

2021 届高三湖北十一校第一次联考

数学答案

BABCC CAC 9、AB 10、ABC 11、BD 12、AC

1、B 由题意知： $A = \{y | 0 < y < 2\}$ ， $B = \{x | x \leq -1, x \geq 1\}$ ，
所以 $C_R B = \{x | -1 < x < 1\}$ ，所以 $A \cap (C_R B) = \{x | 0 < x < 1\}$

2、A $z = \frac{4+2i}{1-i} = 1+3i$ ，则 $\bar{z} = 1-3i$ ， $z \cdot \bar{z} = (1+3i) \cdot (1-3i) = 10$ ，

3、B 因为 $0 < \frac{1}{e} < 1$ ，所以 $a < 0$ ， $0 < b < 1$ ， $c > 1$ ，所以 $a < b < c$ ，

4、C 设山 OT 的高度为 h ，在 $Rt \triangle AOT$ 中， $\angle TAO = 30^\circ$ ， $AO = \frac{h}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}h$ ，

在 $Rt \triangle BOT$ 中， $\angle TBO = 60^\circ$ ， $BO = \frac{h}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}h$ ，

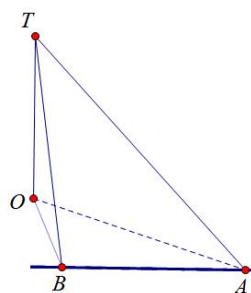
在 $\triangle AOB$ 中， $\angle AOB = 81.7^\circ - 21.7^\circ = 60^\circ$ ，

由余弦定理得， $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos 60^\circ$ ；

即 $140^2 = 3h^2 + \frac{1}{3}h^2 - 2 \times \sqrt{3}h \times \frac{\sqrt{3}}{3}h \times \frac{1}{2}$ ，

化简得 $h^2 = \frac{3}{7} \times 140^2$ ；又 $h > 0$ ，所以解得 $h = 140 \times \sqrt{\frac{3}{7}} = 20\sqrt{21}$ ；

即山 OT 的高度为 $20\sqrt{21}$ (米)。



5、C 依题意， $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列，则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，则 $\frac{S_5}{S_9} = \frac{5a_3}{9a_5} = \frac{5}{9} \times 3 = \frac{5}{3}$ 。故选：C。

6、C 对于①，若 $\alpha // \beta$ ，由 $l \perp \alpha$ 得到直线 $l \perp \beta$ ，所以 $l \perp m$ ，故①正确；

对于②，若 $\alpha \perp \beta$ ，直线 l 在 β 内或者 $l // \beta$ ，则 l 与 m 的位置关系不确定；

对于③，若 $l // m$ ，则 $m \perp \alpha$ ，由面面垂直的性质定理可得 $\alpha \perp \beta$ ；故③正确；

对于④，若 $l \perp m$ ，则 α 与 β 可能相交；故④错误；所以 C 选项是正确的。

7、A 由题意可知： $a + b \leq 4ab$ ，又 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ，所以 $4ab \geq 2\sqrt{ab}$ ，可得 $ab \geq \frac{1}{4}$ ；但 $ab \geq \frac{1}{4}$ ，
当 $a = 4$ ， $b = \frac{1}{16}$ 时， $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 4$ 矛盾；故选 A

8、C 正四面体外接球问题，所需要材料即为正四面体外接球体积与正四面体体积差。正四面体的棱长为 a ，则正四面体的高为 $\frac{\sqrt{6}a}{3}$ ，外接球半径为 $\frac{\sqrt{6}a}{4}$ ，内切球半径为 $\frac{\sqrt{6}a}{12}$ ，所以 3D 打印的体积为：

$V = \frac{4}{3}\pi(\frac{\sqrt{6}}{4}a)^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{8}a^3\pi - \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ，又 $a^3 = 48\sqrt{6}$ ，

所以 $V = 36\pi - 8\sqrt{3} \approx 113.04 - 13.84 = 99.2$ ，故选 C

9、AB 由表中数据，计算得 $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (1+2+3+4+5) = 3$ ，所以 $\bar{y} = 45 \times 3 + 5 = 140$ ，于是得

$50+96+a+185+227=700$ ，解得 $a=142$ ，故 A 正确；由回归方程中的 x 的系数为正可知， y 与 x 正相关，且其相关系数 $r > 0$ ，故 B 正确，C 错误；12 月份时， $x=7$ ， $\hat{y}=320$ 部，故 D 错误。

10、ABC 由椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ，当点 P 为短轴顶点时， $\angle FPM$ 最大， $\triangle FPM$ 的面积最大，此时

$\tan \angle FPM = \frac{24}{7}$ ，此时角为锐角，故 A 正确、D 错误；椭圆上的动点 P ， $a-c \leq |PF_i| \leq a+c$ ，

即有 $2 \leq |PF_i| \leq 8$ ，又椭圆上至少有 21 个不同的点 $P_i (i=1,2,3,\dots)$ ， $|FP_1|, |FP_2|, |FP_3|, \dots$ 组

成公差为 d 的等差数列，所以 $|FP_1|$ 最大值 8，B 正确；

设 $|FP_1|, |FP_2|, |FP_3|, \dots$ 组成的等差数列为 $\{a_n\}$, 公差 $d > 0$, 则 $a_1 \geq 2, a_n \leq 8$, 又 $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$,

所以 $d \leq \frac{6}{n-1} \leq \frac{6}{21-1} = \frac{3}{10}$, 所以 $0 < d \leq \frac{3}{10}$, 所以 d 的最大值是 $\frac{3}{10}$, 故 C 正确,

11、**BD** $y = \text{coversinx} - \text{versinx} = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$, 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ 单调递减, 所以

A 错误; 因为 $\frac{\text{coversinx}-1}{\text{versinx}-1} = \tan x = 2$, 则 $\text{coversin}2x - \text{versin}2x = \cos 2x - \sin 2x =$

$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$, 即 $\frac{1 - \tan^2 x - 2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{7}{5}$, 所以 B 正确;

对 $C: f(x) = \text{versin}(2020x - \frac{\pi}{3}) + \text{coversin}(2020x + \frac{\pi}{6}) = 2 - \cos(2020x - \frac{\pi}{3}) - \sin(2020x + \frac{\pi}{6}) = 2 - 2 \sin(2020x + \frac{\pi}{6})$, 所以 $f(x)$ 的最大值 4.

$\text{versin}(\frac{\pi}{2} - \theta) = 1 - \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = 1 - \sin \theta = \text{coversin} \theta$, 故 D 正确;

12、**AC** 若 $f(x) = e^x - ax^2$ 有 3 个零解, 即 $y = a$ 与 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 有三个交点,

若 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$, 则 $g'(x) = \frac{e^x x^2 - e^x 2x}{x^4} = \frac{x e^x (x-2)}{x^4}$ 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在此区间内的值域为 $(0, +\infty)$, $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 在此区间内的值域为 $[\frac{e^2}{4}, +\infty)$

故 $y = a$ 与 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 有三个交点, 则 $a \geq \frac{e^2}{4}$, 故 A 正确

若 $a = \frac{e}{2}$, 则 $f(x) = e^x - \frac{e}{2} x^2$, $f'(x) = e^x - ex$, $f''(x) = e^x - e$, 则 $f'(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f'(x)_{\max} = f'(1) = 0$, 故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减, 故 B 错误

若 $a = \frac{1}{2}$, 则 $f(x) = e^x - \frac{1}{2} x^2$, 此时 $f(x)$ 仅有 1 个零点 x_0 , 且 $x_0 < 0$, 又 $f(-1) = e^{-1} - \frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{2-e}{2e} < 0$, $f(-\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^2 = \frac{8-\sqrt{e}}{8\sqrt{e}} > 0$, 则 $-1 < x_0 < -\frac{1}{2}$, 故 C 正确

若 $a = 1$, 则 $f(x) = e^x - x^2$, 当 $x = -1$ 时, $f(-1) = e^{-1} - (-1)^2 = \frac{1-e}{e} < 0$, 故 D 错误

13、 $\frac{4}{5}$ 由题意 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$, 又 $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $2\vec{a} - \vec{b}$ 垂直, 所以 $(k\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0$

所以: $k = \frac{4}{5}$

14、 $[1, +\infty)$ $f(x)$ 为奇函数且为增函数, $f(x) + f(2x-3) \geq 0$

即为 $f(x) \geq f(3-2x)$; 所以 $x \geq 3-2x$, 所以 $x \geq 1$

15、 $\frac{2}{5}$ 分类: (1) 物理(历史)大类中有两门相同的方法: $C_4^1 \cdot A_3^2 = 24$, 共 48 种;

(2) 物理和历史两大类间有两门相同的方法: $C_4^2 \cdot A_2^2 = 12$; 所以在 6 门选考科目中恰有两门科目共 60 种; 所以均选择物理的概率为 $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

16、 $[2a, \frac{4\sqrt{3}a}{3})$ 由曲线的性质可得: $\triangle AF_1 F_2$ 、 $\triangle BF_1 F_2$ 的内心 M 、 N 在直线 $x = a$ 上,

设 C 的右顶点为 E , 直线 AB 的倾斜角为 θ , 则 $\frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 且 $|MN| = |ME| + |NE|$,

在 $\text{Rt} \triangle MF_2 E$ 中, $\angle MF_2 E = \frac{\pi - \theta}{2}$, $|ME| = (c-a) \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})$,

同理, 在 $\text{Rt} \triangle NF_2 E$ 中, $\angle NF_2 E = \frac{\theta}{2}$, $|NE| = (c-a) \tan \frac{\theta}{2}$,

则 $|MN| = |ME| + |NE| = (c-a) \left[\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}) + \tan \frac{\theta}{2} \right]$

$= (c-a) \left(\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) = (c-a) \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2(c-a)}{\sin \theta} (\frac{\pi}{3} < \theta \leq \frac{\pi}{2})$

又 $e = 2$, 即 $c = 2a$, 故 $2a \leq |MN| < \frac{4\sqrt{3}a}{3}$

17. (1)证明: $\because \sin(A+B) = \frac{3}{5} \therefore \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{3}{5}$, 又 $\because \sin A \cos B - \cos A \sin B = \frac{1}{5}$
 $\therefore \sin A \cos B = \frac{2}{5} \quad \cos A \sin B = \frac{1}{5} \quad \therefore \tan A = 2 \tan B$ 5分

(2)解:由(1)知 $\cos(A+B) = \frac{4}{5}$, $\therefore \tan(A+B) = \frac{3}{4}$

即: $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{3}{4}$, 将 $\tan A = 2 \tan B$ 代入上式并整理得: $2 \tan^2 B + 4 \tan B - 1 = 0$

又因为 B 为锐角, $\tan B > 0$, 所以解得 $\tan B = \frac{\sqrt{6}-2}{2}$, $\therefore \tan A = 2 \tan B = \sqrt{6} - 2$ 7分

设 AB 上的高为 CD , 则 $AB = AD + DB = \frac{CD}{\tan A} + \frac{CD}{\tan B} = \frac{3CD}{\sqrt{6}-2} = 6$,

得 $CD = 2(\sqrt{6} - 2)$

故 AB 边上的高为 $2(\sqrt{6} - 2)$10分

18. (I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$,

由题得 $20 = b_3 - a_3 = a_5 + b_2$, 即 $\begin{cases} 20 = 3q^2 - (3 + 2d) \\ 20 = (3 + 4d) + 3q \end{cases}$

解得 $d = 2, q = 3$, 所以, $a_n = 2n + 1, b_n = 3^n$;6分

(II) (1), $c_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} + (-1)^n b_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + (-3)^n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) + (-3)^n$

则 $S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + (-3)^1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + 3^2 + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) + (-3)^n$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) + \frac{-3[1 - (-3)^n]}{1 - (-3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) + \frac{-3[1 - (-3)^n]}{4}$

故 $S_n = \frac{n}{2n+3} + \frac{3[(-3)^n - 1]}{4}$ 12分

(2), $c_n = a_n \cdot b_n = (2n + 1)3^n$;

$S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + \dots + (2n + 1)3^n$, ①

$3S_n = 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \dots + (2n + 1)3^{n+1}$, ②

由①-②, 得 $-2S_n = 3^2 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^n - (2n + 1)3^{n+1}$,

即 $S_n = n \cdot 3^{n+1}$ 12分

(3) $c_n = \frac{2(a_n+3)}{a_n a_{n+1} b_{n+1}} = \frac{2(2n+4)}{(2n+1)(2n+3)3^{n+1}} = \frac{1}{(2n+1)3^n} - \frac{1}{(2n+3)3^{n+1}} = \frac{1}{a_n b_n} - \frac{1}{a_{n+1} b_{n+1}}$

则 $S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = \frac{1}{a_1 b_1} - \frac{1}{a_2 b_2} + \frac{1}{a_2 b_2} - \frac{1}{a_3 b_3} + \dots + \frac{1}{a_n b_n} - \frac{1}{a_{n+1} b_{n+1}} = \frac{1}{a_1 b_1} - \frac{1}{a_{n+1} b_{n+1}}$

故 $S_n = \frac{1}{9} - \frac{1}{(2n+3)3^{n+1}}$ 12分

19. 解: 因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 所以 $AA_1 \perp$ 平面 ABC ,

因为 $AB, AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AC$,

又因为 $\angle BAC = 90^\circ$,

所以建立分别以 AB , AC , AA_1 为 x, y, z 轴的空间直角坐标系 $A-xyz$.

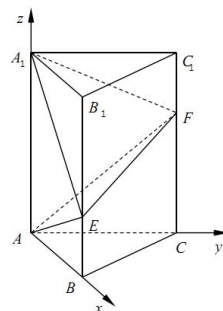
(1) 设 $a=1$, 则 $AB=AC=1$, $AA_1=\lambda$,

各点的坐标为 $A(0,0,0)$, $E(1, 0, \frac{\lambda}{3})$, $A_1(0, 0, \lambda)$, $F(0, 1, \frac{2\lambda}{3})$.

$\overrightarrow{AE} = (1, 0, \frac{\lambda}{3})$, $\overrightarrow{A_1F} = (0, 1, -\frac{\lambda}{3})$2分

因为 $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{A_1F}| = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{9}}$, $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{A_1F} = -\frac{\lambda^2}{9}$,

又异面直线 AE 与 A_1F 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$



所以 $|\cos(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{A_1F})| = \left| \frac{\frac{\lambda^2}{9}}{1 + \frac{\lambda^2}{9}} \right| = \frac{1}{2}$. 所以 $\lambda = 3$6 分

(2) 因为 $E(a, 0, \frac{b}{3})$, $F(0, a, \frac{2b}{3})$. $\therefore \overrightarrow{AE} = (a, 0, \frac{b}{3})$, $\overrightarrow{AF} = (0, a, \frac{2b}{3})$

设平面 AEF 的法向量为 $\overrightarrow{n_1} = (x, y, z)$, 则 $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$, 且 $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$.

即 $ax + \frac{bz}{3} = 0$, 且 $ay + \frac{2bz}{3} = 0$.

令 $z=1$, 则 $x = -\frac{b}{3a}$, $y = -\frac{2b}{3a}$. 又 $\lambda = \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$,

所以 $\overrightarrow{n_1} = (-\frac{b}{3a}, -\frac{2b}{3a}, 1) = (-\frac{1}{2}, -1, 1)$ 是平面 AEF 的一个法向量.

同理, $\overrightarrow{n_2} = (\frac{2b}{3a}, \frac{b}{3a}, 1) = (1, \frac{1}{2}, 1)$ 是平面 A_1EF 的一个法向量.10 分

所以 $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$ 所以平面 $AEF \perp$ 平面 A_1EF ,

当 $\lambda = \frac{3}{2}$ 时, 二面角 $A-EF-A_1$ 的大小为 $\frac{\pi}{2}$ 12 分

20. 解: (1) 根据所给的表格中的数据 and 题意写出

$$Q_1(x) = g(x) \cdot x - f(x) = -\frac{x^3}{3} + 144x - 10(x > 0)$$

.....2 分

同理可得:

$$Q_2(x) = g(x) \cdot x - f(x) = -\frac{x^3}{3} + 81x - 10(x > 0)$$

.....4 分

$$Q_3(x) = g(x) \cdot x - f(x) = -\frac{x^3}{3} + 50x - 10(x > 0)$$

.....6 分

(2) 由期望定义可知 $E\xi = 0.4Q_1(x) + 0.4Q_2(x) + 0.2Q_3(x) = -\frac{x^3}{3} + 100x - 10(x > 0)$

.....8 分

(3) 可知 $E\xi$ 是产量 x 的函数, 设 $h(x) = -\frac{x^3}{3} + 100x - 10(x > 0)$

则 $h'(x) = -x^2 + 100(x > 0)$,10 分

令 $h'(x) = 0$, 则 $x = 10$.

由题意及问题的实际意义可知, 当 $x = 10$ 时, $h(x)$ 取得最大值, 即 $E\xi$ 最大时的产量为 10.

.....12 分

21. (1) 将 $y = x - 2$ 代入 $y^2 = 2px$, 得 $(x - 2)^2 = 2px$

化简得: $x^2 - (4 + 2p)x + 4 = 0$

所以 $x_1x_2 = 4$, $x_1 + x_2 = 4 + 2p$;2 分

因此: $y_1y_2 = (x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = -4p$

又 $OA \perp OB$, 所以 $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$; 得 $p = 1$,

抛物线的方程 $y^2 = 2x$ 5 分

(2) 证明: 设 M 、 E 、 F 坐标分别是 $(\frac{y_0^2}{2}, y_0)$, $(\frac{y_1^2}{2}, y_1)$, $(\frac{y_2^2}{2}, y_2)$, 由 C 、 M 、 E 共线, 得 $y_0y_1 = 2(y_0 + y_1) - 8$, 所以 $y_1 = \frac{2y_0 - 8}{y_0 - 2}$

同理：由 D 、 M 、 F 共线，得 $y_2 = \frac{8}{y_0}$ 8 分

所以直线 EF 的方程为： $y_1 y_2 = y(y_1 + y_2) - 2x$ 10 分

将 $y_1 = \frac{2y_0-8}{y_0-2}$, $y_2 = \frac{8}{y_0}$ 代入直线 EF 方程得 $(2x-2y)y_0^2 + 4(4-x) + 8(2y-8) = 0$

所以 $\begin{cases} x-y=0 \\ 4-x=0 \\ 2y-8=0 \end{cases}$ ，方程组有解 $x=y=4$ 所以直线 EF 恒过定点 $(4,4)$ 12 分

22. 解：(1) $f(x)$ 定义域 $(0, +\infty)$ $f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}$

则当 $a \leq 0$ 时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数；2 分

当 $a > 0$ 时 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 为增函数，在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 为减函数4 分

(2) 证明：(i) 原不等式等价于 $\frac{x_1+x_2}{2} > \frac{1}{a}$ ，因为 $ax_1 = \ln x_1$ ① $ax_2 = \ln x_2$ ② 由②-①得，

$$a(x_2 - x_1) = \ln x_2 - \ln x_1 \text{ 则 } a = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{则 } \frac{x_1+x_2}{2} > \frac{1}{a} \text{ 等价于 } \frac{x_1+x_2}{2} > \frac{x_2-x_1}{\ln x_2 - \ln x_1}$$

因为 $x_2 > x_1 > 0$ 所以 $\ln x_2 - \ln x_1 > 0$ 即证 $\ln x_2 - \ln x_1 > \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 + x_2}$ ③

$$\text{等价于 } \ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{2(\frac{x_2}{x_1} - 1)}{1 + \frac{x_2}{x_1}} > 0$$

设 $t = \frac{x_2}{x_1}$, ($t > 1$) 设 $g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{1+t}$, ($t > 1$)

$$\text{③等价于 } g(t) > 0 \quad g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{2}{(1+t)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$$

$$g(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上为增函. } \ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{2(\frac{x_2}{x_1} - 1)}{1 + \frac{x_2}{x_1}} > 0$$

$$g(t) > g(1) = 0, \text{ 即 } \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{1}{a} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$(ii) \text{ 设 } h(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

所以 $h(x)$ 在 $(0, e]$ 上递增, 在 $(e, +\infty)$ 上递减

因为 $a = h(x)$ 有两个不相等的实根, 则 $0 < a < \frac{1}{e}$ 且 $1 < x_1 < e < x_2$

易知 $\ln x < x - 1$ 对 $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ 恒成立, 则 $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$ 对 $x \in (0, 1)$ 恒成立

$$ax_1 - 1 = \ln x_1 - 1 = \ln \frac{x_1}{e} > 1 - \frac{e}{x_1}, \text{ 因为 } x_1 > 0, \text{ 所以 } ax_1^2 - 2x_1 + e > 0$$

$$\text{又因为 } a > 0, \Delta = 4 - 4ae > 0, \text{ 所以 } x_1 < \frac{1}{a} - \frac{\sqrt{1 - ea}}{a} \text{ 或 } x_1 > \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{1 - ea}}{a}$$

$$\text{因为 } 0 < x_1 < e \text{ 且 } 0 < a < \frac{1}{e}, \text{ 所以 } x_1 < \frac{1}{a} - \frac{\sqrt{1 - ea}}{a}$$

$$\text{因为 } \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{1}{a}, \text{ 所以 } \frac{x_1 + x_2}{2} - x_1 > \frac{1}{a} - \left(\frac{1}{a} - \frac{\sqrt{1 - ea}}{a} \right)$$

$$\text{即 } x_2 - x_1 > \frac{2\sqrt{1 - ea}}{a} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$