

鄂南高中 黄冈中学 黄石二中 荆州中学 龙泉中学
武汉二中 孝感高中 襄阳四中 襄阳五中 宜昌一中 夷陵中学

2021 届高三湖北十一校第一次联考

数学试题

命题学校：襄阳五中 命题人：张华齐 薛东洋 审题人：袁进

考试时间：2020 年 12 月 9 日下午 15:00—17:00 试卷满分：150 分

一、单选题（共本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设全集为 R , 集合 $A = \{y | y = 2^x, x < 1\}$, $B = \{x | y = \sqrt{x^2 - 1}\}$, 则 $A \cap (\complement_R B) =$ ()
- A. $\{x | -1 < x < 2\}$
- B. $\{x | 0 < x < 1\}$
- C. $\emptyset$
- D. $\{x | 0 < x < 2\}$

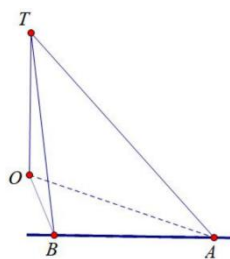
2. 已知 $z = \frac{4+2i}{1-i}$ (i 为虚数单位) 的共轭复数为 $\bar{z}$, 则 () $z \cdot \bar{z} =$ ()

- A. 10 B. 9 C. $\sqrt{10}$ D. 3

3. 书籍 $a = \log_{2021} \frac{1}{e}$, $b = \left(\frac{1}{e}\right)^{2021}$, $c = 2021^{\frac{1}{e}}$, (其中 e 为自然对数) 则 ()

- A. $c < a < b$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $a < c < b$

4. 为了增强数学的应用性，强化学生的理解，某学校开展了一次户外探究．当地有一座山，高度为 OT ，同学们先在地面选择一点 A ，在该点处测得这座山在西偏北 21.7° 方向，且山顶 T 处的仰角为 30° ；然后从 A 处向正西方向走140米后到达地面 B 处，测得该山在西偏北 81.7° 方向，山顶 T 处的仰角为 60° ．同学们建立了如图模型，则山高 OT 为（　　）



- A. $20\sqrt{7}$ 米 B. $25\sqrt{7}$ 米 C. $20\sqrt{21}$ 米 D. $25\sqrt{21}$ 米

5. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列, 若 $a_3 = 3a_5$, 则 $\frac{S_5}{S_6} = (\quad)$

- A. $\frac{9}{5}$ B. $\frac{5}{9}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{27}{5}$

6. 已知直线 l , m , 平面 α 、 β , 其中 $l \perp \alpha$, m 在平面 β 内, 下面四个命题:

- ①若 $\alpha P \beta$, 则 $l \perp m$; ②若 $\alpha \perp \beta$, 则 $l P m$;
③若 $l P m$, 则 $\alpha \perp \beta$; ④若 $l \perp m$, 则 $\alpha P \beta$.

以上命题中，正确命题的序号是（ ）

A. ①②

B. ②④

C. ①③

D. ③④

7. 设 $a > 0$ ， $b > 0$ ，则 “ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 4$ ” 是 “ $ab \geq \frac{1}{4}$ ” 的（ ）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 蹴鞠，又名蹴球，蹴圆，筑球，踢圆等，蹴有用脚蹴、踢、蹋的含义，鞠最早系外包皮革、内实米糠的球。因而蹴鞠就是指古人以脚蹴，蹋、踢皮球的活动，类似今日的足球。2006年5月20日，蹴鞠已作为非物质文化遗产经国务院批准列入第一批国家非物质文化遗产名录。3D打印属于快速成形技术的一种，它是一种以数字模型文件为基础，运用粉末状金属或塑料等可粘合材料，通过逐层堆叠累积的方式来构造物体的技术（即“积层造型法”）。过去常在模具制造、工业设计等领域被用于制造模型，现正用于一些产品的直接制造，特别是一些高价值应用（比如髋关节、牙齿或一些飞机零部件等）。已知某鞠的表面上有四个点 A 、 B 、 C 、 D ，满足任意两点间的直线距离为 $2\sqrt{6}\text{cm}$ ，现在利用3D打印技术制作模型，该模型是由鞠的内部挖去由 $ABCD$ 组成的几何体后剩余的部分，打印所用原料密度为 $1\text{g}/\text{cm}^3$ ，不考虑打印损耗，制作该模型所需原料的质量约为（ ）（参考数据：取 $\pi = 3.14$ ， $\sqrt{2} = 1.41$ ， $\sqrt{3} = 1.73$ ，精确到0.1）

A. 113.0g

B. 267.9g

C. 99.2g

D. 13.8g

二、多选题（本大题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题列出的四个选项中，有多个选项是符合题目要求的，全部选对得5分，部分选对得3分，有选错的得0分）

9. 我国5G技术研发试验在2016-2018年进行，分为5G关键技术试验、5G技术方案验证和5G系统验证三个阶段实施。2020年初以来，5G技术在我国已经进入高速发展的阶段，5G手机的销量也逐渐上升，某手机商城统计了近5个月来5G手机的实际销量，如下表所示：

月份	2020年6月	2020年7月	2020年8月	2020年9月	2020年10月
月份编号 x	1	2	3	4	5
销量 y /部	50	96	a	185	227

若 y 与 x 线相关，且求得线回归方程为 $\hat{y} = 45x + 5$ ，则下列说法正确的是（ ）

A. $a = 142$

B. y 与 x 正相关

C. y 与 x 的相关系数为负数

D. 12月份该手机商城的5G手机销量约为365部

10. 已知 F 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的右焦点， M 为左焦点， P 为椭圆上的动点，且椭圆上至少有21个不同的点 $P_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ ， $|FP_1|$ ， $|FP_2|$ ， $|FP_3|$ ， $\dots$ 组成公差为 d 的等差数列，则（ ）

A. $\triangle FPM$ 的面积最大时， $\tan \angle FPM = \frac{24}{7}$

B. $|FP_i|$ 的最大值为8

C. d 的值可以为 $\frac{3}{10}$

D. 椭圆上存在点 P , 使 $\angle FPM = \frac{\pi}{2}$

11. 在数学史上, 为了三角计算的简便并且更加追求计算的精确性, 曾经出现过下列两种三角函数: 定义 $1 - \cos \theta$ 为角 θ 的正矢, 记作 $\text{versin } \theta$ 为角 θ 的余矢, 记作 $\text{coversin } \theta$, 则下列命题中正确的是 ()

A. 函数 $y = \text{coversin } x - \text{versin } x$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ 上是减函数

B. 若 $\frac{\text{coversin } x - 1}{\text{versin } x - 1} = 2$, 则 $\text{coversin } 2x - \text{versin } 2x = -\frac{7}{5}$

C. 函数 $f(x) = \text{versin}\left(2020x - \frac{\pi}{3}\right) + \text{coversin}\left(2020x + \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $f(x)$ 的最大值 $2 + \sqrt{2}$

D. $\text{versin}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{coversin } \theta$

12. 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$ (a 为常数), 则下列结论正确的有 ()

A. 若 $f(x)$ 有 3 个零点, 则 a 的范围为 $\left(\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$

B. $a = \frac{e}{2}$ 时, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极值点

C. $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 是零点 x_0 , 且 $-1 < x_0 < -\frac{1}{2}$

D. $a = 1$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 已知单位向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的夹角为 120° , $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 垂直, 则 $k =$ _____.

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 5, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2 + 2x - 5, & x < 0 \end{cases}$, 则满足 $f(x) + f(2x - 3) \geq 0$ 的 x 的取值范围是

_____. (用区间表示)

15. 湖北省 2021 年的新高考按照“3+1+2”的模式设置, “3”为全国统一高考的语文、数学、外语 3 门必考科目; “1”由考生在物理、历史 2 门中选考 1 门科目; “2”由考生在思想政治、地理、化学、生物学 4 门中选考 2 门科目. 则甲, 乙两名考生在 6 门选考科目中恰有两门科目相同的条件下, 均选择物理的概率为 _____.

16. 已知 F_1, F_2 分别为曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, C 的离心率 $e = 2$, 过 F_2 的直线与双曲线 C 的右支交于 A, B 两点 (其中 A 点在第一象限), 设点 M, N 分别为 $\triangle AF_1F_2, \triangle BF_1F_2$ 的内心, 则 $|MN|$ 的范围是_____. (用只含有 a 的式子表示)

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 为钝角, $\sin(A+B) = \frac{3}{5}, \sin(A-B) = \frac{1}{5}$.

(1) 求证: $\tan A = 2 \tan B$;

(2) 设 $AB = 6$, 求 AB 边上的高.

18. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 与下项等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1 = 3$, 且 $b_3 - a_3, 20, a_5 + b_2$ 既是等差数列, 又是等比数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 在 (1) $c_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} + (-1)^n b_n$,

(2) $c_n = a_n \cdot b_n$,

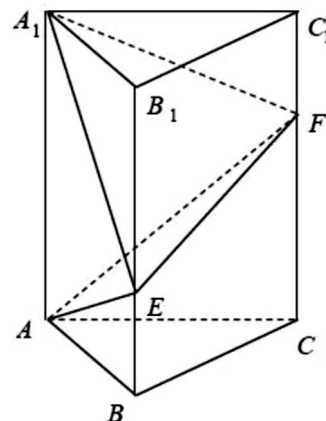
(3) $c_n = \frac{2(a_n + 3)}{a_n a_{n+1} b_{n+1}}$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并完成求解.

若_____, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

注: 如果选择多个条件分别作答, 按照第一个解答计分.

19. (12 分) 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = a$, $AA_1 = b$, 点

E, F 分别在 BB_1, CC_1 , 且 $BE = \frac{1}{3}BB_1$, $C_1F = \frac{1}{3}CC_1$. 设 $\lambda = \frac{b}{a}$.



(1) 当异面直线 AE 与 A_1F 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 求 λ 的值.

(2) 当 $\lambda = \frac{3}{2}$ 时, 求二面角 $A-EF-A_1$ 的大小.

20. (12 分) 新冠肺炎是 2019 年 12 月 8 日左右出现不明原因肺炎, 在 2020 年 2 月 11 日确诊为新型冠状病毒肺炎. 新型冠状病毒肺炎 (Corona Virus Disease 2019, COVID-19) 是由严重急性呼吸系统综合征冠状病毒 2 (severe acute respiratory syndrome coronavirus 2, SARS-CoV-2) 感染后引起的一种急性呼吸道传染病. 现已将该病纳入《中华人民共和国传染病防治法》规定的乙类传染病, 并采取甲类传染病的预防、控制措施. 2020 年 5 月 15 日, 习近平总书记主持召开中共中央政治局会议, 讨论国务院拟提请第十三届全国人民代表大会第三次会议审议的《政府工作报告》稿. 会议指出, 今年下一阶段, 要毫不放松常态化疫情防控, 着力做好经济社会发展各项工作.

某企业积极响应政府号召, 努力做好复工复产工作. 准备投产一批特殊型号的产品, 已知该种产品的成本 $f(x)$ 与产量 x 的函数关系式为:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 20x + 10 (x > 0).$$

该种产品的市场前景无法确定, 有三种可能出现的情况, 各种情形发生的概率及产品价格 $g(x)$ 与产量 x 的函数关系式如下表所示:

市场情形	概率	价格 $g(x)$ 与产量 x 函数关系式
好	0.4	$g(x) = 164 - 3x$
中	0.4	$g(x) = 101 - 3x$
差	0.2	$g(x) = 70 - 3x$

设 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$ 分别表示市场情形好、中、差时的利润, 随机变量 ξ 表示当产量为 x 时而市场前景无法确定的利润.

21. (12 分) 已知直线 $y = x - 2$ 与抛物线 $y^2 = 2px$ 相交于 A, B 两点, 满足 $OA \perp OB$. 定点 $C(4, 2)$, $D(-4, 0)$, M 是抛物线上一动点, 设直线 CM , DM 与抛物线的另一个交点分别是 E, F .

(1) 求抛物线的方程;

(2) 求证: 当 M 点在抛物线上变动时 (只要点 E, F 存在且不重合), 直线 EF 恒过一个定点; 并求出这个定点的坐标.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax$

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 是 $f(x)$ 的两个零点.

证明: (i) $x_1 + x_2 > \frac{2}{a}$;

(ii) $x_2 - x_1 > \frac{2\sqrt{1-ea}}{a}$.