

2021 届长郡十五校高三联考 第一次考试

数学参考答案

一、二、选择题

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案	C	D	C	B	C	B	D	B	BC	ABC	BCD	BCD

1. C 【解析】 $\because$ 集合 $\complement_U A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$, $B = \{x | 3 < x < 15\}$,

$\therefore (\complement_U A) \cap B = \{5, 7, 11\}$, $\therefore (\complement_U A) \cap B$ 中元素的个数为 3. 故选 C.

2. D 【解析】由已知 $z = \frac{5}{1+2i} = 1-2i$, 于是 $\bar{z} = 1+2i$, 它在复平面内对应的点为 $(1, 2)$, 在第一象限, 故选 D.

3. C 【解析】 $\because \ln \frac{1}{a} < \ln \frac{1}{b}$, $\therefore 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, $\therefore a > b > 0$,

而“ $a^2 > b^2$ ”得到 $|a| > |b|$, $\therefore \ln \frac{1}{a} < \ln \frac{1}{b}$ 是“ $a^2 > b^2$ ”的充分不必要条件. 故选 C.

4. B 【解析】已知 $I = 10^{13} \text{ W/m}^2$ 时, $L = 10 \text{ dB}$, 所以 $10 = 10 \lg(a \times 10^{13})$, 解得: $a = 10^{-12}$,

所以 $L = 10 \lg(10^{-12} \times D) = 10(-12 + \lg D)$.

设列车原来的声强级为 L_1 , 声强为 I_1 , 该列车的声强级降低 30 dB 后的声强级为 L_2 , 声强为 I_2 ,

则 $L_1 - L_2 = 10(-12 + \lg I_1) - 10(-12 + \lg I_2) = 10(\lg I_1 - \lg I_2) = 10 \lg \frac{I_1}{I_2} = 30$,

所以 $\lg \frac{I_1}{I_2} = 3$, 解得: $\frac{I_1}{I_2} = 10^3$, 即 $\frac{I_2}{I_1} = 10^{-3}$,

即该列车的声强应变为原声强的 10^{-3} 倍. 故选 B.

5. C 【解析】因为 $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$, 所以 $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$,

又因为 $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$, 所以 $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \cdot (2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}) = 0$,

所以 $2|\overrightarrow{AB}|^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - 3|\overrightarrow{AD}|^2 = 0$,

又因为 $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{3}$, 所以 $2 \times 2^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - 3(\sqrt{3})^2 = 0$,

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1$, 所以 $\cos \angle BAD = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 故选 C.

6. B 【解析】法一: $x^2 + x^{10} = [(x+1) - 1]^2 + [(x+1) - 1]^{10}$, 则 $a_3 = C_{10}^3 (-1)^7 = -120$, 故选 B.

法二: 对等式: $x^2 + x^{10} = a_0 + a_1(x+1) + \dots + a_9(x+1)^9 + a_{10}(x+1)^{10}$ 两边连续求导三次得:

$10 \times 9 \times 8x^7 = 3 \times 2a_3 + 4 \times 3 \times 2a_4(x+1) + \dots + 9 \times 8 \times 7a_9(x+1)^6 + 10 \times 9 \times 8a_{10}(x+1)^7$,

令 $x = -1$, 得: $a_3 = -120$, 故选 B.

7. D 【解析】由题意可知: 该家庭至少检测了 4 人才能确定为“感染高危户”, 则前 3 人检测为阴性, 第 4 人为阳性或前 4 人检测为阴性, 第 5 人为阳性.

$\therefore f(p) = (1-p)^3 p + (1-p)^4 p (0 < p < 1)$,

$f'(p) = -3(1-p)^2 p + (1-p)^3 - 4(1-p)^3 p + (1-p)^4 = (1-p)^2 (5p^2 - 10p + 2)$

$= 5(1-p)^2 \left(p - \frac{5+\sqrt{15}}{5} \right) \left(p - \frac{5-\sqrt{15}}{5} \right)$,

$\because 0 < p < 1$, $\therefore (1-p)^2 \left(p - \frac{5+\sqrt{15}}{5} \right) < 0$,

$\therefore 0 < p < \frac{5-\sqrt{15}}{5}$ 时, $f'(p) > 0$,

$\frac{5-\sqrt{15}}{5} < p < 1$ 时, $f'(p) < 0$,

$\therefore f(p)$ 在 $\left(0, \frac{5-\sqrt{15}}{5} \right)$ 上递增, 在 $\left(\frac{5-\sqrt{15}}{5}, 1 \right)$ 上递减,

$\therefore p = \frac{5-\sqrt{15}}{5} = 1 - \frac{\sqrt{15}}{5}$ 时, $f(p)$ 最大, 即 $p_0 = 1 - \frac{\sqrt{15}}{5}$, 故选 D.

8. B 【解析】法一: $A(2, 2)$ 在抛物线 $y^2 = 2px$ 上, 故 $2^2 = 2p \times 2$, 即 $p = 1$, 抛物线方程为 $y^2 = 2x$,

$$\text{设 } B\left(\frac{y_1^2}{2}, y_1\right), C\left(\frac{y_2^2}{2}, y_2\right), \therefore k_{BC} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2)} = \frac{2}{y_1 + y_2},$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的方程为: } y - y_1 = \frac{2}{y_1 + y_2} \left(x - \frac{y_1^2}{2}\right),$$

$$\text{即 } 2x - (y_1 + y_2)y + y_1 y_2 = 0.$$

$$\text{设直线 } AB(AC) \text{ 的方程为: } y - 2 = k(x - 2), \text{ 即 } kx - y + 2 - 2k = 0,$$

$$\text{依题意: 圆心 } (2, 0) \text{ 到直线 } AB(AC) \text{ 的距离 } d = \frac{|2k - 0 + 2 - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1, \text{ 解得 } k = \pm\sqrt{3},$$

$$\text{由 } k_{AB} = \frac{2}{y_1 + 2} = \sqrt{3} \text{ 得: } y_1 = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\text{同理: } y_2 = -2 - \frac{2}{\sqrt{3}}, \therefore y_1 + y_2 = -4, y_1 y_2 = 2^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{8}{3},$$

$$\text{故直线 } BC \text{ 的方程为 } 3x + 6y + 4 = 0, \text{ 故选 B.}$$

$$\text{法二: 设 } B\left(\frac{y_1^2}{2}, y_1\right), C\left(\frac{y_2^2}{2}, y_2\right), \text{ 直线 } AB: 2x - (y_1 + 2)y + 2y_1 = 0,$$

$$\text{依题意: 圆心 } (2, 0) \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离 } d = \frac{|4 + 2y_1|}{\sqrt{(y_1 + 2)^2 + 4}} = 1,$$

$$\text{即 } 3y_1^2 + 12y_1 + 8 = 0, 6x_1 + 12y_1 + 8 = 0, 3x_1 + 6y_1 + 4 = 0,$$

$$\text{同理: } 3x_2 + 6y_2 + 4 = 0, \text{ 所以直线 } BC \text{ 的方程为 } 3x + 6y + 4 = 0, \text{ 故选 B.}$$

9. BC 【解析】由某机构对我国未来十年 5G 用户规模的发展预测图, 知:

对于 A, 2029 年我国 5G 用户数达到 137205.3 万人, 规模最大, 故 A 错误;

对于 B, 2022 年我国 5G 用户规模年增长率接近 300.0%, 达到最高, 故 B 正确;

对于 C, 从 2020 年到 2026 年, 我国的 5G 用户规模增长两年后, 其年增长率逐年下降, 故 C 正确;

对于 D, 这十年我国的 5G 用户数规模, 后 5 年的平均数大于前 5 年的平均数,

后 5 年的方差小于前 5 年的方差, 故 D 错误.

故选 BC.

10. ABC 【解析】依题可求得: $A = 2, \omega = 2, \varphi = \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, A、B、C 均对, 故选 ABC.

11. BCD 【解析】 $a_1 = (1 + 20\%) \times 10000 - 1000 = 11000$ 元, 故 A 错误;

由题意 $a_{n+1} = 1.2a_n - 1000$, 故 B 正确;

$$\text{由 } a_{n+1} = 1.2a_n - 1000, \text{ 得 } a_{n+1} - 5000 = 1.2(a_n - 5000),$$

所以数列 $\{a_n - 5000\}$ 是首项为 6000, 公比为 1.2 的等比数列,

$$\therefore a_{12} - 5000 = 6000 \times 1.2^{11}, \text{ 即 } a_{12} = 6000 \times 1.2^{11} + 5000 = 50000,$$

2020 年小王的年利润为 $50000 - 10000 = 40000$ 元, 故 C 正确;

$$a_{24} = 5000 + 6000 \times 1.2^{23} = 5000 + 6000 \times \frac{9^2}{1.2} = 410000 \text{ 元, 即 41 万, 故 D 正确.}$$

故选 BCD.

12. BCD 【解析】根据题意, 依次分析选项:

对于 A, 若 $g(x) = f(x)\cos x$, 则 $g(-x) = f(-x)\cos(-x) = f(x)\cos x = g(x)$, 则 $g(x) = f(x)\cos x$ 为偶函数, A 错误;

对于 B, 设函数 $F(x) = f(x) - f(2)$, $F(2) = f(2) - f(2) = 0$, $F(-2) = f(-2) - f(2) = f(2) - f(2) = 0$,

则 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有且只有 2 个零点, 所以 $h(2) = h(-2) = h(0) = 0$, $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有且只有 3 个零点, B 正确;

对于 C, 因为 $x[f(x) - f(2)] \leq 0$,

所以当 $x < 0$ 时, $f(x) - f(2) \geq 0$, 即 $f(x) \geq f(2)$, 可得 $x \leq -2$,

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) - f(2) \leq 0$, 即 $f(x) \leq f(2)$, 可得 $0 \leq x \leq 2$,

故 $x[f(x) - f(2)] \leq 0$ 的解集为 $(-\infty, -2] \cup [0, 2]$, C 正确;

对于 D, 若 $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2$, 易得 $f(x)$ 为偶函数,

其导数 $f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$, 则有 $f''(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2 - 2 = 0$.

则 $f'(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 在 $[0, +\infty)$ 上, $f'(x) \geq f'(0) = 0$,

所以此函数还满足在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, D 正确.

故选 BCD.

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上)

13. 12 【解析】分两类: (1) A 小区安排 2 人(同学甲及另一名同学); $C_3^1 A_2^2 = 6$,

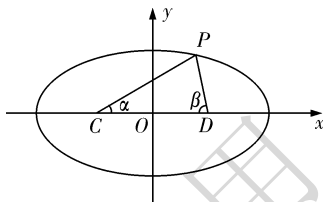
(2) A 小区只安排同学甲 1 人; $C_3^2 A_2^2 = 6$, 故答案为 12.

14. $3\cos \pi x$ (答案不唯一)

15. $\sqrt{5}$ 【解析】由题意: $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y-0}{x+\sqrt{5}} \cdot \frac{y-0}{x-\sqrt{5}} = -\frac{4}{5} (x \neq \pm\sqrt{5})$,

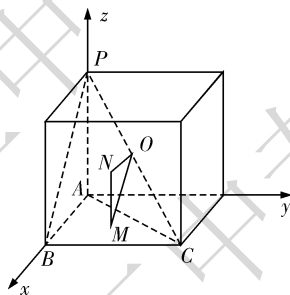
得: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 (x \neq \pm\sqrt{5})$, 可见 C、D 为两个焦点.

$$\therefore \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{|PC| + |PD|}{|CD|} = \frac{2a}{2c} = \sqrt{5}.$$



16. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}, \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 【解析】依题: 球 O 的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$.

将该三棱锥 P-ABC 放置在单位正方体中, 如图建立空间直角坐标系,



则 $O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), M\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), N\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$,

$$\therefore \overrightarrow{OM} = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{ON} = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right), \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{MN} = 0,$$

$$\therefore |\overrightarrow{ON}| = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ 即为弦心距 } d,$$

$$\therefore \text{线段 } DE = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

或利用在正方体中 $AO \perp PB$, 又 $PB \parallel MN$, $\therefore AO \perp MN$, 即 $ON \perp MN$.

四、解答题(本大题共 6 小题, 共计 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 【解析】(1) $\because (a+c)(\sin A - \sin C) = b(\sin A - \sin B)$,

$$\therefore (a+c)(a-c) = b(a-b),$$

$$\text{即 } a^2 + b^2 - c^2 = ab, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 由余弦定理得:

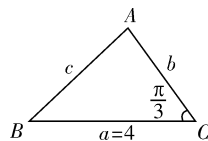
$$c^2 = b^2 + 16 - 2b \cdot 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = b^2 - 4b + 16, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\because \triangle ABC \text{ 为锐角三角形且 } C = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \begin{cases} \cos A > 0, \\ \cos B > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 > a^2, \\ 16 + (b^2 - 4b + 16) > b^2 \end{cases}$$

$$\text{解得 } 2 < b < 8, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\triangle ABC \text{ 面积 } S = \frac{1}{2}ab\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}ab \in (2\sqrt{3}, 8\sqrt{3}). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$



18.【解析】(1)∵ a_n 与 a_{n+1} 的等比中项是 $\sqrt{2S_n}$,

$$\therefore 2S_n = a_n a_{n+1}, \text{①} \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\therefore 2S_{n+1} = a_{n+1} a_{n+2}, \text{②}$$

由②-①可得: $a_{n+2} - a_n = 2$.

∴ $\{a_{n+2} - a_n\}$ 是等差数列. 4分

取 $n=1$,由①得 $2a_1 = a_1 a_2$,解得 $a_2 = 2$.

$$\therefore a_{2n-1} = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1, a_{2n} = 2 + (n-1) \times 2 = 2n, \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$\therefore a_n = n. \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$(2) \therefore b_n = \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

$$\therefore T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{n}{2(n+2)}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\text{由} \frac{n}{2(n+2)} < \frac{n}{2^n} \text{得: } n+2 > 2^{n-1} (*),$$

不难发现 $n=1, 2, 3$ 满足(*). 10分

法一:当 $n \geq 4$ 时,设 $f(n) = 2^{n-1} - n - 2$,则 $f(n+1) = 2^n - (n+1) - 2$,

$$\therefore f(n+1) - f(n) = 2^{n-1} - 1 > 0,$$

$$\therefore f(n+1) > f(n), \therefore \{f(n)\} (n \geq 4) \text{单调递增}, \therefore f(n) \geq f(4) > 0,$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 4 \text{ 时}, n+2 < 2^{n-1},$$

∴使得 $T_n < \frac{n}{2^n}$ 的 n 的取值范围为 $\{1, 2, 3\}$ 12分

法二:当 $n=4$ 时,

$$4+2=6 < 2^{4-1}=8,$$

当 $n \geq 5$ 时,

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n > 2 \times \frac{n(n-1)}{2} + 2n + 2 = n^2 + n + 2 > 2n + 4,$$

$$\therefore \text{当 } n \geq 4 \text{ 时}, n+2 < 2^{n-1},$$

∴使得 $T_n < \frac{n}{2^n}$ 的 n 的取值范围为 $\{1, 2, 3\}$ 12分

(其他方法酌情给分)

$$19. \text{【解析】}(1) \bar{x} = 0.010 \times 10 \times \frac{46+56}{2} + 0.020 \times 10 \times \frac{56+66}{2} + 0.045 \times 10 \times \frac{66+76}{2}$$

$$+ 0.020 \times 10 \times \frac{76+86}{2} + 0.005 \times 10 \times \frac{86+96}{2} \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$= 70. \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

(2)由题意样本方差 $s^2 = 100$,故 $\sigma \approx \sqrt{s^2} = 10$,所以 $X \sim N(70, 10^2)$, 4分

由题意,该厂生产的产品为正品的概率

$$P = P(60 < X < 90) = P(60 < X < 70) + P(70 < X < 90)$$

$$= \frac{1}{2} (0.6827 + 0.9545) = 0.8186. \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

(3) X 所有可能取值为 $0, 1, 2, 3$, 7分

$$P(X=0) = \frac{C_3^0 C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}, P(X=1) = \frac{C_3^1 C_5^2}{C_8^3} = \frac{15}{28},$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}, P(X=3) = \frac{C_3^3 C_5^0}{C_8^3} = \frac{1}{56}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

..... 11 分

$E(X) = 0 \times \frac{5}{28} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = \frac{9}{8}$ 12 分

20. 【解析】(1) 分别取 AB, EB 中点 M, N , 连接 CM, MN, ND .

在梯形 $ACDE$ 中, $DC \parallel EA$ 且 $DC = \frac{1}{2}EA$, 且 M, N 分别为 BA, BE 中点,

$\therefore MN \parallel EA, MN = \frac{1}{2}EA$,

$\therefore MN \parallel CD, MN = CD$,

$\therefore$ 四边形 $CDNM$ 是平行四边形,

$\therefore CM \parallel DN$ 2 分

又 $\vec{EG} = \frac{1}{4}\vec{EB}$, N 为 EB 中点, $\therefore G$ 为 EN 中点, 又 F 为 ED 中点,

$\therefore GF \parallel DN$, 3 分

$\therefore GF \parallel CM$, 4 分

又 $CM \subset$ 平面 $ABC, GF \not\subset$ 平面 ABC ,

$\therefore GF \parallel$ 平面 ABC 6 分

(2) 在平面 ABC 内, 过 B 作 $BH \perp AC$ 交 AC 于 H .

$\because$ 平面 $ACDE \perp$ 平面 ABC , 平面 $ACDE \cap$ 平面 $ABC = AC$,

$BH \subset$ 平面 $ABC, BH \perp AC$,

$\therefore BH \perp$ 平面 $ACDE$ 7 分

$\therefore BH$ 即为四棱锥 $B-ACDE$ 的高, 又底面 $ACDE$ 面积确定, 所以要使多面体 $ABCDE$ 体积最大, 即 BH 最大, 此时 $AB = BC = \sqrt{2}$ 8 分

H 为 AC 中点, 连接 HF , 易知 HB, HC, HF 两两垂直,

以 $\{\vec{HB}, \vec{HC}, \vec{HF}\}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系 $H-xyz$,

则 $A(0, -1, 0), B(1, 0, 0), E(0, -1, 2), D(0, 1, 1)$.

$\vec{AB} = (1, 1, 0), \vec{BE} = (-1, -1, 2), \vec{DE} = (0, -2, 1)$,

设 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 ABE 的一个法向量, 则

$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \vec{AB} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \vec{BE} = 0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} x_1 + y_1 = 0, \\ -x_1 - y_1 + 2z_1 = 0, \end{cases}$

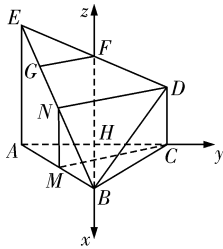
取 $\mathbf{n}_1 = (1, -1, 0)$ 9 分

设 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 DBE 的一个法向量, 则

$\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \vec{DE} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \vec{BE} = 0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} -2y_2 + z_2 = 0, \\ -x_2 - y_2 + 2z_2 = 0, \end{cases}$ 取 $\mathbf{n}_2 = (3, 1, 2)$ 10 分

所以 $\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{7}}{7}$, 11 分

由图, 二面角 $A-BE-D$ 为钝二面角, 所以二面角 $A-BE-D$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{7}}{7}$ 12 分



21. 【解析】(1) $\because$ 离心率 $e = \frac{c}{a} = 2, \therefore c = 2a$,

又 $b^2 = c^2 - a^2 = 3a^2, \therefore$ 双曲线方程 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$,

把点 $A(-2, 3)$ 代入双曲线方程得, $\frac{4}{a^2} - \frac{9}{3a^2} = 1$, 解得 $a^2 = 1$,

故双曲线 C 的方程为: $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 5 分

(2) 由(1)知: 双曲线方程 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$,

$\therefore B(a, 0), F(-2a, 0)$,

①当直线 AF 的斜率不存在时, 则 $\angle AFB = 90^\circ$, $|FB| = 3a$, $|AF| = \frac{b^2}{a} = 3a$,

$\therefore \angle ABF = 45^\circ$, 此时 $\lambda = 2$ 7 分

②当直线 AF 的斜率存在时, 设 $\angle AFB = \alpha$, $\angle ABF = \beta$, $A(x_0, y_0)$, 其中 $x_0 < -a$, $y_0 > 0$.

因为 $e = 2$, 故 $c = 2a$, $b = \sqrt{3}a$, 故渐近线方程为: $y = \pm\sqrt{3}x$,

所以 $\alpha \in (0, \frac{2\pi}{3})$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{3})$, 8 分

$$\text{又 } \tan \alpha = \frac{y_0}{x_0 + 2a}, \tan \beta = -\frac{y_0}{x_0 - a},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \tan 2\beta &= \frac{-\frac{2y_0}{x_0 - a}}{1 - \left(\frac{y_0}{x_0 - a}\right)^2} = \frac{-2y_0(x_0 - a)}{(x_0 - a)^2 - y_0^2} \\ &= \frac{-2y_0(x_0 - a)}{(x_0 - a)^2 - 3a^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} - 1\right)} = \frac{-2y_0(x_0 - a)}{(x_0 - a)^2 - 3(x_0^2 - a^2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-2y_0}{(x_0 - a) - 3(x_0 + a)} = \frac{y_0}{x_0 + 2a}, \text{ 10 分}$$

$$\therefore \tan \alpha = \tan 2\beta,$$

$$\text{又 } \alpha, 2\beta \in (0, \frac{2\pi}{3}), \therefore \alpha = 2\beta.$$

综上: 存在常数 $\lambda = 2$ 满足: $\angle AFB = 2\angle ABF$ 12 分
(其他方法酌情给分)

22. 【解析】(1) 定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = me^{mx} - 2(a+1)$,

依题意: $f'(0) = m - 2(a+1) = -2a - 1$, 所以 $m = 1$ 2 分

$$\text{所以 } f(x) = e^x - 2(a+1)x + \frac{3}{2}, f'(x) = e^x - 2(a+1),$$

当 $a \leq -1$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

当 $a > -1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \ln 2(a+1)$,

当 $x < \ln 2(a+1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2(a+1))$ 上单调递减,

当 $x > \ln 2(a+1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(\ln 2(a+1), +\infty)$ 上单调递增,

综上,

当 $a \leq -1$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a > -1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2(a+1))$ 上单调递减, 在 $(\ln 2(a+1), +\infty)$ 上单调递增. 6 分

$$(2) \text{ 设 } g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2 - 2(a+1)^2, \text{ 则 } g(x) = e^x - \frac{1}{2}[x + 2(a+1)]^2 + \frac{3}{2},$$

依题 $g(x) \geq 0$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 又 $g'(x) = e^x - (x + 2a + 2)$,

令 $h(x) = g'(x)$, 则 $h'(x) = e^x - 1 \geq 0$,

$\therefore h(x)$ 单调递增, $\therefore h(x) \geq h(0) = -2a - 1$,

①当 $-2a - 1 \geq 0$, 即 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $h(x) = g'(x) \geq 0$, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore g(x)_{\min} = g(0) = \frac{5}{2} - 2(a+1)^2 \geq 0, \therefore -1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \leq a \leq -1 + \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{又 } a \leq -\frac{1}{2}, \therefore -1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \leq a \leq -\frac{1}{2}; \text{ 8 分}$$

②当 $-2a - 1 < 0$, 即 $a > -\frac{1}{2}$ 时,

则存在唯一的 $x_0 \in [0, +\infty)$ 使 $h(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} - x_0 - 2(a+1) = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) = g'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) = g'(x) > 0$,

即 $x \in (0, x_0)$ 时, $g(x)$ 单调递减, $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $g(x)$ 单调递增,

$$\text{故 } g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{x_0} - \frac{1}{2}e^{2x_0} + \frac{3}{2} \geq 0, \text{ 解得 } 0 < e^{x_0} \leq 3, \text{ 从而 } 0 < x_0 \leq \ln 3, \text{ 10 分}$$

又 $2(a+1) = e^{x_0} - x_0$, 而 $e^x - x$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore 1 < 2(a+1) \leq 3 - \ln 3, \text{ 解得 } -\frac{1}{2} < a \leq \frac{1 - \ln 3}{2},$$

综上, 实数 a 的取值范围为 $\left[-1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \ln 3}{2}\right]$ 12 分

