

2021 届长郡十五校高三联考 第一次考试



数学试卷

由 长郡中学;衡阳八中;永州市四中;岳阳县一中;湘潭县一中;湘西州民中;
石门一中;澧县一中;益阳市一中;桃源县一中;株洲市二中;麓山国际 联合命题

炎德文化审校、制作

总分:150 分 时量:120 分钟

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 11\}$, 集合 $A = \{0, 4, 6, 8, 9, 10\}$, $B = \{x | 3 < x < 15\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B$ 中元素的个数为
A. 5 B. 4 C. 3 D. 2
2. 若复数 z 满足: $z(1+2i) = 5$, 则它的共轭复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点在
A. 第四象限 B. 第三象限 C. 第二象限 D. 第一象限
3. 已知 a, b 都是实数, 则“ $\ln \frac{1}{a} < \ln \frac{1}{b}$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的
A. 充要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 复兴号动车组列车, 是中国标准动车组的中文命名, 由中国铁路总公司牵头组织研制、具有完全自主知识产权、达到世界先进水平的动车组列车。2019 年 12 月 30 日, CR400BF-C 智能复兴号动车组在京张高铁实现时速 350 km 自动驾驶, 不仅速度比普通列车快, 而且车内噪声更小。我们用声强 I (单位: W/m^2) 表示声音在传播途径中每平方米上的声能流密度, 声强级 L (单位: dB) 与声强 I 的函数关系式为 $L = 10 \lg(aI)$, 已知 $I = 10^{13} \text{ W}/\text{m}^2$ 时, $L = 10 \text{ dB}$ 。若要将某列车的声强级降低 30 dB, 则该列车的声强应变为原声强的
A. 10^{-2} 倍 B. 10^{-3} 倍 C. 10^{-4} 倍 D. 10^{-5} 倍
5. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{3}$, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$, 若 $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 夹角的余弦值为
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
6. 若多项式 $x^2 + x^{10} = a_0 + a_1(x+1) + \cdots + a_9(x+1)^9 + a_{10}(x+1)^{10}$, 则 $a_3 =$
A. 56 B. -120 C. -56 D. 120
7. 新型冠状病毒肺炎(COVID-19)疫情暴发以来, 中国人民万众一心, 取得了抗疫斗争的初步胜利。面对秋冬季新冠肺炎疫情反弹风险, 某地防疫防控部门决定进行全面入户排查, 过程中排查到一户 5 口之家被确认为新冠肺炎密切接触者, 按要求进一步对该 5 名成员逐一进行核酸检测。若任一成员出现阳性, 则该家庭定义为“感染高危户”。设该家庭每个成员检测呈阳性相互独立, 且概

率均为 $p(0 < p < 1)$. 该家庭至少检测了 4 人才能确定为“感染高危户”的概率为 $f(p)$, 当 $p = p_0$ 时, $f(p)$ 最大, 此时 $p_0 =$

- A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $1 - \frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $1 - \frac{\sqrt{15}}{5}$

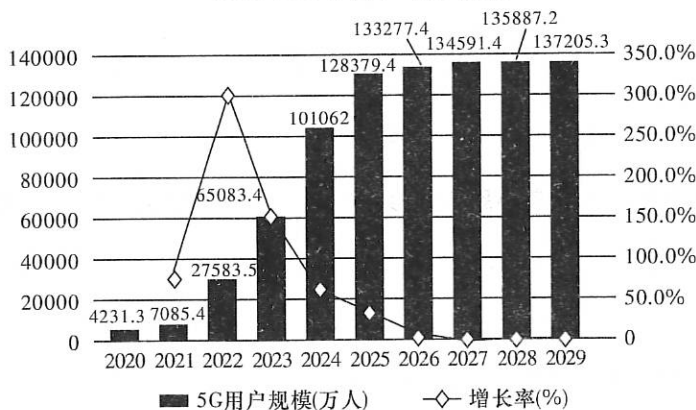
8. 已知 $A(2, 2)$, B, C 是抛物线 $y^2 = 2px$ 上的三点, 如果直线 AB, AC 被圆 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ 截得的两段弦长都等于 $2\sqrt{2}$, 则直线 BC 的方程为

- A. $x + 2y + 1 = 0$ B. $3x + 6y + 4 = 0$
C. $2x + 6y + 3 = 0$ D. $x + 3y + 2 = 0$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

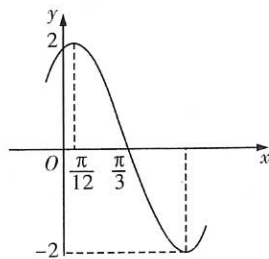
9. 2020 年 5 月 25 日工信部部长在“两会部长通道”表示, 中国每周大概增加 1 万多个 5G 基站, 4 月份增加 5G 用户 700 多万人, 5G 通信将成为社会发展的关键动力, 如图是某机构对我国未来十年 5G 用户规模的发展预测图, 关于下列说法, 其中正确的是

2020-2029 年中国 5G 用户规模



- A. 2025 年我国 5G 用户数规模最大
B. 2022 年我国 5G 用户规模年增长率最高
C. 从 2020 年到 2026 年, 我国的 5G 用户规模增长两年后, 其年增长率逐年下降
D. 这十年我国的 5G 用户数规模, 后 5 年的平均数与方差都分别大于前 5 年的平均数与方差
10. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则下列结论正确的是

- A. $f(x)$ 的解析式可以表示为 $f(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{6})$
B. 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 对称
C. 该图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位可得 $y = 2\sin 2x$ 的图象
D. 函数 $y = f(x)$ 在 $[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}]$ 单调递减



11. 在“全面脱贫”行动中, 贫困户小王 2020 年 1 月初向银行借了扶贫免息贷款 10000 元, 用于自己开设的农产品土特产品加工厂的原材料进货, 因产品质优价廉, 上市后供不应求, 据测算每月获得的利润是该月月初投入资金的 20%, 每月月底需缴纳房租 600 元和水电费 400 元, 余款作为资金全部用于再进货, 如此继续. 设第 n 月月底小王手中有现款为 a_n , 则下列论述正确的有 (参考数据: $1.2^{11} = 7.5, 1.2^{12} = 9$)
- A. $a_1 = 12000$ B. $a_{n+1} = 1.2a_n - 1000$
C. 2020 年小王的年利润为 40000 元 D. 两年后, 小王手中现款达 41 万

12. 函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则

- A. 函数 $g(x) = f(x)\cos x$ 为奇函数
- B. 函数 $h(x) = x[f(x) - f(2)]$ 有且只有 3 个零点
- C. 不等式 $x[f(x) - f(2)] \leq 0$ 的解集为 $(-\infty, -2] \cup [0, 2]$
- D. $f(x)$ 的解析式可能为 $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2$

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上)

13. 4 名同学到 A、B、C 三个小区参加垃圾分类宣传活动, 每名同学只去 1 个小区, 每个小区至少安排 1 名同学, 且同学甲安排在 A 小区, 则共有 _____ 种不同的安排方案.

14. 写出一个最大值为 3, 最小正周期为 2 的偶函数 $f(x) =$ _____.

15. 已知点 $A(-\sqrt{5}, 0), B(\sqrt{5}, 0), C(-1, 0), D(1, 0), P(x, y)$, 如果直线 PA、PB 的斜率之积为一 $\frac{4}{5}$, 记 $\angle PCD = \alpha, \angle PDC = \beta$, 则 $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} =$ _____.

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABC, AB \perp BC, PA = AB = 1, AC = \sqrt{2}$, 三棱锥 $P-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的表面上, 则球 O 的体积为 _____; 若点 M, N 分别是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle PAC$ 的重心, 直线 MN 与球 O 表面相交于 D, E 两点, 则线段 DE 长度为 _____. (本小题第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题(本大题共 6 小题, 共计 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

已知 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $(a+c)(\sin A - \sin C) = b(\sin A - \sin B)$.

(1) 求角 C ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 且 $a=4$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

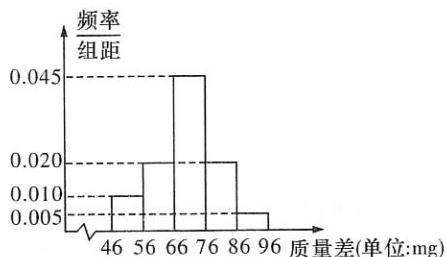
已知正项数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, 其前 n 项和为 S_n , 且 a_n 与 a_{n+1} 的等比中项是 $\sqrt{2S_n}$.

(1) 证明: $\{a_{n+2} - a_n\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_n = \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}$, 其前 n 项和为 T_n , 求使得 $T_n < \frac{n}{2^n}$ 的 n 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

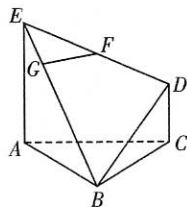
《中国制造 2025》是经国务院总理李克强签批, 由国务院于 2015 年 5 月印发的部署全面推进实施制造强国的战略文件, 是中国实施制造强国战略第一个十年的行动纲领. 制造业是国民经济的主体, 是立国之本、兴国之器、强国之基. 发展制造业的基本方针为质量为先, 坚持把质量作为建设制造强国的生命线. 某制造企业根据长期检测结果, 发现生产的产品质量与生产标准的质量差都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 并把质量差在 $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ 内的产品为优等品, 质量差在 $(\mu + \sigma, \mu + 2\sigma)$ 内的产品为一等品, 其余范围内的产品作为废品处理. 优等品与一等品统称为正品. 现分别从该企业生产的正品中随机抽取 1000 件, 测得产品质量差的样本数据统计如下:



- (1) 根据频率分布直方图, 求样本平均数 $\bar{x}$; (同一组中的数据用该组区间的中点值代表)
- (2) 根据大量的产品检测数据, 检查样本数据的方差的近似值为 100, 用样本平均数 $\bar{x}$ 作为 μ 的近似值, 用样本标准差 s 作为 σ 的估计值, 求该厂生产的产品为正品的概率;
 参考数据: 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则: $P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma < \xi \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.
- (3) 假如企业包装时要求把 3 件优等品和 5 件一等品装在同一个箱子中, 质检员每次从箱子中摸出三件产品进行检验, 记摸出三件产品中优等品的件数为 X , 求随机变量 X 的分布列及期望值.

20. (本小题满分 12 分)

在多面体 $ABCDE$ 中, 平面 $ACDE \perp$ 平面 ABC , 四边形 $ACDE$ 为直角梯形, $CD \parallel AE$, $AC \perp AE$, $AB \perp BC$, $CD=1$, $AE=AC=2$, F 为 DE 的中点, 且点 G 满足 $\vec{EB} = 4\vec{EG}$.



- (1) 证明: $GF \parallel$ 平面 ABC .
- (2) 当多面体 $ABCDE$ 的体积最大时, 求二面角 $A-BE-D$ 的余弦值.

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 2, 点 A 为 C 上位于第二象限的动点,

- (1) 若点 A 的坐标为 $(-2, 3)$, 求双曲线 C 的方程;
- (2) 设 B, F 分别为双曲线 C 的右顶点、左焦点, 是否存在常数 λ , 使得 $\angle AFB = \lambda \angle ABF$. 如果存在, 请求出 λ 的值; 如果不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知曲线 $f(x) = e^{mx} - 2(a+1)x + \frac{3}{2} (a \in \mathbf{R})$ 在 $x=0$ 处的切线斜率为 $-2a-1$.

- (1) 确定 m 的值, 并讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + 2(a+1)^2$, 求 a 的取值范围.