2021届重庆市八中高三下期第五次模拟考试数学试题

数学

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第I卷（选择题）

一、单选题（本题共8小题,每小题5分,共40分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)。

1．已知集合 $A=\left\{x\left|y=\sqrt{4-x^2}\right.\right\}$，$B=\left\{y\left|y=\mathrm{e}^x\right.\right\}$，其中$e$是自然对数的底数，则 $A\bigcap B=$（　　）

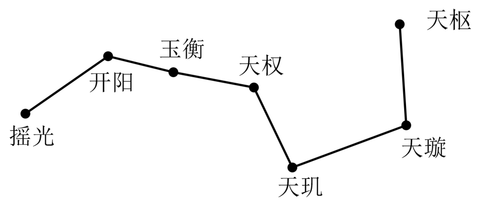
A．$\varnothing$　　B．$(0,2]$　　C．$[2,+\infty)$　　D．$[-2,+\infty)$

2．已知s，r都是q的充分条件，p是q的必要条件，r是p的必要条件，则（　　）

A．s是r的既不充分也不必要条件　　B．s是p的必要条件

C．q是r的必要不充分条件　　D．p是r的充要条件

3．北斗导航系统由55颗卫星组成，于2020年6月23日完成全球组网部署，全面投入使用.北斗七星自古是我国人民辨别方向判断季节的重要依据，北斗七星分别为天枢、天璇、天玑、天权、玉衡、开阳、摇光，其中玉衡最亮，天权最暗.一名天文爱好者从七颗星中随机选两颗进行观测，则玉衡和天权至少一颗被选中的概率为（　　）



A．$\dfrac{10}{21}$　　B．$\dfrac{11}{21}$　　C．$\dfrac{11}{42}$　　D．$\dfrac{5}{21}$

4．已知点$P(4,m)$是直线$l:\begin{cases}x=1+3t,\\y=-5+t\end{cases}$（$t\in\mathrm{R}$，$t$是参数）和圆$C:\begin{cases}x=1+5\cos\theta,\\y=5\sin\theta\end{cases}$（$\theta\in\mathrm{R},\theta$是参数）的公共点，过点$P$作圆$C$的切线$l_1$，则切线$l_1$的方程是（　　）

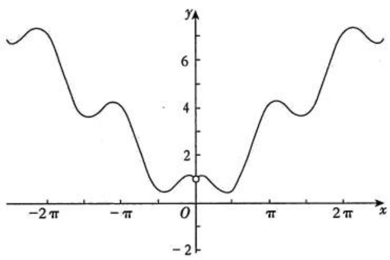
A．$3x-4y-28=0$　　　　B．$3x+4y-28=0$

C．$3x-y-13=0$　　　　D．$x-3y-16=0$

5．在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E是C_1C的中点，则直线BE与平面B_1BD所成角的正弦值为（　　）

A．$-\frac{\sqrt{10}}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{10}}{5}$　　C．$-\frac{\sqrt{15}}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{15}}{5}$

6．已知函数$f\left(x\right)=\sin 2x$，$g\left(x\right)=\mathrm{e}^x$，则下列图象对应的函数可能为（　　）



A．$y=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+g\left(\ln x^2\right)$　　　　B．$y=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+g\left(\ln|x|\right)$

C．$y=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+g\left(\ln x^3\right)$　　　　D．$y=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+g\left(\ln|x|\right)$

7．已知直线$l:x-y+4=0$与x轴相交于点A，过直线l上的动点P作圆$x^2+y^2=4$的两条切线，切点分别为C，D两点，记M是CD的中点，则$|AM|$的最小值为（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{17}$　　D．3

8．已知函数$f\left(x\right)=\frac{1}{2^x+1}+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$，若不等式$f\left(ax^2\right)+f\left(1-2ax\right)\geq 1$对$\forall x\in\mathbf{R}$恒成立，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$\left(0,\mathrm{e}\right]$　　B．$\left[0,\mathrm{e}\right]$　　C．$\left(0,1\right]$　　D．$\left[0,1\right]$

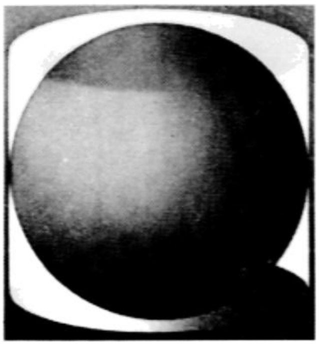
二、**多选题**（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）。

9．关于函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}$ 的结论正确的是（　　）

A．$f\left(x\right)$ 在定义域内单调递减　　　B．$f\left(x\right)$ 的值域为 R

C．$f\left(x\right)$ 在定义城内有两个零点　　D．$y=f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 是奇函数

10．传说古希腊数学家阿基米德的墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等.这是因为阿基米德认为这个“圆柱容球”是他最为得意的发现，于是留下遗言：他死后，墓碑上要刻上一个“圆柱容球”的几何图形.设圆柱的体积与球的体积之比为 m，圆柱的表面积与球的表面积之比为 n，若 $f\left(x\right)=\left(\dfrac{m}{n}x^3-\dfrac{1}{x}\right)^8$，则（　　）



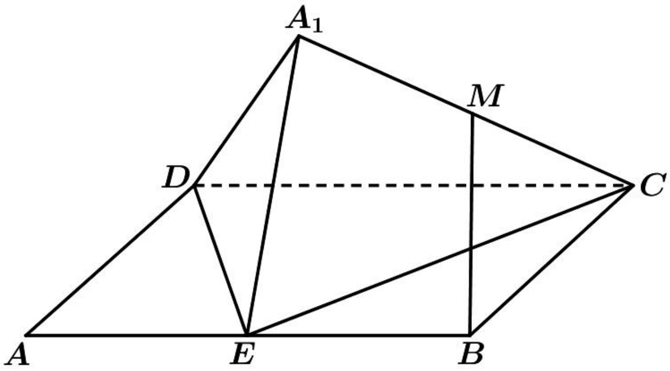
A．$f\left(x\right)$ 的展开式中的常数项是 56

B．$f\left(x\right)$ 的展开式中的各项系数之和为 0

C．$f\left(x\right)$ 的展开式中的二项式系数最大值是 70

D．$f\left(i\right)=-16$，其中 i 为虚数单位

11．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2AD$，E 为边 AB 的中点，将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折成 $\triangle A_1DE$，若 M 为线段 A_1C 的中点，则 $\triangle ADE$ 在翻折过程中，下列说法正确的是（　　）



A．存在某个位置，使 $DE \perp A_1C$

B．MB 为定值

C．存在某个位置，使 $MB \perp$ 平面 A_1DE

D．若 $AD=1$，当三棱锥 A_1-DEC 的体积最大时，该三棱锥的外接球表面积是 4π

12. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 满足 $f\left(x_0\right)=f\left(x_0+1\right)=-\dfrac{1}{2}$，且 $f(x)$ 在 $\left(x_0,x_0+1\right)$ 上有最小值，无最大值.则（　　）

A．$f\left(x_0+\dfrac{1}{2}\right)=-1$　　B．若 $x_0=0$，则 $f(x)=\sin\left(2\pi x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

C．$f(x)$ 的最小正周期为 3　　D．$f(x)$ 在 $(0,2019)$ 上的零点个数最少为 1346 个

第 II 卷（非选择题）

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）。

13．已知 F 是抛物线 $y=4x^2$ 的焦点，点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 在抛物线上，且 $|PF|=2$，则 $y_0=$______.

14．已知 $\sin a=\dfrac{3}{5}$，则 $\cos(\dfrac{\pi}{4}+a)\sin(\dfrac{\pi}{4}-a)=$__________.

15．已知函数 $f(x)=\left|x^2-2ax+b\right|$，$(x\in R)$.下列四个命题：

①$\exists \boldsymbol{a}\in \boldsymbol{R}$，使 $f(x)$ 为偶函数；

②若 $f(0)=f(2)$，则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称；

③若 $a^2-b\le 0$，则 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上是增函数；

④若 $a^2-b-2>0$，则函数 $h(x)=f(x)-2$ 有两个零点.

其中所有真命题的序号是__________.

16．用 $g(n)$ 表示自然数 n 的所有因数中最大的那个奇数，例如：9 的因数有 1，3，9，$g(9)=9$，10 的因数有 1，2，5，10，$g(10)=5$，那么

$g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2^{2015}-1)=$ __________.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）。

17．已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 a_1，a_3，a_2+10 成等差数列，$S_3-a_2=10$.

（I）求 a_n 与 S_n；

（II）设 $b_n=\log_2(S_n+2)\cdot a_n$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和记为 T_n，求 T_n.

18．在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $\sqrt{3}\left(a^2+c^2-b^2\right)=2bc\sin A$.

（1）求 B；

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积是 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$c=2a$，求 b.

19．某机构为研究考生物理成绩与数学成绩之间的关系，从一次考试中随机抽

数学成绩 x	46	65	79	89	99	109	11[illegible]	11[illegible]	12[illegible]	134	14[illegible]
物理成绩 y	50	54	60	63	66	68	0	70	73	76	80

取11名考生的数据，统计如下表：

（1）由表中数据可知，有一位考生因物理缺考导致数据出现异常，剔除该组数据后发现，考生物理成绩 y 与数学成绩 x 之间具有线性相关关系，请根据这10组数据建立 y 关于 x 的回归直线方程，并估计缺考考生如果参加物理考试可能取得的成绩；

（2）已知参加该次考试的10000名考生的物理成绩服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，用剔除异常数据后的样本平均值作为μ的估计值，用剔除异常数据后的样本标准差作为σ的估计值，估计物理成绩不低于75分的人数Y的期望.

附：参考数据：

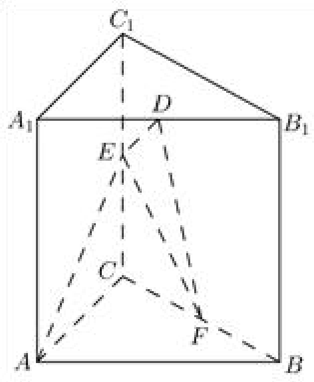
$\sum_{i=1}^{11}x_i$	$\sum_{i=1}^{11}y_i$	$\sum_{i=1}^{11}x_iy_i$	$\sum_{i=1}^{11}x_i^2$	$\sum_{i=1}^{11}\left(y_i-\overline{y}\right)$	$\frac{2586}{8326}$
1110	660	68586	120426	4770	0.31

上表中的x_i表示样本中第i名考生的数学成绩，y_i表示样本中第i名考生的物理成绩，$\overline{y}=\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11}y_i$.参考公式：①对于一组数据：$u_1,u_2,\cdots,u_n$，其方差：$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(u_i-\overline{u}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i^2-\overline{u}^2$.②对于一组数据$\left(u_1,v_1\right),\left(u_2,v_2\right),\cdots,\left(u_n,v_n\right)$，其回归直线$\hat{v}=\hat{a}+\hat{b}u$的斜率和截距的最小二乘估计分别为：$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}u_iv_i-n\overline{u}\overline{v}}{\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\overline{u}^2}$，$\hat{a}=\overline{v}-\hat{b}\overline{u}$.③若随机变量$\varepsilon$服从$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则$P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)\approx0.683$，$P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)\approx0.955$，$P(\mu-3\sigma<\xi<\mu+3\sigma)\approx0.997$.

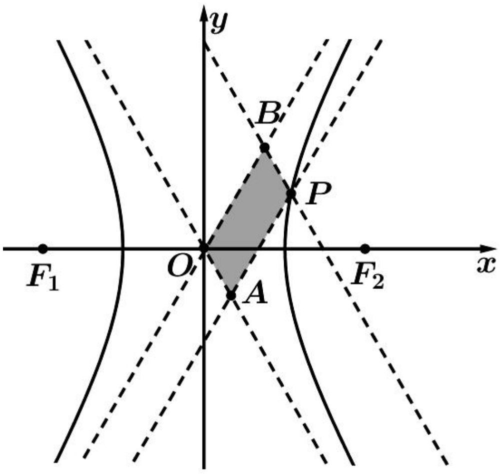
20.如图，在直棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1=AB=AC=2$，$AB\perp AC$，D,E,F分别是A_1B_1,CC_1,BC的中点.

（1）求证：$AE\perp DF$；

（2）求AE与平面DEF所成角的大小及点A到平面DEF的距离.



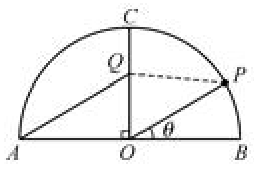
21．如图，已知双曲线$C:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$的左右焦点分别为F_1、F_2，若点P为双曲线C在第一象限上的一点，且满足$|PF_1|+|PF_2|=8$，过点P分别作双曲线C两条渐近线的平行线PA、PB与渐近线的交点分别是A和B.



（1）求四边形$OAPB$的面积；

（2）若对于更一般的双曲线$C':\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$，点$P'$为双曲线$C'$上任意一点，过点$P'$分别作双曲线$C'$两条渐近线的平行线$P'A'$、$P'B'$与渐近线的交点分别是$A'$和$B'$.请问四边形$OA'P'B'$的面积为定值吗？若是定值，求出该定值（用$a$、$b$表示该定值）；若不是定值，请说明理由.

22．如图，某景区内有一半圆形花圃，其直径AB为6，O是圆心，且$OC\perp AB$.在OC上有一座观赏亭Q，其中$\angle AQC=\dfrac{2}{3}\pi$，.计划在$\overset{\frown}{BC}$上再建一座观赏亭$P$，记$\angle POB=\theta(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$.



（1）当$\theta=\dfrac{\pi}{3}$时，求$\angle OPQ$的大小；

（2）当$\angle OPQ$越大时，游客在观赏亭P处的观赏效果越佳，求游客在观赏亭P处的观赏效果最佳时，角θ的正弦值.

参考答案

一.单选题。

1．B

【分析】

根据函数的定义域求法以及指数函数的值域求出集合A,B，再由集合的交运算即可求解.

【详解】

$A=\left\{x\left|y=\sqrt{4-x^2}\right.\right\}=\left\{x\left|-2\le x\le 2\right.\right\}=\left[-2,2\right]$，

$B=\left\{y\left|y=\mathrm{e}^x\right.\right\}=\left\{y\left|y>0\right.\right\}=\left(0,+\infty\right)$，

所以$A\cap B=(0,2]$.

故选：B

2．D

【分析】

根据题意得到$q\Leftrightarrow p,p\Leftrightarrow r,q\Leftrightarrow r$，再逐项判断.

【详解】

由题意得$s\Rightarrow q,r\Rightarrow q,q\Rightarrow p,p\Rightarrow r$，

所以 $q\Leftrightarrow p,p\Leftrightarrow r,q\Leftrightarrow r$，

所以$s\Rightarrow r$，所以s是r的充分条件，故A错误；

s是p的充分条件，故B错误；

q是r的充要条件，故C错误；

p是r的充要条件，故D正确；

故选：D.

3．B

【分析】

根据古典概型计算公式，结合组合的定义、对立事件的概率公式进行求解即可.

【详解】

因为玉衡和天权都没有被选中的概率为$P=\dfrac{C_5^2}{C_7^2}=\dfrac{10}{21}$，

所以玉衡和天权至少一颗被选中的概率为$1-\frac{10}{21}=\frac{11}{21}$.

故选：B.

4．A

【分析】

求出P点坐标，把圆方程化为普通方程，得圆心坐标，由切线性质求得切线斜率，得切线方程.

【详解】

由$1+3t=4$得$t=1$，则$y=-5+1=-4$，所以$P(4,-4)$，

圆C的普通方程为$(x-1)^2+y^2=25$，圆心为$C(1,0)$，

$k_{CP}=\frac{-4-0}{4-1}=-\frac{4}{3}$，所以切线的斜率为$k=\frac{3}{4}$，

方程为$y+4=\frac{3}{4}(x-4)$，即$3x-4y-28=0$.

故选：A.

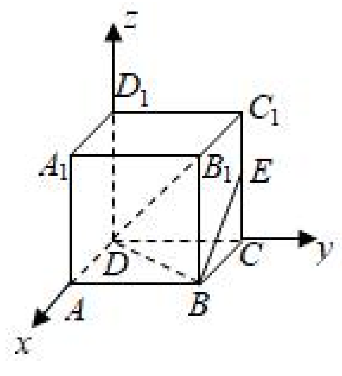
5．B

【分析】

以D为坐标原点, 建立空间直角坐标系，求出平面B_1BD的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，然后利用向量法可求$\cos<\vec{n},\overrightarrow{BE}>$，从而求直线$BE$与平面$B_1BD$所成角的正弦值.

【详解】

解：以D为坐标原点，以DA为x轴，以DC为y轴，以DD_1为z轴，建立如图空间直角坐标系，



设正方体的棱长为2，则$D(0,0,0)$，$B(2,2,0)$，$B_1(2,2,2)$，$E(0,2,1)$

$\therefore \overrightarrow{BD}=(-2,-2,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,0,1)$

设平面 B_1BD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\because \vec{n}\perp\overrightarrow{BD}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{BB_1}$，

$\therefore \begin{cases}-2x-2y=0\\2z=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $\vec{n}=(-1,1,0)$，

$\therefore \cos<\vec{n},\overrightarrow{BE}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{BE}|}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

设直线 BE 与平面 B_1BD 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{BE}>|=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

故选：B．

6．D

【分析】

A.当 $x\to 0$ 时，$y\to -1$，不符合题意；

B.其图象不关于 y 轴对称，不符合题意；

C.其图象不关于 y 轴对称，不符合题意；

D.其图象关于 y 轴对称，当 $x\to 0$ 时，$y\to 1$，符合题意.

【详解】

A. $y=f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+g\left(\ln x^2\right)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)+x^2=-\cos 2x+x^2$，当 $x\to 0$ 时，$y\to -1$，不符合题意；

B. $y=f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+g\left(\ln|x|\right)=\sin\left(2x-\pi\right)+|x|=-\sin 2x+|x|$，其图象不关于 y 轴对称，不符合题意；

C. $y=f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+g\left(\ln x^3\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)+x^3=\cos 2x+x^3$，其图象不关于 y 轴对称，不符合题意；

D. $y=f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+g\left(\ln|x|\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)+|x|=\cos 2x+|x|$，其图象关于 y 轴对

称，当$x\to 0$时，$y\to 1$，符合题意.

故选：D.

【点睛】

方法点睛：根据图象找解析式，一般先找差异，再验证，即得解.

7．A

【分析】

设点$P\left(t，t+4\right)$，$C\left(x_1,y_1\right)$，$D\left(x_2,y_2\right)$，根据圆的切线的性质可得C，D在以OP为直径的圆上，求得其圆的方程，再由C，D在圆$x^2+y^2=4$上，可得直线CD的方程，求得直线CD恒过定点$Q\left(-1,1\right)$，从而得M在以OQ为直径的圆，得出圆的方程可求得$\left|AM\right|$的最小值.

【详解】

设点$P\left(t，t+4\right)$，$C\left(x_1,y_1\right)$，$D\left(x_2,y_2\right)$，因为PD，PC是圆的切线，所以$OD\perp PD,OC\perp PC$，

所以C，D在以OP为直径的圆上， 其圆的方程为

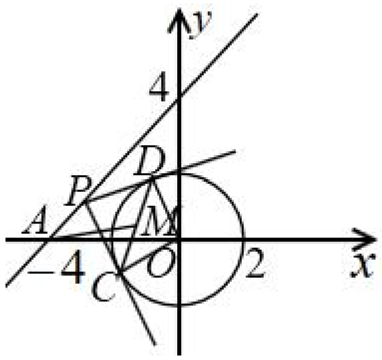
$$\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\left(y-\frac{t+4}{2}\right)^2=\frac{t^2+\left(t+4\right)^2}{4},$$

又C，D在圆$x^2+y^2=4$上，则将两个圆的方程作差得直线CD的方程：$tx+\left(t+4\right)y-4=0$，即$t\left(x+y\right)+4\left(y-1\right)=0$，所以直线$CD$恒过定点$Q\left(-1,1\right)$，

又因为$OM\perp CD$，M，Q，C，D四点共线，所以$OM\perp MQ$，即M在以OQ为直径的圆$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$上，其圆心为$O'\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，半径为$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$\left|AM\right|_{\min}=\left|AO'\right|-r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+4\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$，所以$\left|AM\right|$的最小值为$2\sqrt{2}$，

故选：A.



【点睛】

方法点睛：求直线恒过点的方法：方法一（换元法）：根据直线方程的点斜式直线的方程变成$y=k\left(x-a\right)+b$，将$x=a$带入原方程之后，所以直线过定点$\left(a，b\right)$；方法二（特殊引路法）：因为直线的中的m是取不同值变化而变化，但是一定是围绕一个点进行旋转，需要将两条直线相交就能得到一个定点.取两个m的值带入原方程得到两个方程，对两个方程求解可得定点.

8．D

【分析】

构造函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{1}{2}$，判断函数的奇偶性与单调性，将所求不等式转化为$f\left(ax^2\right)-\frac{1}{2}\geq-\left[f\left(1-2ax\right)-\frac{1}{2}\right]$，即$g\left(ax^2\right)\geq g\left(2ax-1\right)$，再利用函数单调性解不等式即可.

【详解】

$\because f\left(x\right)=\frac{1}{2^x+1}+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$，

$\therefore f\left(x\right)+f\left(-x\right)=\frac{1}{2^x+1}+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2^{-x}+1}+\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x=\frac{1}{2^x+1}+\frac{1}{2^{-x}+1}=1$

令$g\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{1}{2}$，则$g\left(x\right)+g\left(-x\right)=0$，可得$g\left(x\right)$是奇函数，

又$g'\left(x\right)=\left(\frac{1}{2^x+1}\right)'+\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}\right)'=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-\frac{2^x\ln 2}{\left(2^x+1\right)^2}=\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{\ln 2}{2^x+\frac{1}{2^x}+2}$，

又利用基本不等式知$\mathrm{e}^x+\frac{1}{\mathrm{e}^x}\geq 2$当且仅当$\mathrm{e}^x=\frac{1}{\mathrm{e}^x}$，即$x=0$时等号成立；

$\frac{\ln 2}{2^x+\frac{1}{2^x}+2}\leq\frac{\ln 2}{4}$当且仅当$2^x=\frac{1}{2^x}$，即$x=0$时等号成立；

故 $g'(x)>0$，可得 $g(x)$ 是单调增函数，

由 $f\left(ax^2\right)+f(1-2ax)\geq 1$ 得 $f\left(ax^2\right)-\frac{1}{2}\geq -f(1-2ax)+\frac{1}{2}=-\left[f(1-2ax)-\frac{1}{2}\right]$，

即 $g\left(ax^2\right)\geq -g(1-2ax)=g(2ax-1)$，即 $ax^2-2ax+1\geq 0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

当 $a=0$ 时显然成立；当 $a\neq 0$ 时，需 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=4a^2-4a\leq 0\end{cases}$，得 $0<a\leq 1$，

综上可得 $0\leq a\leq 1$，

故选：D.

【点睛】

方法点睛：本题考查函数的单调性、奇偶性及含参不等式的解法，要设法把隐性转化为显性，方法是：

（1）把不等式转化为 $f[g(x)]>f[h(x)]$ 的模型；

（2）判断 $f(x)$ 的单调性，再根据函数的单调性将“f”脱掉，得到具体的不等式组来求解，但注意奇偶函数的区别.

二.多选题。

9．BD

【分析】

根据所给函数结合函数性质，对各项逐个分析判断， 即可得解.

【详解】

$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$，

而 $\frac{1}{x}$ 和 $\frac{1}{x+1}$ 在各段定义域内均为减函数，

故 $f(x)$ 在各段上为减函数，但不能说在定义域内单调递减，故 A 错误；

当 $x\in(-1,0)$ ，$x\to -1$ 时，有 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\to +\infty$，

当 $x\to 0$ 时，有 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\to -\infty$，

所以 $f\left(x\right)$ 的值域为 R，故 B 正确；

令 $f\left(x\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{2x+1}{x^2+x}=0$，可得 $x=-\frac{1}{2}$，

所以 $f\left(x\right)$ 在定义城内有一个零点，故 C 错误；

$y=f\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{x-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=\frac{2x}{x^2-\frac{1}{4}}=\frac{8x}{4x^2-1}$，

令 $g(x)=\frac{8x}{4x^2-1}$，易知 $x\neq\pm\frac{1}{2}$，此时定义域关于原点对称，

且 $g(-x)=\frac{-8x}{4x^2-1}=-g(x)$，故 $g(x)$ 为奇函数，

所以 $y=f\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 是奇函数，故 D 正确，

故选：BD.

10．BC

【分析】

设内切球的半径为 r，由圆柱和球的体积和表面积公式可求得 m,n，进而得到 $f\left(x\right)$；

对于 A，利用二项式定理得到展开式通项，令 $24-4r=0$ 可求得 r，代入得到常数项，知 A 错误；

对于 B，采用赋值法，令 $x=1$ 可得各项系数和，知 B 正确；

对于 C，由二项式系数性质知最大值为 C_8^4，知 C 正确；

对于 D，根据复数的运算可知 D 错误.

【详解】

设内切球的半径为 r，则圆柱的高为 $2r$，

$\therefore m=\frac{\pi r^2\cdot 2r}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{3}{2}$，$n=\frac{2\pi r^2+2\pi r\cdot 2r}{4\pi r^2}=\frac{3}{2}$，则 $\frac{m}{n}=1$，$\therefore f\left(x\right)=\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^8$；

对于 A，$f\left(x\right)$ 展开式通项公式为：$T_{r+1}=C_8^r x^{24-3r}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^r=\left(-1\right)^r C_8^r x^{24-4r}$，

令 $24-4r=0$，解得：$r=6$，$\therefore f\left(x\right)$ 展开式的常数项为 $\left(-1\right)^6 C_8^6=28$，A 错误；

对于B，$f\left(1\right)=0$，即$f\left(x\right)$展开式的各项系数之和为0，B正确；

对于C，$f\left(x\right)$展开式中二项式系数最大值为$C_8^4=70$，C正确；

对于D，$f\left(i\right)=\left(i^3-\dfrac{1}{i}\right)^8=\left(-i+i\right)^8=0$，D错误.

故选：BC.

【点睛】

关键点点睛：本题以立体几何的知识为载体，重点考查了二项式定理的知识，解题关键是能够利用球和圆柱的表面积及体积公式确定二项展开式的表达式.

11．BD

【分析】

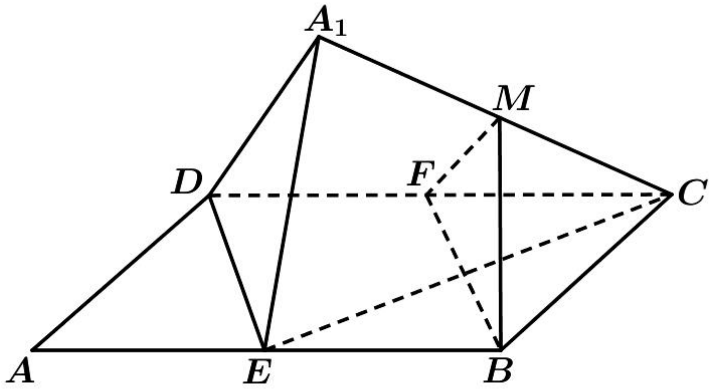
对于选项A，先假设存在某个位置使得$DE\perp A_1C$，通过说明$DE\perp A_1E$与$DA_1\perp A_1E$矛盾来判断；

对于选项B，取CD中点F，利用中位线得平行关系以及余弦定理来计算得出MB是定值；

对于选项C，通过利用中位线、平行四边形说明面面平行，得到$BM\parallel 面A_1DE$.

对于选项D，当$面DA_1E\perp 面DCE$时，三棱锥A_1-DCE的体积最大，$OF\perp 面DA_1E$，F为三棱锥A_1-DCE的外接球球心，进而进行计算得出结果.

【详解】



若存在某个位置使$DE\perp A_1C$,由已知得$\angle AED=\angle BEC=45^o$，则$DE\perp EC$，又$CE\cap A_1C=C$，

$\therefore DE \perp 面A_1EC$,得 $DE \perp A_1E$ ，这与使 $DA_1 \perp A_1E$ 矛盾，故 A 错误;

取 CD 中点 F，连接 MF,BF，则 $MF \parallel DA_1$ ， $BF \,//\, DE$ ，

由 $\angle A_1DE = \angle MFB$ ， $MF = \frac{1}{2}A_1D$ 为定值，又 $FB=DE$ 为定值,

所以由余弦定理可得 $MB^2 = MF^2 + FB^2 - 2MF \cdot FB \cdot cos\angle MFB$ ，即 MB 是定值，故 B 正确.

因为 M,F 分别为 A_1C、CD 的中点，所以 $MF \parallel DA_1$,

因为 $A_1D \subset 面A_1DE$, $MF \not\subset 面A_1DE$,所以 $MF \parallel 面A_1DE$,

因为 $DF \,//\, BE$ 且 $DF = BE$ ，所以四边形 $BEDF$ 为平行四边形，所以 $BF \,//\, DE$,

$DE \subset 面A_1DE$, $BF \not\subset 面A_1DE$, 所以 $BF \parallel 面A_1DE$,

又 $BF \bigcap MF = F$,BF、$MF \subset 面BMF$, $面BMF \parallel 面A_1DE$,

因为 $BM \subset 面BMF$, $BM \parallel 面A_1DE$,故 C 错误;

若 AD=1，则 $A_1D = A_1E = 1$， $\triangle DA_1E$ 是等腰直角三角形， $\triangle DCE$ 是等腰直角三角形，

当 $面DA_1E \perp 面DCE$ 时，三棱锥 $A_1 - DCE$ 的体积最大,

取 DE 中点 O，连接 OF，则 $OF \perp DE$ ，由 $面DA_1E \perp 面DCE$ ，且 $面DA_1E \cap 面DCE = ED$ ，

可得 $OF \perp 面DA_1E$ ，又 F 为 $\triangle DCE$ 的外心，所以 F 为三棱锥 $A_1 - DCE$ 的外接球球心，

半径为 $\frac{1}{2}CD$=1，外接球的表面积为 4π ，故 D 正确.

故选：BD

【点睛】

对于图形的特点要有一定的认识，证明线线平行、线面平行、面面平行要熟练掌握，对图形的空间立体感要建立起来.

12．AC

【分析】

根据正弦函数图象的对称性可判断A；根据已知三角函数值求角的方法，可得$\omega x_0+\varphi=2k\pi-\frac{5}{6}\pi,k\in Z$，$\omega(x_0+1)+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6},k\in Z$，两式相减可求出$\omega$，进而求得周期，从而可判断$B$和$C$选项；因为$T=3$，所以函数$f(x)$在区间$(0,2019)$上的长度恰好为673个周期，为了算出零点“至少”有多少个，可取$f(0)=0$，进而可判断D.

【详解】

解：由题意得，$f(x)$在$\left(x_0,x_0+1\right)$的区间中点处取得最小值，

即$f\left(x_0+\frac{1}{2}\right)=-1$，所以$A$正确；

因为$f\left(x_0\right)=f\left(x_0+1\right)=-\frac{1}{2}$，

且$f(x)$在$\left(x_0,x_0+1\right)$上有最小值，无最大值，

所以不妨令$\omega_0+\varphi=2k\pi-\frac{5}{6}\pi,k\in Z$，

$\omega\left(x_0+1\right)+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{6},k\in Z$，

两式相减得，$\omega=\frac{2\pi}{3}$，

所以$T=\frac{2\pi}{\omega}=3$，即B错误，C正确；

因为$T=3$，

所以函数$f(x)$在区间$(0,2019)$上的长度恰好为673个周期，

当$f(0)=0$，即$\varphi=k\pi$时，

$f(x)$在区间$(0,2019)$上的零点个数至少为$673\times2-1=1345$个，即D错误.

故选:AC.

【点睛】

本题考查与三角函数有关的命题的真假关系，结合三角函数的图象与性质，利用特殊值法以及三角函数的性质是解题的关键，综合性较强.

三．填空题。

13．$\frac{31}{16}$

【分析】

本题可根据抛物线的定义得出结果.

【详解】

抛物线$y=4x^2$即$x^2=\frac{1}{4}y$，焦点$F\left(0,\frac{1}{16}\right)$，

因为点$P\left(x_0,y_0\right)$在抛物线上且$\left|PF\right|=2$，

所以结合抛物线定义易知，$y_0=2-\frac{1}{16}=\frac{31}{16}$，

故答案为：$\frac{31}{16}$.

14．$\frac{49}{50}$或$\frac{1}{50}$

【分析】

利用恒等变换公式化简三角函数表达式，代入三角函数值计算即可.

【详解】

由$\sin a=\frac{3}{5}$，则$\cos a=\pm\frac{4}{5}$，

$$\cos(\frac{\pi}{4}+a)\sin(\frac{\pi}{4}-a)=(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin a)(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin a)$$

$=\frac{1}{2}\cos^2 a+\frac{1}{2}\sin^2 a-\sin a\cos a=\frac{1}{2}-\sin a\cos a=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{49}{50}$或$\frac{1}{50}$，

故答案为：$\frac{49}{50}$或$\frac{1}{50}$

15．①③

【分析】

根据一元二次函数及绝对值函数的性质，结合奇偶性，对称性，单调性对每一项进行分析即可.

【详解】

若$f(x)$为偶函数，则$f(-x)=\left|x^2+2ax+b\right|=f(x)=\left|x^2-2ax+b\right|$，

则$\left|x^2+2ax+b\right|^2=\left|x^2-2ax+b\right|^2\Rightarrow 4ax(x^2+b)=0$对$\forall x\in R$恒成立，则$a=0$，

故①正确；

$f(0)=|b|$，$f(2)=|4-4a+b|$，若 $f(0)=f(2)$，即 $|b|=|4-4a+b|$，

则 $b=4-4a+b \Leftrightarrow a=1$ 或 $-b=4-4a+b \Leftrightarrow 2a-b=2$，

若取 $a=0,b=-2$，则 $f(x)=|x^2-2|$ 关于 $x=0$ 对称，②错误；

若 $a^2-b\le 0$，函数 $y=x^2-2ax+b$ 的判别式 $\Delta=4a^2-4b\le 0$，

即 $y=x^2-2ax+b\ge 0$，$f(x)=|x^2-2ax+b|=x^2-2ax+b$，

由二次函数性质，知 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上是增函数，③正确；

取 $a=0,b=-4$，满足 $a^2-b-2>0$，则 $f(x)=|x^2-4|=2 \Leftrightarrow x^2-4=2$ 或 -2，

解得 $x=\pm\sqrt{2}$ 或 $\pm\sqrt{6}$，即 $h(x)=f(x)-2$ 有 4 个零点，④错误；

故答案为：①③

【点睛】

关键点点睛：对函数的综合性质考察比较综合，除解出参数关系或值外，判断正误也可以通过取一些特殊值快速的找到答案.

16．$\dfrac{4^{2015}-1}{3}$

【解析】

由题意得 $g(n)=n,(n为奇数),g(n)=g(\dfrac{n}{2}),(n为偶数),$

所以 $S_{2^{2015}-1}=g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+\cdots+g(2^{2015}-2)+g(2^{2015}-1)$

$=g(1)+g(1)+g(3)+g(2)+\cdots+g(2^{2014}-1)+g(2^{2015}-1)$

$=g(1)+g(2)+g(3)++\cdots+g(2^{2014}-1)+1+3+\cdots+(2^{2015}-1)$

$=S_{2^{2014}-1}+\dfrac{2^{2014}(1+2^{2015}-1)}{2}=S_{2^{2014}-1}+4^{2014}=S_{2^{2013}-1}+4^{2013}+4^{2014}$

$=\cdots=S_{2^1-1}+4^1+\cdots+4^{2013}+4^{2014}=1+4^1+\cdots+4^{2013}+4^{2014}=\dfrac{1-4^{2015}}{1-4}=\dfrac{4^{2015}-1}{3}.$

四．解答题。

17．（I）$a_n=2^n$，$S_n=2^{n+1}-2$；（II）$T_n=n\cdot 2^{n+1}$.

【分析】

（I）设公比为q，由题设列方程求q、a_1，根据等比数列的通项公式、前n项和公式写出a_n、S_n.

（II）由（I）知$b_n = 2^n \cdot (n+1)$，应用错位相减法求前n项和T_n即可.

【详解】

（I）设正项等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由题意有$\begin{cases} 2a_3 = a_1 + a_2 + 10 \\ S_3 - a_2 = a_1 + a_3 = 10 \end{cases}$，

$\therefore q^2 - q - 2 = 0$，而$q > 0$，解得$q = 2$，则有$8a_1 = 3a_1 + 10$，即$a_1 = 2$，

$\therefore a_n = 2^n$，$S_n = 2^{n+1} - 2$，$n \in N^*$.

（II）由（I）知：$b_n = \log_2\left(S_n + 2\right) \cdot a_n = 2^n(n+1)$.

$\therefore T_n = 2\times 2 + 3\times 2^2 + 4\times 2^3 + ... + (n+1)\cdot 2^n$，

$2T_n = 2\times 2^2 + 3\times 2^3 + 4\times 2^4 + ... + n\cdot 2^n + (n+1)\cdot 2^{n+1}$，

$\therefore -T_n = 2^2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n - (n+1)\cdot 2^{n+1} = -n\cdot 2^{n+1}$，

$\therefore T_n = n\cdot 2^{n+1}$.

18.（1）$B = \dfrac{\pi}{3}$；（2）2.

【分析】

（1）根据余弦定理、正弦定理，结合同角的三角函数关系式进行求解即可；

（2）根据三角形面积公式，结合余弦定理进行求解即可.

【详解】

解：（1）由$\sqrt{3}\left(a^2 + c^2 - b^2\right) = 2bc\sin A$，得$\sqrt{3}\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{b\sin A}{a}$，

得$\sqrt{3}\cos B = \dfrac{b\sin A}{a}$，

得$\sqrt{3}a\cos B = b\sin A$，

由正弦定理得$\sqrt{3}\sin A\cos B = \sin B\sin A$，

因为$\sin A \neq 0$，所以$\sqrt{3}\cos B = \sin B$，

所以$\tan B=\sqrt{3}$，

因为$0<B<\pi$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）若$\vartriangle ABC$的面积是$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

则$\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times a\times 2a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，解得$a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以$c=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，可得

$$b^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2-2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2},$$

所以$b=2$.

19.（1）$\hat{y}=0.31x+35$，物理成绩为69.1；（2）1585.

【分析】

（1）结合题中数据以及公式可得$\hat{y}=0.31x+35$，将110代入即可得结果；

（2）先得考生的物理成绩服从正态分布$N\left(66,9^2\right)$，根据正态分布的概率特征不低于75分的概率，进而得期望.

【详解】

（1）设根据剔除后数据建立的y关于x的回归直线方程为$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，

剔除异常数据后的数学平均分为$\dfrac{1110-110}{10}=100$，

剔除异常数据后的物理平均分为$\dfrac{660-0}{10}=66$，

则$\hat{b}=\dfrac{68586-110\times 0-10\times 66\times 100}{120426-110^2-10\times 100^2}=\dfrac{2586}{8326}\approx 0.31$，

则$\hat{a}=66-0.31\times 100=35$，

所以所求回归直线方程为$\hat{y}=0.31x+35$.

又物理缺考考生的数学成绩为110，

所以估计其可能取得的物理成绩为$\hat{y}=0.31\times110+35=69.1$.

（2）由题意知$\mu=66$，

因为$\sum_{i=1}^{11}y_i^2=\sum_{i=1}^{11}\left(y_i-\overline{y}\right)^2+11\overline{y}^2=4770+11\times\left(\frac{660}{11}\right)^2=44370$，

所以$\sigma=\sqrt{\frac{1}{10}\times44370-66^2}=\sqrt{81}=9$，

所以参加该次考试的10000名考生的物理成绩服从正态分布$N\left(66,9^2\right)$，

则物理成绩不低于75分的概率为$\frac{1-0.683}{2}=0.1585$，

由题意可知$Y\sim B\left(10000,0.1585\right)$，

所以物理成绩不低于75分的人数Y的期望

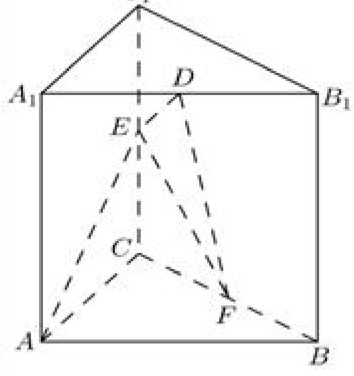
$EY=10000\times0.1585=1585$.

20.（1）见解析（2）$\frac{5}{14}\sqrt{14}$

【解析】

试题分析：直三棱柱底面为$\Delta ABC,AB\perp AC$，建立空间直角坐标系，写出相关点的坐标，利用向量数量积为0，易证$AE\perp DF$；再借助求平面的法向量，利用线面角公式及点到平面的距离公式求出对应的值.

试题解析：（1）以A为坐标原点、AB为x轴、AC为y轴、AA_1为z轴建立如图的空间直角坐标系.



由题意可知$A(0,0,0), D(0,1,2), E(-2,0,1), F(-1,1,0)$，

故$\overrightarrow{AE}=(-2,0,1), \overrightarrow{DF}=(-1,0,-2)$，

由$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}=-2\times(-1)+1\times(-2)=0$，

可知$\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{DF}$，即$AE\perp DF$.

（2）设$\vec{n}=(x,y,1)$是平面DEF的一个法向量，

又$\overrightarrow{DF}=(-1,0,-2), \overrightarrow{EF}=(1,1,-1)$，

故由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DF}=-x-2=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=x+y-1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-2,\\ y=3,\end{cases}$ 故$\vec{n}=(-2,3,1)$.

设AE与平面DEF所成角为θ，则$\sin\theta=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AE}\right|}=\dfrac{5}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{70}}{14}$，

所以AE与平面DEF所成角为$\arcsin\dfrac{\sqrt{70}}{14}$，

点A到平面DEF的距离为$AE\cdot\sin\theta=\dfrac{5}{14}\sqrt{14}$.

【点睛】根据几何体的特征建立适合的空间直角坐标系，写出相关点的坐标，证明线线垂直，只需说明数量积为零，求点到平面的距离，只需求出平面的法向量，利用点到平面距离公式计算出结果.证明线面、面面的平行或垂直问题，要把握平行与垂直的判定定理和性质定理，严格根据定理进行逻辑推理，有关角和距离的计算大多使用空间向量，借助法向量进行计算.

21.（1）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；（2）是，且定值为$\dfrac{1}{2}ab$.

【分析】

（1）求出点P、B的坐标，计算出点B到直线OP的距离，利用三角形的面积公式可求得四边形$OAPB$的面积；

（2）设点$P'(x_0,y_0)$，求出点B'的坐标，计算出点B'到直线OP'的距离d，利用平行四边形的面积公式化简可得结果.

【详解】

（1）因为双曲线$C: x^2-\frac{y^2}{3}=1$，由双曲线的定义可得$\left|PF_1\right|-\left|PF_2\right|=2$，

又因为$\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=8$，$\therefore \left|PF_1\right|=5$，$\left|PF_2\right|=3$，

因为$\left|F_1F_2\right|=2\sqrt{1+3}=4$，所以，$\left|PF_2\right|^2+\left|F_1F_2\right|^2=\left|PF_1\right|^2$，$\therefore PF_2\perp x$轴，

$\therefore$点P的横坐标为$x_P=2$，所以，$2^2-\frac{y_P^2}{3}=1$，$\because y_P>0$，可得$y_P=3$，即点$P(2,3)$，

过点P且与渐近线$y=-\sqrt{3}x$平行的直线的方程为$y-3=-\sqrt{3}(x-2)$，

联立$\begin{cases} y=\sqrt{3}x \\ y-3=-\sqrt{3}(x-2) \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=\sqrt{3}+\frac{3}{2} \end{cases}$，即点$B\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)$，

直线OP的方程为$3x-2y=0$，点B到直线OP的距离为$d=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$，

且$\left|OP\right|=\sqrt{13}$，因此，四边形$OAPB$的面积为$S_{\square OAPB}=2S_{\triangle OBP}=\left|OP\right|\cdot d=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

（2）四边形$OA'P'B'$的面积为定值$\frac{1}{2}ab$，理由如下：

设点$P'(x_0,y_0)$，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，

则直线$P'B'$的方程为$y-y_0=-\frac{b}{a}(x-x_0)$，

联立$\begin{cases} y-y_0=-\frac{b}{a}(x-x_0) \\ y=\frac{b}{a}x \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=\frac{x_0}{2}+\frac{a}{2b}y_0 \\ y=\frac{y_0}{2}+\frac{b}{2a}x_0 \end{cases}$，即点

$B'\left(\frac{x_0}{2}+\frac{a}{2b}y_0,\frac{y_0}{2}+\frac{b}{2a}x_0\right)$，

直线OP'的方程为$y=\frac{y_0}{x_0}x$，即$y_0x-x_0y=0$，

点 B' 到直线 OP' 的距离为 $d=\dfrac{\left|y_0\left(\dfrac{x_0}{2}+\dfrac{a}{2b}y_0\right)-x_0\left(\dfrac{y_0}{2}+\dfrac{b}{2a}x_0\right)\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\dfrac{\left|a^2y_0^2-b^2x_0^2\right|}{2ab\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$

$=\dfrac{a^2b^2}{2ab\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\dfrac{ab}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$，且 $\left|OP'\right|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$，

因此，$S_{\square OA'P'B'}=2S_{\triangle OB'P'}=\left|OP'\right|\cdot d=\dfrac{ab}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\cdot\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\dfrac{ab}{2}$（定值）.

【点睛】

方法点睛：求定值问题常见的方法有两种：

（1）从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关；

（2）直接推理、计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

22.（1）$\dfrac{\pi}{6}$.（2）$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

【分析】

（1）设∠OPQ＝α，在△POQ 中，用正弦定理 $\dfrac{OQ}{\sin\angle OPQ}=\dfrac{OP}{\sin\angle OQP}$ 可得含α，θ 的关系式，将其展开化简并整理后得 $tan\alpha$＝$\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}-\sin\theta}$，将$\theta$＝$\dfrac{\pi}{3}$代入得答案；

（2）令 $f(\theta)$＝$\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}-\sin\theta}$ 并利用导数求得 $f(\theta)$的最大值，即此时的 $\sin\theta$，由（1）可知 $tan\alpha$＝$\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}-\sin\theta}$，得答案.

【详解】

（1）设∠OPQ＝α，在△POQ 中，用正弦定理可得含α，θ的关系式.

因为∠AQC＝$\dfrac{2\pi}{3}$，所以∠AQO＝$\dfrac{\pi}{3}$.又 OA＝OB＝3，所以 OQ＝$\sqrt{3}$

在△OPQ 中，OQ＝$\sqrt{3}$，OP＝3，∠POQ＝$\dfrac{\pi}{2}$－θ，设∠OPQ＝α，则∠PQO＝$\dfrac{\pi}{2}$－α＋θ.

由正弦定理，得 $\dfrac{3}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha+\theta\right)}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}$，即 $\sqrt{3}\,sin\alpha$＝$cos(\alpha$－$\theta)$.

展开并整理，得 $tan\alpha=\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}-\sin\theta}$，其中$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

此时当$\theta=\frac{\pi}{3}$时，$tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.因为$\alpha\in(0，\pi)$，所以$\alpha=\frac{\pi}{6}$.

故当$\theta=\frac{\pi}{3}$时，$\angle OPQ=\frac{\pi}{6}$.

（2）设$f(\theta)=\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}-\sin\theta}$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

则$f'(\theta)=\frac{-\sin\theta(\sqrt{3}-\sin\theta)+\cos^2\theta}{(\sqrt{3}-\sin\theta)^2}=\frac{1-\sqrt{3}\sin\theta}{(\sqrt{3}-\sin\theta)^2}$.

令$f'(\theta)=0$，得 $sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，记锐角$\theta_0$满足$\sin\theta_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则$\cos\theta_0=\sqrt{1-\sin^2\theta_0}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，即$f\left(\theta_0\right)=\frac{\cos\theta_0}{\sqrt{3}-\sin\theta_0}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

列表如下：

θ	$(0，\theta_0)$	θ_0	$\left(\theta_0,\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$	＋	0	－
$f(\theta)$	单调递增	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	单调递减

由上表可知，$f(\theta_0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$是极大值，也是最大值.

由（1）可知 $tan\alpha=f(\theta)>0$，则$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$， $tan\alpha$单调递增

则当 $tan\alpha$取最大值$\frac{\sqrt{2}}{2}$时，α也取得最大值.

故游客在观赏亭 P 处的观赏效果最佳时，$sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】

本题考查三角函数和解三角形的实际应用，应优先建模，将实际问题转化为熟悉的数学问题，进而由正弦定理构建对应关系，还考查了利用导数求函数的最值，属于难题.