小时	10	30	40
6 小时以上	20	40	60
合计	30	70	100

$$\text{根据上表数据代入公式可得 } K^2 = \frac{100 \times (20 \times 30 - 10 \times 40)^2}{30 \times 70 \times 60 \times 40} = \frac{50}{63} \approx 0.794 < 2.706$$

所以没有超过 90% 的把握认为“停车是否超过 6 小时”与性别有关. (5 分)

(2) (i) 由题意知: X 的可取值为 5, 8, 11, 15, 19, 30, 则

$$P(X=5) = \frac{1}{10}, P(X=8) = \frac{1}{10}, P(X=11) = \frac{1}{5}, P(X=15) = \frac{1}{5},$$

$$P(X=19) = \frac{7}{20}, P(X=30) = \frac{1}{20}. \quad (7 \text{ 分})$$

所以 X 的分布列为:

X	5	8	11	15	19	30
$P(X)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{20}$

(8 分)

$$\therefore E(X) = 5 \times \frac{1}{10} + 8 \times \frac{1}{10} + 11 \times \frac{1}{5} + 15 \times \frac{1}{5} + 19 \times \frac{7}{20} + 30 \times \frac{1}{20} = 14.65. \quad (9 \text{ 分})$$

(ii) 由题意得 $P(X > 14.65) = \frac{1}{5} + \frac{7}{20} + \frac{1}{20} = \frac{3}{5}$, 所以 $\xi \sim B\left(3, \frac{3}{5}\right)$, (10 分)

所以 $P(\xi \geq 2) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = C_3^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 3 \times \frac{9}{25} \times \frac{2}{5} + \frac{27}{125} = \frac{81}{125}$. (12 分)

20. (12 分)

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore O$ 是 AC 的中点, $BD \perp AC$,

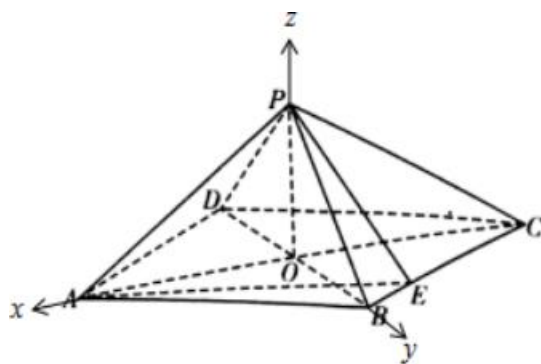
$\because BD \perp PA$, $PA \cap AC = A$, $\therefore BD \perp$ 平面 PAC , (2 分)

$\because PO \subset$ 平面 PAC , $\therefore BD \perp PO$.

$\because PA = PC$, O 是 AC 的中点, $\therefore PO \perp AC$.

$\because AC \subset$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$, $AC \cap BD = O$,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$. (5 分)



(2) 由 (1) 知, $PO \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \perp AC$.

$\therefore$ 以 O 为坐标原点, 以 OA , OB , OP 所在直线为 x , y , z 轴建立空间直角坐标系.

设四边形 $ABCD$ 的边长为 4, $PO = a$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $\therefore \triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 都是等边三角形.

$\therefore OA = OC = 2\sqrt{3}$.

$\therefore P(0, 0, a)$, $A(2\sqrt{3}, 0, 0)$, $C(-2\sqrt{3}, 0, 0)$, $E\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$,

$\overrightarrow{PA} = (2\sqrt{3}, 0, -a)$, $\overrightarrow{PE} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -a\right)$, $\overrightarrow{EC} = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$. (7 分)

$\because PA \perp PE$, $\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PE} = (2\sqrt{3}, 0, -a) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -a\right) = 0$,

即 $-3 + a^2 = 0$, 得 $a = \sqrt{3}$.

$$\therefore \overrightarrow{PA} = (2\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}), \quad \overrightarrow{PE} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -\sqrt{3}\right). \quad (9 \text{ 分})$$

设平面 PAE 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{由} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PA} = 2\sqrt{3}x_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PE} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{3}{2}y_1 - \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}, \text{取 } z_1 = 2, \text{ 得 } \vec{m} = \left(1, \frac{5\sqrt{3}}{3}, 2\right);$$

设平面 PEC 的一个法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{由} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EC} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{3}{2}y_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PE} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{3}{2}y_2 - \sqrt{3}z_2 = 0 \end{cases}, \text{取 } x_2 = -1, \text{ 得 } \vec{n} = (-1, \sqrt{3}, 2).$$

设二面角 $A-PE-C$ 的平面角为 θ , 由图可得, θ 为钝角,

$$\text{则 } \cos \theta = -\frac{\left| \vec{m} \cdot \vec{n} \right|}{\left| \vec{m} \right| \left| \vec{n} \right|} = -\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

$\therefore$ 二面角 $A-PE-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{15}}{5}$. (12 分)

21. (12 分)

【解析】(1) 设 $P(m, n)$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$,

$$\text{由 } \left| \overrightarrow{OP} \right| = \frac{3}{2}, \quad \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = -\frac{3}{4} \text{ 可得 } m^2 + n^2 = \frac{9}{4}, \quad (-c-m, -n) \cdot (c-m,$$

$$-n) = m^2 - c^2 + n^2 = \frac{9}{4} - c^2 = -\frac{3}{4},$$

即有 $c^2 = 3$, 即 $c = \sqrt{3}$, (2 分)

$$\text{又 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 可得 } a = 2, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1,$$

则椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (4 分)

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由题意可得 $M(-2, 0)$,

若直线 AB 的斜率不存在, 即 $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$, 由题意可得直线 MA , MB 的斜率大于 0, 即 $y_1 y_2 > 0$,

矛盾；（6分）

因此直线 BA 的斜率存在，设其方程为 $y=kx+m$ ．联立椭圆方程 $x^2+4y^2=4$ ，

化为： $(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$ ， $\therefore \Delta=64k^2m^2-16(1+4k^2)(m^2-1)>0$ ，化为：

$$1+4k^2>m^2.$$

$$\therefore x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}, \quad x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{1+4k^2}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}, \text{ 可得 } \tan \alpha \tan \beta=1, \quad \therefore \frac{y_1}{x_1+2} \cdot \frac{y_2}{x_2+2}=1,$$

$$\therefore (kx_1+m)(kx_2+m)=(x_1+2)(x_2+2), \text{ 化为: } (k^2-1)x_1x_2+(mk-2)(x_1+x_2)+m^2-4=0,$$

$$\therefore (k^2-1) \cdot \frac{4(m^2-1)}{1+4k^2} + (mk-2)\left(-\frac{8km}{1+4k^2}\right) + m^2 - 4 = 0, \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{化为 } 3m^2 - 16km + 20k^2 = 0, \text{ 解得 } m=2k, \text{ 或 } m=\frac{10}{3}k.$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的方程可以表示为 } y=kx+2k \text{ (舍去), 或 } y=kx+\frac{10}{3}k,$$

$$\text{则直线 } AB \text{ 恒过定点 } \left(-\frac{10}{3}, 0\right). \quad (12 \text{ 分})$$

22. (12分)

【解析】(1) 因为 $f(x)=e^x(x+a)$ ，所以 $f'(x)=e^x(x+a+1)$. (1分)

由 $f'(x)>0$ ，得 $x>-a-1$ ；由 $f'(x)<0$ ，得 $x<-a-1$.

所以 $f(x)$ 的增区间是 $(-a-1, +\infty)$ ，减区间是 $(-\infty, -a-1)$. (3分)

$$(2) \quad g(x)=f(x-a)-x^2=xe^{x-a}-x^2=x(e^{x-a}-x).$$

由 $g(x)=0$ ，得 $x=0$ 或 $e^{x-a}-x=0$. (6分)

设 $h(x)=e^{x-a}-x$ ，又 $h(0)=e^{-a}\neq 0$ ，即 $x=0$ 不是 $h(x)$ 的零点，

故只需再讨论函数 $h(x)$ 零点的个数. (5分)

$$\text{因为 } h'(x)=e^{x-a}-1,$$

所以当 $x\in(-\infty, a)$ 时， $h'(x)<0$ ， $h(x)$ 单调递减；当 $x\in(a, +\infty)$ 时， $h'(x)>0$ ， $h(x)$ 单调递增.

所以当 $x=a$ 时, $h(x)$ 取得最小值 $h(a)=1-a$. (6 分)

①当 $h(a)>0$, 即 $a<1$ 时, 无零点;

②当 $h(a)=0$, 即 $a=1$ 时, $h(x)>0, h(x)$ 有唯一零点; (8 分)

③当 $h(a)<0$, 即 $a>1$ 时, 因为 $h(0)=e^{-a}>0$, 所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上有且只有一个零点.

令 $x=2a$, 则 $h(2a)=e^a-2a$.

设 $\varphi(a)=h(2a)=e^a-2a(a>1)$, 则 $\varphi'(a)=e^a-2>0$, 所以 $\varphi(a)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $\forall a \in (1, +\infty)$, 都有 $\varphi(a) \geq \varphi(1)=e-2>0$, 所以 $h(2a)=\varphi(a)=e^a-2a>0$.

所以 $h(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上有且只有一个零点, 所以当 $a>1$ 时, $h(x)$ 有两个零点

综上, 当 $a<1$ 时, $g(x)$ 有一个零点; 当 $a=1$ 时, $g(x)$ 有两个零点; 当 $a>1$ 时, $g(x)$ 有三个零点.

(12 分)