高　三　诊　断　性　练　习

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4．只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 40 分。

1．C　2．D　3．D　4．B　5．A　6．A　7．C　8．C

二、选择题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 20 分。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9．AD　10．BD　11．ABD　12．BCD

三、填空题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题 5 分，满分 20 分。

13．$y=x$　14．$\frac{3}{2}$　15．$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$　16．$\frac{2}{9}\pi R^2$；πR^2

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．本小题主要考查正弦定理、余弦定理、三角形面积公式及三角恒等变换等基础知识，考查逻辑推理能力、运算求解能力等，考查化归与转化思想、函数与方程思想等，考查数学运算、逻辑推理等核心素养，体现基础性和综合性．满分 10 分．

解法一：选① $b\sin A+a\cos B=0$，

在△ ABC 中，由正弦定理得 $\sin B\sin A+\sin A\cos B=0$，……………………………2 分

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq 0$，

所以 $\sin B+\cos B=0$，…………………………………………………………………4 分

显然 $\cos B\neq 0$，所以 $\tan B=-1$，……………………………………………………5 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{3\pi}{4}$．…………………………………………………………6 分

因为 $\cos A=\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 单调递减，所以 $A>\frac{\pi}{4}$，…………………………………8 分

所以 $A+B>\pi$，与△ ABC 内角和为 π 矛盾.

所以，不存在符合题意的△ ABC．…………………………………………………… 10 分

解法二：选① $b\sin A+a\cos B=0$，

在△ ABC 中，由正弦定理得 $\sin B\sin A+\sin A\cos B=0$．……………………………2 分

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq 0$，

所以 $\sin B+\cos B=0$，…………………………………………………………………4 分

所以 $\sqrt{2}\sin(B+\frac{\pi}{4})=0$．……………………………………………………………5 分

因为$0 < B < \pi$，所以$\frac{\pi}{4} < B+\frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$，所以$B+\frac{\pi}{4}=\pi$，所以$B=\frac{3\pi}{4}$． ……………6 分

因为$\cos A=\frac{3}{5}$，得$\sin A=\frac{4}{5}$， ……………………………………………………7 分

又因为$A+B+C=\pi$，

所以$\sin C=\sin(A+B)=\sin(A+\frac{3\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin A+\cos A)=-\frac{\sqrt{2}}{10}<0$，(*)

又因为$0 < C < \pi$，所以$\sin C>0$，与（*）矛盾， ……………………………………9 分

所以，不存在符合题意的△ABC． ……………………………………………………10 分

解法三：选①$b\sin A+a\cos B=0$，

在△ABC中，由正弦定理得$\sin B\sin A+\sin A\cos B=0$． …………………………2 分

因为$0 < A < \pi$，所以$\sin A\neq 0$，

所以$\sin B+\cos B=0$， ……………………………………………………………………4 分

显然$\cos B\neq 0$，所以$\tan B=-1$，………………………………………………………5 分

因为$0 < B < \pi$，所以$B=\frac{3\pi}{4}$， ……………………………………………………6 分

所以$B>A$．(*)

又因为$\cos A=\frac{3}{5}$，所以$\sin A=\frac{4}{5}$． ……………………………………………7 分

因为$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{5\sqrt{2}}{2}<4$， ………………………………8 分

所以$b<a$，所以$B<A$，与（*）矛盾. ……………………………………………9 分

所以，不存在符合题意的△ABC． ……………………………………………………10 分

解法四：选②$\sqrt{5}\cos 2C+3\cos C=0$，

由②得$\sqrt{5}(2\cos^2 C-1)+3\cos C=0$，……………………………………………1 分

所以$2\sqrt{5}\cos^2 C+3\cos C-\sqrt{5}=0$，

解得$\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$或$\cos C=-\frac{\sqrt{5}}{2}<-1$（舍去）. ……………………………2 分

在△ABC中，$0 < C < \pi$，所以$\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$． ………………………………3 分

又因为$\cos A=\frac{3}{5}$，$0 < A < \pi$，所以$\sin A=\frac{4}{5}$． ……………………………4 分

由$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=2\sqrt{5}$． ……………………………………6 分

又因为$A+B+C=\pi$，

所以$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$． ……………………8 分

所以△ABC的面积$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=8$.……………………10 分

解法五：选③$\sin B+\sin C=2\sin A$

在△ABC中，由正弦定理得$b+c=2a$． ………………………………………………2 分

因为$a=4$，所以$b+c=8$．……………………………………………………3 分

在$\triangle ABC$中，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，……………………………………5 分

因为$\cos A=\dfrac{3}{5}$，所以$16=b^2+c^2-\dfrac{6}{5}bc$，

所以$(b+c)^2-\dfrac{16}{5}bc=16$，所以$bc=15$．……………………………………7 分

因为$\cos A=\dfrac{3}{5}$，且$0<A<\pi$，则$\sin A=\dfrac{4}{5}$．……………………………8 分

所以$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 15\times\dfrac{4}{5}=6$.………………………… 10 分

18．本小题主要考查等差数列、等比数列、递推数列及数列求和等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力和创新能力等，考查化归与转化思想、分类与整合思想、函数与方程思想等，考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性和创新性．满分 12 分．

解法一：（1）由$S_{n+1}-1=S_n+2a_n$，

得$S_{n+1}-S_n=2a_n+1$，则$a_{n+1}=2a_n+1$，……………………………………2 分

所以$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$．……………………………………………………3 分

①当$a_1+1=0$时，$\{a_n+1\}$不是等比数列，符合题意；………………………4 分

②当$a_1+1\neq 0$时，$a_n+1=2(a_{n-1}+1)=2^2(a_{n-2}+1)=\cdots=2^{n-1}(a_1+1)\neq 0$，

所以$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，所以$\{a_n+1\}$是首项为$a_1+1$，公比为$2$的等比数列，与已知矛盾．

……………………………………………………………………5 分

综上，$a_1+1=0$，从而$a_n+1=0$，即$a_n=-1$．……………………………6 分

（2）因为$a_1=1$，则$a_1+1=2$，由（1）知$\{a_n+1\}$是首项为a_1+1，公比为2的等比数列，

$a_n+1=2^n$，所以$a_n=2^n-1$.……………………………………………7 分

设插入的所有数构成数列$\{c_n\}$，则$c_n=2n-1$，…………………………………8 分

因为$1+2+3+\cdots+8=36$，$36+9=45<50$，

$1+2+3+\cdots+8+9=45$，$45+10=55>50$，

所以，$b_1,b_2,\cdots,b_{50}$中包含$\{a_n\}$的前 9 项及$\{c_n\}$的前 41 项，………………9 分

所以$T_{50}=(a_1+a_2+\cdots+a_9)+(c_1+c_2+\cdots+c_{41})$ ………………………… 10 分

$$=(2-1)+(2^2-1)+\cdots+(2^9-1)+41\times 1+\frac{41\times 40}{2}\times 2$$

$$=\frac{2(1-2^9)}{1-2}-9+1681=2^{10}-11+1681=2694.$$ ………………………… 12 分

解法二：（1）由$S_{n+1}-1=S_n+2a_n$　①,

$n\geq 2$时，$S_n-1=S_{n-1}+2a_{n-1}$　②,

①−②得，$a_{n+1}=a_n+2a_n-2a_{n-1}$，……………………………………………1 分

所以$a_{n+1}-2a_n=a_n-2a_{n-1}$，…………………………………………………2 分

所以$a_{n+1}-2a_n=a_2-2a_1\left(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*\right)$.

当 $n=1$ 时，$S_2-1=S_1+2a_1$，得 $a_2-2a_1=1$，所以 $a_{n+1}-2a_n=1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，………3 分

所以 $a_{n+1}+1=2\left(a_n+1\right)=2^2(a_{n-1}+1)=\cdots=2^n(a_1+1)$，

因为 $\{a_n+1\}$ 不是等比数列，所以 $a_1+1=0$，………………………………………4 分

事实上，若 $a_1+1\neq 0$，则 $a_n+1\neq 0$，从而 $\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，

此时 $\{a_n+1\}$ 是首项为 a_1+1，公比为 2 的等比数列，与已知矛盾．…………………5 分

所以 $a_n+1=0$，即 $a_n=-1$．………………………………………………………6 分

（2）同解法一．…………………………………………………………………………12 分

解法三：（1）由 $S_{n+1}-1=S_n+2a_n$　①，

$n\geq 2$ 时，$S_n-1=S_{n-1}+2a_{n-1}$　②，

①−②得，$a_{n+1}=a_n+2a_n-2a_{n-1}$，…………………………………………………1 分

所以 $a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})$，……………………………………………………2 分

则 $a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})=\cdots=2^{n-1}(a_2-a_1)$，

所以 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=a_1+(a_2-a_1)(1+2+2^2+\cdots+2^{n-2})$

$=a_1+(a_2-a_1)(2^{n-1}-1)=(a_2-a_1)2^{n-1}+2a_1-a_2$，…………………………3 分

所以 $a_n+1=(a_2-a_1)2^{n-1}+2a_1-a_2+1$．

当 $n=1$ 时，$S_2-1=S_1+2a_1$，得 $a_2=2a_1+1$，……………………………………4 分

所以 $a_n+1=(a_1+1)2^{n-1}$，

若 $a_1+1\neq 0$，则 $\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，

此时 $\{a_n+1\}$ 是首项为 a_1+1，公比为 2 的等比数列，与已知矛盾．…………………5 分

所以 $a_1+1=0$，则 $a_n+1=0$，即 $a_n=-1$．………………………………………6 分

（2）同解法一．…………………………………………………………………………12 分

19．本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系，直线与平面所成角等基础知识；考查空间想象能力，逻辑推理能力，运算求解能力等；考查化归与转化思想，数形结合思想，函数与方程思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性和综合性．满分 12 分．

解法一：（1）如图，过点 E 作 $EF\parallel AB$，交 BC 于点 F，

连结 AF 交 BE 于点 O，连结 PO，PF．……………………………………………1 分

因为底面 $ABCD$ 为矩形，且 $AB=AE$，

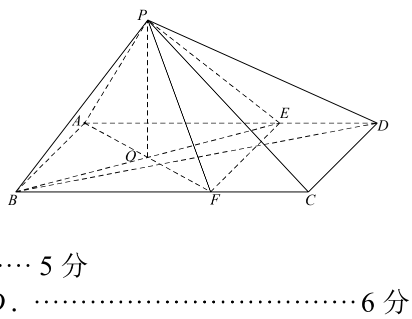
所以四边形 $ABFE$ 为正方形．

所以 $AF\perp BE$，$AB=BF$．………………………2 分

又因为 $\angle PBA=\angle PBC$，$PB=PB$，

所以 $\triangle PBA\cong\triangle PBF$，所以 $PA=PF$．

因为 O 为 AF 的中点，所以 $PO\perp AF$．…………4 分



因为 $PO\cap BE=O$，$PO,BE\subset$ 平面 PBE，

所以 $AF\perp$ 平面 PBE，……………………………………5 分

因为 $AF\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $PBE\perp$ 平面 $ABCD$．……………………………6 分

（2）设 $DE=1$，则 $PB=AB=AE=2$．

因为 $\angle PBA=60^\circ$，所以 ΔPAB 为等边三角形，所以 $PA=2$．

在正方形 $ABFE$ 中，$AF=BE=2\sqrt{2}$，$AO=BO=\sqrt{2}$，

在 $\mathbf{Rt}\triangle POA$ 中，$PO^2=PA^2-OA^2=2$，所以 $PO=\sqrt{2}$．

所以 $PO^2+OB^2=PB^2$，所以 $\angle POB=90^\circ$，所以 $PO\perp BE$．

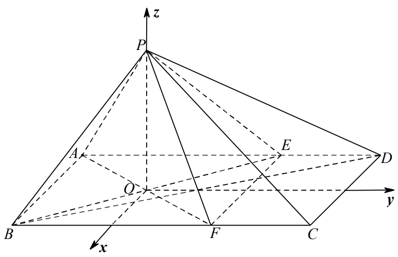
因为平面 $PBE\perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PBE\cap$ 平面 $ABCD=BE$，$PO\subset$ 平面 PBE，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$．……………………………………………………………………7 分

以 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OP}$ 为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系.……………………………………………………………………………8 分

则 $B(1,-1,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，$C(1,2,0)$，$D(-1,2,0)$，

所以 $\overrightarrow{BP}=(-1,1,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DP}=(1,-2,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{PC}=(1,2,-\sqrt{2})$．…………………………9 分



设平面 BPD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y+\sqrt{2}z=0,\\ x-2y+\sqrt{2}z=0.\end{cases}$

取 $\boldsymbol{n}=(3,2,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，……………………… 10 分

设直线 PC 与平面 PBD 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\cdot\left|\boldsymbol{n}\right|}=\frac{6}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{\dfrac{27}{2}}}=\frac{2\sqrt{42}}{21}.$$

所以，直线 PC 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{42}}{21}$．…………………………… 12 分

解法二：（1）同解法一；

（2）设 $DE=1$，则 $PB=AB=AE=2$，

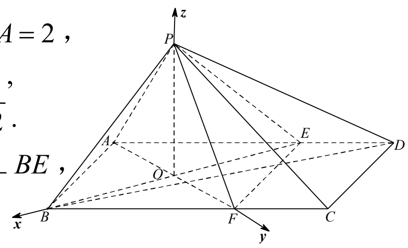
因为 $\angle PBA=60^\circ$，所以 ΔPAB 为等边三角形，所以 $PA=2$，

在正方形 $ABFE$ 中，$AF=BE=2\sqrt{2}$，$AO=BO=\sqrt{2}$，

在 $\mathbf{Rt}\triangle POA$ 中，$PO^2=PA^2-OA^2=2$，所以 $PO=\sqrt{2}$．

所以 $PO^2+OB^2=PB^2$，所以 $\angle POB=90^\circ$，所以 $PO\perp BE$，

又由（1）知，$AF\perp BE$，$PO\perp AF$，



以 O 为原点，分别以 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{OP}$ 为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系.……………………………………………………………………………8 分

则 $B(\sqrt{2},0,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，$C(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3\sqrt{2}}{2},0)$，$D(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0)$，

所以 $\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DP}=(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{PC}=(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$．…………9 分

设平面 BPD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+z=0,\\ 3x-y+2z=0,\end{cases}$取$\boldsymbol{n}=(1,5,1)$. ………………………………… 10 分

设直线PC与平面PBD所成角为θ，则

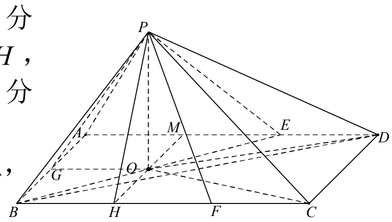
$$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\cdot\left|\boldsymbol{n}\right|}=\frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{42}}{21}.$$

所以，直线PC与平面PBD所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{42}}{21}$. ……………………………… 12 分

解法三：(1) 如图，过点P作$PO\perp$平面$ABCD$，垂足为O，过点O分别作$OG\perp AB$，$OH\perp BC$，垂足分别为G，H，连结PG，PH. ………………… 1 分

则$PO\perp AB$，因为$OG\cap PO=O$，$PO,OG\subset$平面POG，所以$AB\perp$平面POG，

所以$AB\perp PG$. 同理，$BC\perp PH$. ………………… 3 分



因为$\angle PBA=\angle PBC$，$PB=PB$，所以$\triangle PBG\cong\triangle PBH$，

所以$BG=BH$. ……………………………………… 4 分

连结OB，所以$\triangle OBG\cong\triangle OBH$，

所以$\angle OBG=\angle OBH$，所以点O在$\angle ABC$的平分线上，

因为$AB=AE$且底面$ABCD$为矩形，

所以BE为$\angle ABC$的平分线，所以B,O,E三点共线. ……………………………… 5 分

所以$PO\subset$平面PBE，所以平面$PBE\perp$平面$ABCD$. ……………………………… 6 分

(2) 设$DE=1$，则$PB=AB=AE=2$，

因为$\angle PBA=60^\circ$，所以$\triangle PAB$为等边三角形，所以$PA=2$，

由 (1) 知，$AB\perp PG$，所以G为AB中点.

因为在矩形$ABCD$中，$OG\perp AB$，$AD\perp AB$，所以$OG// AD$，所以O为BE中点.

在正方形$ABFE$中，$AF=BE=2\sqrt{2}$，$AO=BO=\sqrt{2}$，

在$\mathbf{Rt}\triangle POB$中，$PO^2=PB^2-OB^2=2$，所以$PO=\sqrt{2}$.

过O作$OM\perp AD$于M，连接OD，则$OM=\frac{1}{2}AB=1,ME=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}AB=1$，

$MD=ME+ED=2$，在$\mathbf{Rt}\triangle OMD$中，$OD=\sqrt{OM^2+MD^2}=\sqrt{5}$.

在$\mathbf{Rt}\triangle POD$中，$PD=\sqrt{PO^2+OD^2}=\sqrt{7}$，

连接OC，同理可得$PC=\sqrt{7}$.

在$\mathbf{Rt}\triangle BCD$中，$BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{13}$， ……………………………………… 7 分

在$\triangle PBD$中，$\cos\angle PDB=\frac{PD^2+BD^2-PB^2}{2PD\cdot BD}=\frac{8}{\sqrt{91}}$，

所以$\sin\angle PDB=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$，所以$S_{\Delta PDB}=\frac{1}{2}PD\cdot DB\cdot\sin\angle PDB=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ………………… 9 分

设C到平面PBD的距离为h，

由$V_{C-PBD}=V_{P-BCD}$，得$\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot PO=\frac{1}{3}S_{\Delta PDB}\cdot h$，解得$h=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. ……………… 11 分

设直线 PC 与平面 PBD 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{h}{PC}=\dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{42}}{21}$.

所以，直线 PC 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{42}}{21}$. ……………………………… 12 分

20．本小题主要考查回归分析等基础知识；考查数学建模能力，运算求解能力，逻辑推理能力，创新能力以及理解和表达能力等；考查统计与概率思想，函数与方程思想等；考查数学抽象，数学建模，数据分析和数学运算等核心素养；体现综合性，应用性和创新性．满分 12 分．

解：（1）因为 $\sum\limits_{i=1}^{30}x_iy_i=\sum\limits_{i=1}^{16}x_iy_i+\sum\limits_{i=17}^{30}x_iy_i=9434$，$\sum\limits_{i=1}^{30}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{16}x_i^2+\sum\limits_{i=17}^{30}x_i^2=6840$，

$\overline{x}=\dfrac{1}{30}\left(\sum\limits_{i=1}^{16}x_i+\sum\limits_{i=17}^{30}x_i\right)=14.2$，$\overline{y}=\dfrac{1}{30}\left(\sum\limits_{i=1}^{16}y_i+\sum\limits_{i=17}^{30}y_i\right)=24.4$， ………………………2 分

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\dfrac{9434-30\times14.2\times24.4}{6840-30\times14.2^2}\approx-1.214$， ……4 分

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=24.4+1.214\times14.2\approx41.64$，

$\hat{a}=41.64,\hat{b}=-1.21$ ……………………………………………………………………5 分

（2）由（1）知 $\hat{a}=41.64,\hat{b}=-1.21$，所以 L_1 的方程为 $y=-1.21x+41.64$.

联立 $\begin{cases}y=-1.21x+41.64,\\ y=0.02x+14.64,\end{cases}$ ……………………………………………………………7 分

解得 $x\approx21.95$， ………………………………………………………………………8 分

所以首次用药时的白细胞浓度为 2195 个/mm^3 时，最终用药剂量最少. …………9 分

（3）本题结论开放，只要考生能从统计学的角度作出合理的分析即可．如：①一次取样未必能客观反映总体；②样本容量过小也可能影响估计的准确性；③忽略异常点的影响也可能导致估计失真；④模型选择不恰当，模型的拟合效果不好，也将导致估计失真；⑤样本不具代表性，也会对估计产生影响．等等．……………………… 12 分

21．本小题主要考查导数，函数的单调性、极值，不等式等基础知识；考查逻辑推理能力，直观想象能力，运算求解能力和创新能力等；考查函数与方程思想，化归与转化思想，数形结合思想，分类与整合思想等；考查逻辑推理，直观想象，数学运算等核心素养；体现综合性和创新性．满分 12 分．

解法一：

（1）依题意 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=-(x+2)\mathrm{e}^{-x}+2$，$f''(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$，…… 1 分

当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增，

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f''(x)<0$，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 单调递减. ……………………2 分

又因为 $f'(-1)=2-\mathrm{e}<0$，$f'(0)=0$，$f'(-2)=2>0$，

所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 恰有 1 个零点 x_0，在 $(-1,+\infty)$ 恰有 1 个零点 0， …………………4 分

且当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(x_0,0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 单调递增，在 $(x_0, 0)$ 单调递减，在 $(0, +\infty)$ 单调递增，
所以 $f(x)$ 恰有一个极大值点 x_0 和一个极小值点 0，
即 $f(x)$ 恰有两个极值点；…………………………………………………………………5 分
（2）由 $f(x) \le ax^2 + 3$ 得，$(x+3)\mathrm{e}^{-x} \le ax^2 - 2x + 3$，即 $\left(ax^2 - 2x + 3\right)\mathrm{e}^{x} \ge x + 3$，
设 $g(x) = \left(ax^2 - 2x + 3\right)\mathrm{e}^{x} - x - 3$．
①当 $a \ge \dfrac{1}{2}$ 时，因为 $x^2\mathrm{e}^{x} \ge 0$，
所以 $g(x) = ax^2\mathrm{e}^{x} + (3-2x)\mathrm{e}^{x} - x - 3 \ge \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x} + (3-2x)\mathrm{e}^{x} - x - 3$．……………………6 分
设 $h(x) = \left(\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3\right)\mathrm{e}^{x} - x - 3$，则 $h'(x) = \left(\dfrac{1}{2}x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{x} - 1$，$h''(x) = \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x} \ge 0$，
所以 $h'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增．又因为 $h'(0) = 0$，
所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时，$h'(x) > 0$，所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，
当 $x \in (-\infty, 0)$ 时，$h'(x) < 0$，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减，
所以 $h(x) \ge h(0) = 0$，所以 $g(x) \ge 0$，即 $f(x) \le ax^2 + 3$，符合题意；………………8 分
②当 $0 < a < \dfrac{1}{2}$ 时，则 $g'(x) = \left(ax^2 + 2(a-1)x + 1\right)\mathrm{e}^{x} - 1$，
$g''(x) = \left(ax^2 + 2(2a-1)x + 2a - 1\right)\mathrm{e}^{x}$．……………………………………………10 分
设 $\varphi(x) = ax^2 + 2(2a-1)x + 2a - 1$，
$\Delta = 4(2a-1)^2 - 4a(2a-1) = 4(2a-1)(a-1) > 0$，
所以 $\varphi(x)$ 恰有两个零点 x_1, x_2，且 $x_1x_2 = \dfrac{2a-1}{a} < 0$，
所以 $x_1 < 0 < x_2$，且当 $x \in (0, x_2)$ 时，$\varphi(x) < 0$．
所以当 $x \in (0, x_2)$ 时，$g''(x) < 0$，所以 $g'(x)$ 在 $(0, x_2)$ 单调递减，$g'(x) < g'(0) = 0$，
所以 $g(x)$ 在 $(0, x_2)$ 单调递减，
所以当 $x \in (0, x_2)$ 时，$g(x) < g(0) = 0$，
即 $f(x) > ax^2 + 3$，与 $f(x) \le ax^2 + 3$ 矛盾，不合题意；………………………………11 分
③当 $a \le 0$ 时，$g(x) \le (3-2x)\mathrm{e}^{x} - x - 3$，
所以 $g(1) \le \mathrm{e} - 4 < 0$，即 $f(1) > a + 3$ 与 $f(1) \le a + 3$ 矛盾，不符合题意；
综上，a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$．……………………………………………………12 分
解法二：
（1）同解法一；……………………………………………………………………………5 分
（2）设 $g(x) = f(x) - ax^2 - 3 = (x+3)\mathrm{e}^{-x} - ax^2 + 2x - 3$，则 $g(x) \le 0$，
$g'(x) = -(x+2)\mathrm{e}^{-x} - 2ax + 2$，$g''(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x} - 2a$，$g'''(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$．……………6 分
所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时，$g'''(x) < 0$，所以 $g''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'''(x)>0$，所以 $g''(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，

所以 $g''(x)\le g''(0)=1-2a$. ……………………………………………………………………7 分

①当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，因为 $g''(x)\le 1-2a\le 0$，所以 $g'(x)$ 单调递减，又因为 $g'(0)=0$，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，

所以 $g(x)\le g(0)=0$，即 $f(x)\le ax^2+3$，符合题意；………………………………9 分

②当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$g''(-1)=-2a<0$，$g''(0)=1-2a>0$，

所以 $g''(0)\cdot g''(-1)<0$，又因为 $g''(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，

所以 $g''(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 恰有一个零点 x_1，且当 $x\in(x_1,0)$ 时，$g''(x)>0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(x_1,0)$ 单调递增，

所以当 $x\in(x_1,0)$ 时，$g'(x)<g'(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(x_1,0)$ 单调递减，

所以当 $x\in(x_1,0)$ 时，$g(x)>g(0)=0$，与 $g(x)\le 0$ 矛盾，不符合题意；…………… 11 分

③当 $a\le 0$ 时，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g''(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}-2a\ge 0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，所以 $g'(x)>g'(0)=0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，所以 $g(x)>g(0)=0$，与 $g(x)\le 0$ 矛盾，不符合题意；

综上，a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. ………………………………………………………… 12 分

解法三：

（1）同解法一；…………………………………………………………………………………5 分

（2）设 $g(x)=f(x)-ax^2-3=(x+3)\mathrm{e}^{-x}-ax^2+2x-3$，则 $g(x)\le 0$，

$g'(x)=-(x+2)\mathrm{e}^{-x}-2ax+2$，$g''(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}-2a$，$g'''(x)=-x\mathrm{e}^{-x}$.

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'''(x)<0$，所以 $g''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'''(x)>0$，所以 $g''(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，

所以 $g''(x)\le g''(0)=1-2a$. ……………………………………………………………………7 分

①当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，因为 $g''(x)\le 1-2a\le 0$，所以 $g'(x)$ 单调递减，又因为 $g'(0)=0$，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，

所以 $g(x)\le g(0)=0$，即 $f(x)\le ax^2+3$，符合题意；………………………………9 分

②当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，设 $h(x)=\mathrm{e}^x-x^2\,(x\ge 1)$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-2x$，$h''(x)=\mathrm{e}^x-2\ge\mathrm{e}-2>0$，

所以 $h'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $h'(x)>h'(1)=\mathrm{e}-2>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $h(x)\ge h(1)=\mathrm{e}-1>0$，

所以当 $b>\frac{1}{a}>2$ 时，$\mathrm{e}^b>b^2$，所以 $g''(b)<\frac{b+1}{b^2}-2a<\frac{2}{b}-2a<0$.

因为$g''(0)=1-2a>0$，所以$g''(0)\cdot g''(b)<0$，又因为$g''(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，
所以$g''(x)$在$(0,+\infty)$恰有一个零点x_1，且当$x\in(0,x_1)$时，$g''(x)>0$，
所以$g'(x)$在$(0,x_1)$单调递增，
所以当$x\in(0,x_1)$时，$g'(x)>g'(0)=0$，所以$g(x)$在$(0,x_1)$单调递增，
所以当$x\in(0,x_1)$时，$g(x)>g(0)=0$，与$g(x)\le 0$矛盾，不符合题意；…………… 11 分
③当$a\le 0$时，$g(x)\ge(x+3)\mathrm{e}^{-x}+2x-3$，
所以$g(2)\ge 5\mathrm{e}^{-2}+1>0$，与$g(x)\le 0$矛盾，不符合题意；
综上，a的取值范围为$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$． ………………………………………………………… 12 分

解法四：
（1）同解法一；……………………………………………………………………………………5 分
（2）设$g(x)=f(x)-ax^2-3=(x+3)\mathrm{e}^{-x}-ax^2+2x-3$，则$g(x)\le 0$．
又因为$g(0)=0$，所以0是$g(x)$的一个极大值点．
又$g'(x)=-(x+2)\mathrm{e}^{-x}-2ax+2$，
所以存在$\delta>0$，使得当$x\in(-\delta,0)$时$g'(x)\ge 0$，即$2a\ge\dfrac{-(x+2)\mathrm{e}^{-x}+2}{x}$，
且当$x\in(0,\delta)$时$g'(x)\le 0$，即$2a\ge\dfrac{-(x+2)\mathrm{e}^{-x}+2}{x}$． ………………………………7 分
设$h(x)=\dfrac{-(x+2)\mathrm{e}^{-x}+2}{x}$，则$h'(x)=\dfrac{(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}-2}{x^2}$．
设$\varphi(x)=(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}-2$，则$\varphi'(x)=-x^2\mathrm{e}^{-x}\le 0$，
所以，$\varphi(x)$在$(-\delta,\delta)$单调递减，
所以，当$x\in(-\delta,0)$时，$\varphi(x)\ge\varphi(0)=0$，$h'(x)\ge 0$，$h(x)$在$(-\delta,0)$单调递增，
当$x\in(0,\delta)$时，$\varphi(x)\le\varphi(0)=0$，$h'(x)\le 0$，$h(x)$在$x\in(0,\delta)$单调递减，…………8 分
所以$2a\ge\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(x+2)\mathrm{e}^{-x}+2}{x}$．设$u(x)=-(x+2)\mathrm{e}^{-x}+2$，则$u(0)=0$，
$u'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$，$u'(0)=1$．
所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(x+2)\mathrm{e}^{-x}+2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(x+2)\mathrm{e}^{-x}+2-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u(x)-u(0)}{x-0}=u'(0)=1$，
所以$2a\ge 1$，即$a\ge\dfrac{1}{2}$． ……………………………………………………………………… 10 分
另一方面，当$a\ge\dfrac{1}{2}$时，$g(x)=(x+3)\mathrm{e}^{-x}-ax^2+2x-3\le(x+3)\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{1}{2}x^2+2x-3$．
设$m(x)=(x+3)\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{1}{2}x^2+2x-3$，则$m'(x)=-(x+2)\mathrm{e}^{-x}-x+2$，
当$m''(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}-1$，$m'''(x)=-x\mathrm{e}^{-x}$．
所以当$x\in(0,+\infty)$时，$m'''(x)<0$，所以$m'''(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$m'''(x)>0$，所以 $m''(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，

所以 $m''(x)\le m''(0)=0$，所以 $m'(x)$ 单调递减．又因为 $m'(0)=0$，

所以当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$m'(x)<0$，所以 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$m'(x)>0$，所以 $m(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，

所以 $m(x)\le m(0)=0$，所以 $f(x)\le ax^2+3$，符合题意．

综上，a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$．…………12 分

22．本小题主要考查椭圆的标准方程及简单几何性质，直线与圆、椭圆的位置关系，平面向量等基础知识；考查运算求解能力，逻辑推理能力，直观想象能力和创新能力等；考查数形结合思想，函数与方程思想，化归与转化思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性，综合性与创新性．满分 12 分．

解法一：（1）因为直线 $l:x=1$ 与 C 的两个交点和 O,B 构成的四边形是菱形，

所以 l 垂直平分 OB，所以 $B(2,0)$，$a=2$．…………1 分

设 $D(1,y_0)$ 为直线 l 与 C 的一个交点，则菱形的面积为 $\frac{1}{2}\times2\times|2y_0|=2|y_0|$．……2 分

因为菱形的面积为 $\sqrt{6}$，所以 $2|y_0|=\sqrt{6}$，解得 $y_0=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，即 $D\left(1,\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$．……3 分

将点 $D\left(1,\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $\frac{1}{a^2}+\frac{3}{2b^2}=1$，又 $a^2=4$，所以 $b^2=2$．……4 分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．…………5 分

（2）由题意，得 OB 为圆 E 的一条弦，且直线 $x=1$ 垂直平分该弦，

故直线 $x=1$ 经过圆心 E，所以 MN 为圆 E 的直径，因此 $\angle MON=90^\circ$，即 $\overline{OM}\cdot\overline{ON}=0$．

设 $M(1,y_M)$，$N(1,y_N)$，则 $y_My_N=-1$．…………6 分

注意到 $k_{AM}=\frac{y_M}{3},k_{AN}=\frac{y_N}{3}$，则 $k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{y_My_N}{9}=-\frac{1}{9}$．

又因为 $k_{AM}=k_{AP}$，$k_{AN}=k_{AQ}$，所以 $k_{AP}k_{AQ}=-\frac{1}{9}$．…………7 分

设直线 PQ 的方程为 $x=my+t\,(t\ne-2)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$．

由 $\begin{cases}x=my+t,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 得，$(m^2+2)y^2+2mty+t^2-4=0$．

$\Delta=4m^2t^2-4(m^2+2)(t^2-4)=8(2m^2+4-t^2)>0$，（*）

$y_1+y_2=-\frac{2mt}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{t^2-4}{m^2+2}$．　① …………8 分

因为 $k_{AP}=\frac{y_1}{x_1+2}$，$k_{AQ}=\frac{y_2}{x_2+2}$，故 $\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=-\frac{1}{9}$，

即 $\dfrac{y_1y_2}{(my_1+t+2)(my_2+t+2)}=-\dfrac{1}{9}$.

即 $\dfrac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+m(t+2)(y_1+y_2)+(t+2)^2}=-\dfrac{1}{9}$.

将①代入上式得 $\dfrac{t^2-4}{m^2(t^2-4)-2m^2t(t+2)+(t+2)^2(m^2+2)}=-\dfrac{1}{9}$， ………………… 9 分

化简得 $\dfrac{t-2}{2(t+2)}=-\dfrac{1}{9}$，解得 $t=\dfrac{14}{11}$，满足（*）.

所以直线 PQ 的方程为 $x=my+\dfrac{14}{11}$，

故直线 PQ 过定点 $G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$. ……………………………………………………………… 10 分

由 $\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SP}$， $\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{TQ}$，所以 $ST//PQ$，

所以直线 ST 也过定点 H，且 $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HG}$，解得 $H\left(-\dfrac{13}{11},0\right)$. ………………… 11 分

注意到 O 位于线段 GH 上，故 O 到直线 ST 的距离与 O 到直线 PQ 的距离之和等于两平行直线 ST， PQ 之间的距离 d，且 $d\leqslant\dfrac{27}{11}$.

当 ST， PQ 垂直于 x 轴时，点 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和为 $\dfrac{27}{11}$，

所以点 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和的最大值是 $\dfrac{27}{11}$. ……………………… 12 分

解法二：（1）同解法一. ………………………………………………………………… 5 分

（2）由（1）可得 $A(-2,0)$，设直线 AM 的方程为 $y=k_1(x+2)$，则 $M(1,3k_1)$.

另设直线 AN 的方程为 $y=k_2(x+2)$，则 $N(1,3k_2)$.

由题意，得 OB 为圆 E 的一条弦，且直线 $x=1$ 垂直平分该弦，

故直线 $x=1$ 经过圆心 E，所以 MN 为圆 E 的直径，因此 $\angle MON=90^\circ$，即 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$.

所以 $1+3k_1\cdot 3k_2=0$，即 $k_1k_2=-\dfrac{1}{9}$. ……………………………………………………… 6 分

由 $\begin{cases} y=k_1(x+2), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 得 $(x+2)\left[(2k_1^2+1)x+4k_1^2-2\right]=0$， ………………………… 7 分

所以 $x_P=-\dfrac{4k_1^2-2}{2k_1^2+1}$.

将 $x_P=-\dfrac{4k_1^2-2}{2k_1^2+1}$ 代入 $y=k_1(x+2)$，得 $y_P=\dfrac{4k_1}{2k_1^2+1}$，即 $P\left(-\dfrac{4k_1^2-2}{2k_1^2+1},\dfrac{4k_1}{2k_1^2+1}\right)$. 8 分

同理可得 $Q\left(-\dfrac{4k_2^2-2}{2k_2^2+1},\dfrac{4k_2}{2k_2^2+1}\right)$.

当$k_1+k_2\neq 0$时，

直线PQ的斜率为$k_{PQ}=\dfrac{\dfrac{4k_2}{2k_2^{\,2}+1}-\dfrac{4k_1}{2k_1^{\,2}+1}}{-\dfrac{4k_2^{\,2}-2}{2k_2^{\,2}+1}+\dfrac{4k_1^{\,2}-2}{2k_1^{\,2}+1}}=\dfrac{(k_1-k_2)(8k_1k_2-4)}{8(k_1+k_2)(k_1-k_2)}=\dfrac{2k_1k_2-1}{2(k_1+k_2)}$，

所以直线PQ的方程为$y-\dfrac{4k_1}{2k_1^{\,2}+1}=\dfrac{2k_1k_2-1}{2(k_1+k_2)}\left(x+\dfrac{4k_1^{\,2}-2}{2k_1^{\,2}+1}\right)$， ……………………… 9 分

即$2y(k_1+k_2)(2k_1^{\,2}+1)-8k_1(k_1+k_2)=(2k_1k_2-1)(2k_1^{\,2}+1)x+(2k_1k_2-1)(4k_1^{\,2}-2)$ ①.

将$k_1k_2=-\dfrac{1}{9}$代入①，得$y=-\dfrac{11}{18(k_1+k_2)}\left(x-\dfrac{14}{11}\right)$，所以直线$PQ$过定点$G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$.

当$k_1+k_2=0$时，直线PQ的方程为$x=\dfrac{14}{11}$，也过点$G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$.

因此直线PQ始终过定点$G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$. ……………………………………………………… 10 分

设直线ST与x轴交于点$H(x_H,0)$.

因为$\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SP},\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{TQ}$，所以$ST /\!/ PQ$，且$\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HG}$，

所以$x_H+2=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{14}{11}-x_H\right)$，解得$x_H=-\dfrac{13}{11}$，即直线$ST$过定点$H\left(-\dfrac{13}{11},0\right)$. …… 11 分

设直线PQ的方程为$x=ty+\dfrac{14}{11}$，即$11x-11ty-14=0$.

所以点O到直线PQ的距离为$d_1=\dfrac{14}{11\sqrt{t^2+1}}$.

同理可得点O到直线ST的距离为$d_2=\dfrac{13}{11\sqrt{t^2+1}}$.

所以$d_1+d_2=\dfrac{27}{11\sqrt{t^2+1}}\leq\dfrac{27}{11}$，当且仅当$t=0$，即$PQ$垂直于$x$轴时等号成立.

故点O到直线ST和直线PQ的距离之和的最大值为$\dfrac{27}{11}$. ………………………… 12 分

解法三：（1）同解法一. ……………………………………………………………………… 5 分

（2）设$M(1,y_M)$，$N(1,y_N)$.

由已知得E在直线$x=1$上，设$E(1,s)$，则圆E的方程为$(x-1)^2+(y-s)^2=s^2+1$.

令$x=1$，得$y^2-2sy-1=0$，由韦达定理，得$y_My_N=-1$.

由（1）可得$A(-2,0)$，

所以直线AM的方程为$y=\dfrac{y_M}{3}(x+2)$，直线AN的方程为$y=\dfrac{y_N}{3}(x+2)$.

由$\begin{cases} y=\dfrac{y_M}{3}(x+2), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 整理，得$\left(2y_M^2+9\right)x^2+8y_M^2x+8y_M^2-36=0$， …………………… 7 分

所以$-2x_P=\dfrac{8y_M^2-36}{2y_M^2+9}$，则$x_P=-\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9}$.

将$x_P=-\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9}$代入$y=\dfrac{y_M}{3}(x+2)$，得$y_P=\dfrac{12y_M}{2y_M^2+9}$，

即$P\left(-\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9},\dfrac{12y_M}{2y_M^2+9}\right)$. ………………………………………………………… 12 分

同理可得$Q\left(-\dfrac{4y_N^2-18}{2y_N^2+9},\dfrac{12y_N}{2y_N^2+9}\right)$.

当$y_M+y_N\neq 0$时，

直线PQ的斜率为$k_{PQ}=\dfrac{\dfrac{12y_M}{2y_M^2+9}-\dfrac{12y_N}{2y_N^2+9}}{-\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9}-\left(-\dfrac{4y_N^2-18}{2y_N^2+9}\right)}=\dfrac{2y_My_N-9}{6(y_M+y_N)}=-\dfrac{11}{6(y_M+y_N)}$.

所以直线PQ的方程为$y-\dfrac{12y_M}{2y_M^2+9}=-\dfrac{11}{6(y_M+y_N)}\left(x+\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9}\right)$， ……………… 9 分

即$y=-\dfrac{11}{6(y_M+y_N)}\left(x+\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9}\right)+\dfrac{12y_M}{2y_M^2+9}$,

即$y=-\dfrac{11}{6(y_M+y_N)}\left(x+\dfrac{4y_M^2-18}{2y_M^2+9}-\dfrac{12y_M}{2y_M^2+9}\cdot\dfrac{6(y_M+y_N)}{11}\right)$,

即$y=-\dfrac{11}{6(y_M+y_N)}\left(x-\dfrac{14}{11}\right)$. 所以直线$PQ$过定点$G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$.

当$y_M+y_N=0$时，直线PQ的方程为$x=\dfrac{14}{11}$，也过点$G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$.

因此直线PQ始终过定点$G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$. ……………………………………………… 10 分

设直线ST与x轴交于点$H(x_H,0)$.

因为$\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SP},\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{TQ}$，所以$ST /\!/ PQ$，且$\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HG}$，

所以$x_H+2=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{14}{11}-x_H\right)$，解得$x_H=-\dfrac{13}{11}$，即直线$ST$过定点$H\left(-\dfrac{13}{11},0\right)$. …… 11 分

设直线PQ的方程为$x=ty+\dfrac{14}{11}$，即$11x-11ty-14=0$.

所以点O到直线PQ的距离为$d_1=\dfrac{14}{11\sqrt{t^2+1}}$.

同理可得点O到直线ST的距离为$d_2=\dfrac{13}{11\sqrt{t^2+1}}$.

所以$d_1+d_2=\dfrac{27}{11\sqrt{t^2+1}}\le\dfrac{27}{11}$，当且仅当$t=0$，即$PQ$垂直于$x$轴时等号成立.

故点O到直线ST和直线PQ的距离之和的最大值为$\dfrac{27}{11}$. ………………………………12 分

解法四：（1）同解法一. ………………………………………………………………………… 5 分

（2）因为OB为圆E的一条弦，且直线$x=1$垂直平分该弦，故直线$x=1$经过圆心E，故MN为圆E的直径，所以$\angle MON=90°$，即$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$.

设$M(1,y_M)$，$N(1,y_N)$，则$y_My_N=-1$，………………………………………………… 6 分

注意到$k_{AM}=\dfrac{y_M}{3},k_{AN}=\dfrac{y_N}{3}$，则$k_{AM}\cdot k_{AN}=\dfrac{y_My_N}{9}=-\dfrac{1}{9}$，即$k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\dfrac{1}{9}$. ……… 7 分

显然k_{AP},k_{AQ}都不为零，设$t_1=\dfrac{1}{k_{AP}}$，$t_2=\dfrac{1}{k_{AQ}}$，则$t_1\cdot t_2=-9$.

设直线AP的方程为$x=t_1y-2$，直线AQ的方程为$x=t_2y-2$，

得到直线AP与直线AQ的直线系方程为$\left[t_1y-(x+2)\right]\left[t_2y-(x+2)\right]=0$，……… 8 分

即$-9y^2-(t_1+t_2)(x+2)y+(x+2)^2=0$（*）.

将（*）与椭圆$C:y^2=\dfrac{1}{2}(4-x^2)$联立得$-\dfrac{9}{2}(4-x^2)-(t_1+t_2)(2+x)y+(2+x)^2=0$. ①

……………………………………………………………………………………………… 9 分

其中A,P,Q三点的坐标符合方程①.

若$x+2\ne0$，即$x\ne-2$，则方程①可化为$-\dfrac{9}{2}(2-x)-(t_1+t_2)y+2+x=0$. ②

其中P,Q两点的坐标符合方程②，又注意到②为二元一次方程，

故②即为P,Q所在直线方程，整理得直线PQ的方程为$\dfrac{11}{2}x-(t_1+t_2)y-7=0$.

所以无论t_1+t_2为何值，直线PQ都经过点$G\left(\dfrac{14}{11},0\right)$. ………………………………10 分

由题意得，$\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AQ}$，所以$ST/\!/PQ$，

所以直线ST也过定点H，且$\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AG}$，解得$H\left(-\dfrac{13}{11},0\right)$. …………………… 11 分

注意到O位于线段GH上，故O到直线ST的距离与O到直线PQ的距离之和等于两平行直线ST，PQ之间的距离d，且$d\leqslant\dfrac{27}{11}$.

当ST，PQ垂直于x轴时，点O到直线ST和直线PQ的距离之和为$\dfrac{27}{11}$，

所以点O到直线ST和直线PQ的距离之和的最大值是$\dfrac{27}{11}$. ………………………12 分