

学校：_____ 准考证号：_____ 姓名：_____

(在此卷上答题无效)

高三诊断性练习

数学

本试卷共 5 页。满分 150 分。

注意事项：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

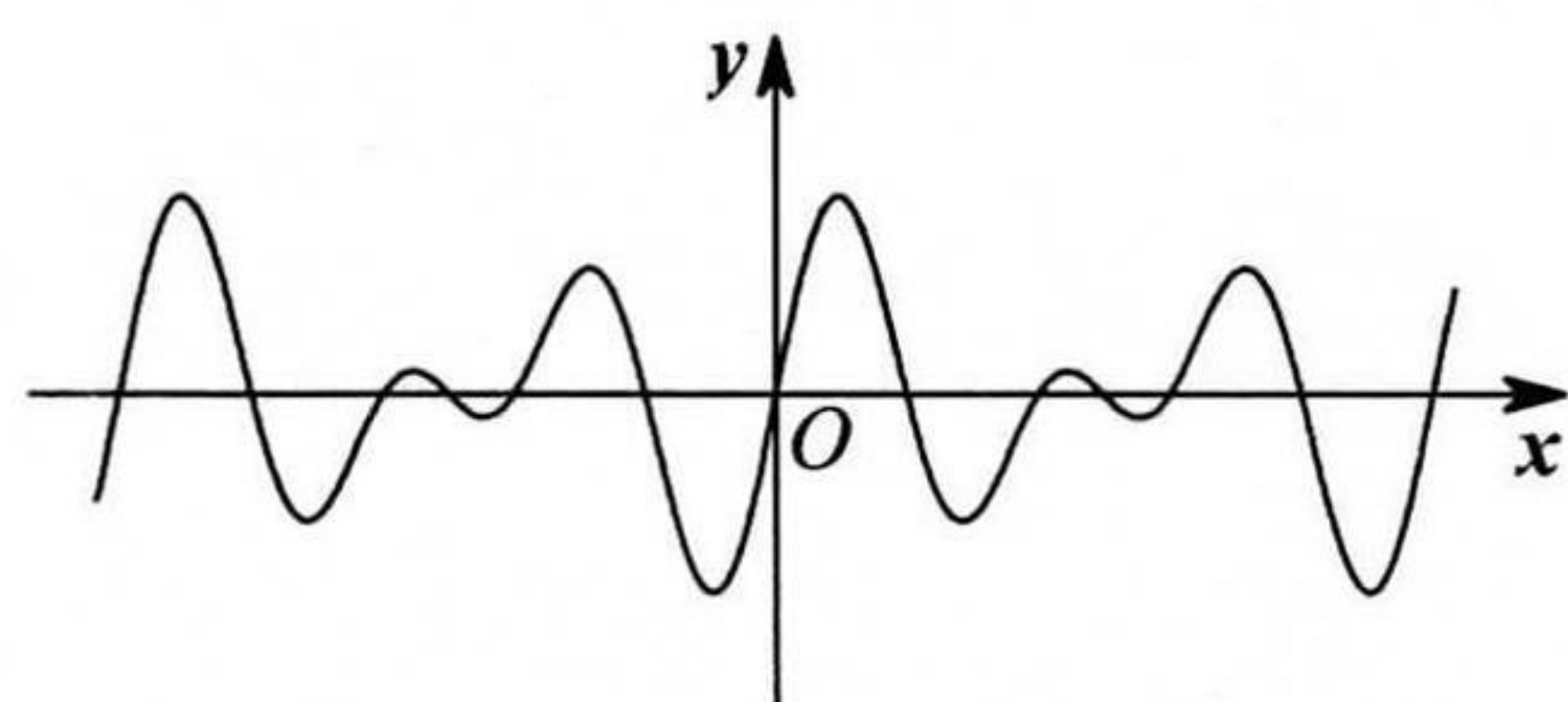
1. 设复数 z_1, z_2 满足 $z_2 \neq 0$ ，且 $|z_1 \cdot \bar{z}_2| = 2|z_2|$ ，则 z_1 可以是
A. $-1-i$ B. $2+2i$ C. $-1+\sqrt{3}i$ D. $4i$
2. 设集合 $A = \{1, 2, 4\}$ ， $B = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - 4x + m < 0\}$ 。若 $A \cap B = \{1, 2\}$ ，则 $A \cup B =$
A. $\{1, 2, 3\}$ B. $\{1, 2, 4\}$ C. $\{0, 1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$
3. 现用甲、乙两台 3D 打印设备打印一批对内径有较高精度要求的零件。已知这两台 3D 打印设备在正常工作状态下打印出的零件内径尺寸 Z (单位: μm) 服从正态分布 $N(100, 3^2)$ 。根据要求，正式打印前需要对设备进行调试，调试时，两台设备各试打了 5 个零件，零件内径尺寸 (单位: μm) 如茎叶图所示。根据以上信息，可以判断
A. 甲、乙两台设备都需要进一步调试
B. 甲、乙两台设备都不需要进一步调试
C. 甲需要进一步调试，乙不需要进一步调试
D. 乙需要进一步调试，甲不需要进一步调试
4. 甲、乙等 6 位同学去三个社区参加义务劳动，每个社区安排 2 位同学，每位同学只去一个社区，则甲、乙到同一社区的不同安排方案共有
A. 6 种 B. 18 种 C. 36 种 D. 72 种
5. 甲、乙、丙三位同学参加学习脱贫干部黄文秀、戍边英雄陈红军、人民科学家南仁东、抗疫英雄张定宇等英雄的先进事迹知识竞赛。该竞赛共有十道判断题，三位同学的答题情况如下：

题号 选手	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲	√	√	×	√	×	√	×	×	√	×
乙	√	√	×	×	√	×	√	√	×	×
丙	×	√	√	×	√	√	√	×	√	√

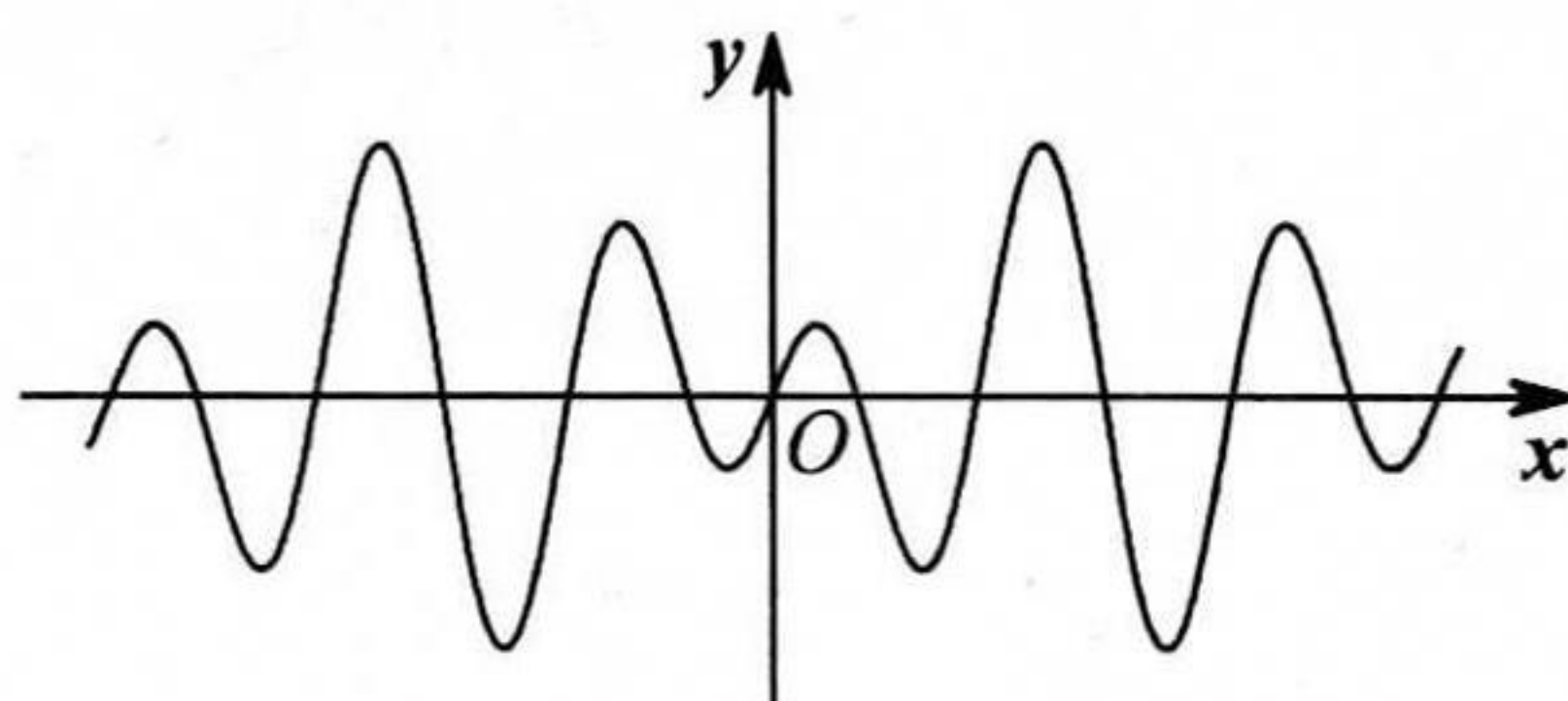
考试成绩公布后，三个人都答对了 7 道题，由此可知，1~10 题的正确答案依次是

- A. $\sqrt{\quad}, \sqrt{\quad}, \times, \times, \sqrt{\quad}, \sqrt{\quad}, \sqrt{\quad}, \times, \sqrt{\quad}, \times$
- B. $\sqrt{\quad}, \sqrt{\quad}, \times, \times, \sqrt{\quad}, \times, \sqrt{\quad}, \times, \sqrt{\quad}, \times$
- C. $\sqrt{\quad}, \sqrt{\quad}, \times, \times, \sqrt{\quad}, \sqrt{\quad}, \sqrt{\quad}, \sqrt{\quad}, \sqrt{\quad}, \times$
- D. $\sqrt{\quad}, \times, \times, \times, \sqrt{\quad}, \sqrt{\quad}, \sqrt{\quad}, \sqrt{\quad}, \sqrt{\quad}, \times$

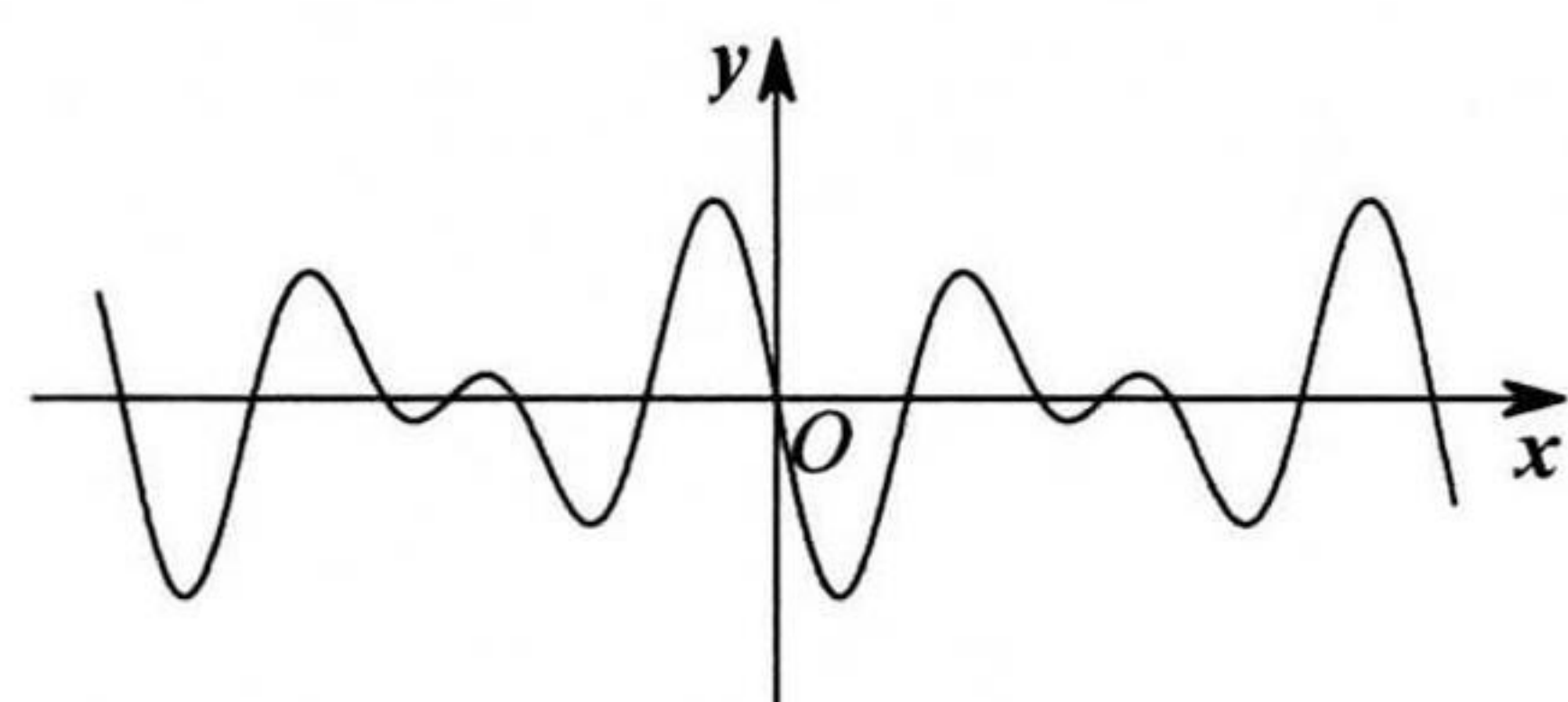
6. 音乐是用声音来表达人的思想感情的一种艺术. 声音的本质是声波, 而声波在空气中的振动可以用三角函数来刻画. 在音乐中可以用正弦函数来表示单音, 用正弦函数相叠加表示和弦. 某二和弦可表示为 $f(x) = \sin 2x + \sin 3x$, 则函数 $y = f(x)$ 的图象大致为



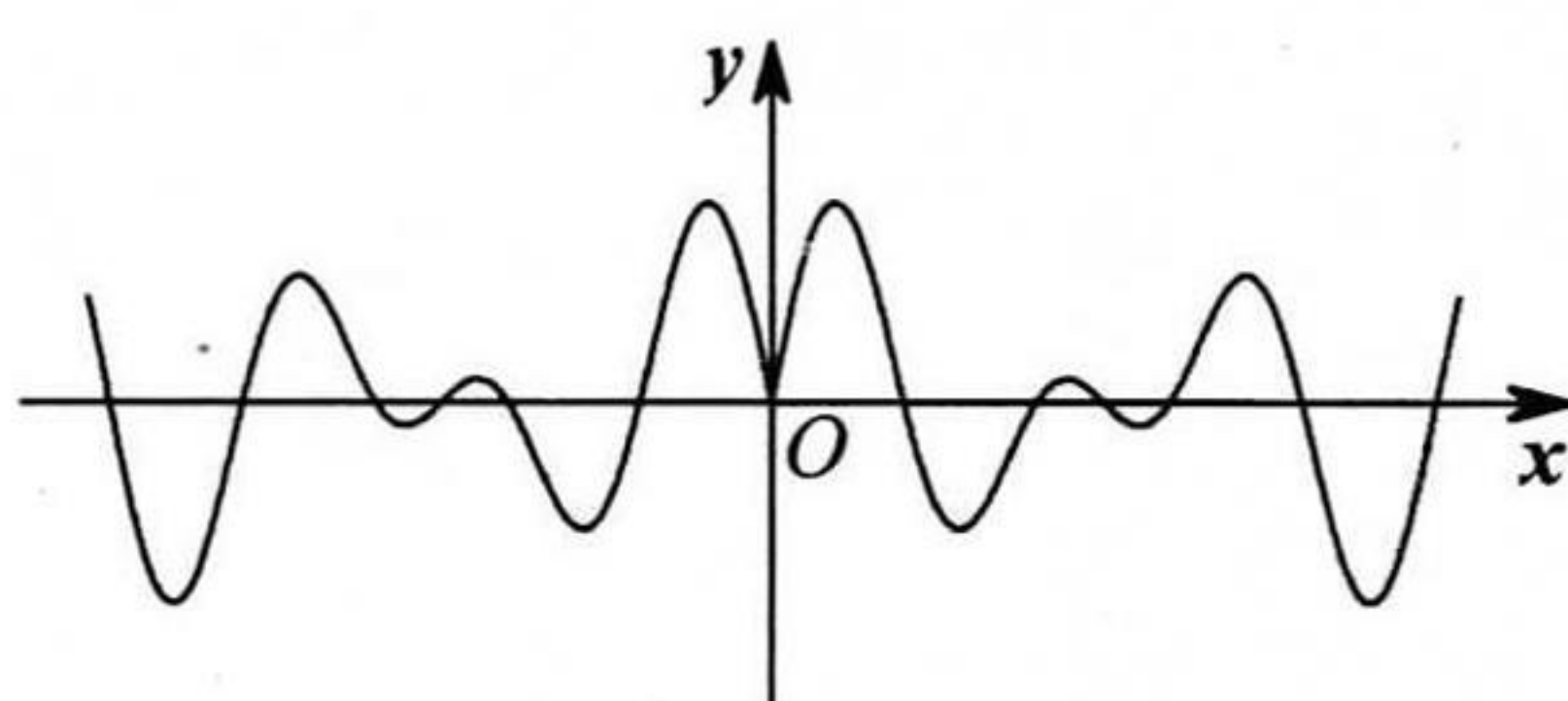
A



B



C



D

7. 已知实数 a, b 满足 $a = e^{5-a}$, $2 + \ln b = e^{3-\ln b}$, 则 $ab =$
- A. 3 B. 7 C. e^3 D. e^7
8. 某地举办“迎建党 100 周年”乒乓球团体赛, 比赛采用新斯韦思林杯赛制 (5 场单打 3 胜制, 即先胜 3 场者获胜, 比赛结束). 现有两支球队进行比赛, 前 3 场依次分别由甲、乙、丙和 A、B、C 出场比赛. 若经过 3 场比赛未分出胜负, 则第 4 场由甲和 B 进行比赛; 若经过 4 场比赛仍未分出胜负, 则第 5 场由乙和 A 进行比赛. 假设甲与 A 或 B 比赛, 甲每场获胜的概率均为 0.6; 乙与 A 或 B 比赛, 乙每场获胜的概率均为 0.5; 丙与 C 比赛, 丙每场获胜的概率均为 0.5; 各场比赛的结果互不影响. 那么, 恰好经过 4 场比赛分出胜负的概率为
- A. 0.24 B. 0.25 C. 0.38 D. 0.5

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 已知 $\tan(\alpha + \beta) = \tan \alpha + \tan \beta$, 其中 $\alpha \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 且 $\beta \neq \frac{m\pi}{2} (m \in \mathbb{Z})$, 则下列结论一定正确的是
- A. $\sin(\alpha + \beta) = 0$ B. $\cos(\alpha + \beta) = 1$
- C. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} = 1$ D. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$
10. 函数 $f(x)$ 的定义域为 I . 若 $\exists M > 0$ 使得 $\forall x \in I$ 均有 $|f(x)| < M$, 且函数 $f(x+1)$ 是偶函数, 则 $f(x)$ 可以是
- A. $f(x) = \left| \ln \frac{x}{2-x} \right|$ B. $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos(2\pi x)$
- C. $f(x) = \frac{1}{2^x + 2} - \frac{1}{4}$ D. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{C}_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$
11. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, M 为 AA_1 的中点, 平面 α 过点 D_1 且与 CM 垂直, 则
- A. $CM \perp BD$ B. $BD \parallel$ 平面 α
- C. 平面 $C_1BD \parallel$ 平面 α D. 平面 α 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{2}$
12. 已知抛物线 $E: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线 l 交 x 轴于点 C , 直线 m 过 C 且交 E 于不同的 A, B 两点, B 在线段 AC 上, 点 P 为 A 在 l 上的射影. 下列命题正确的是
- A. 若 $AB \perp BF$, 则 $|AP| = |PC|$ B. 若 P, B, F 三点共线, 则 $|AF| = 4$
- C. 若 $|AB| = |BC|$, 则 $|AF| = 2|BF|$ D. 对于任意直线 m , 都有 $|AF| + |BF| > 2|CF|$

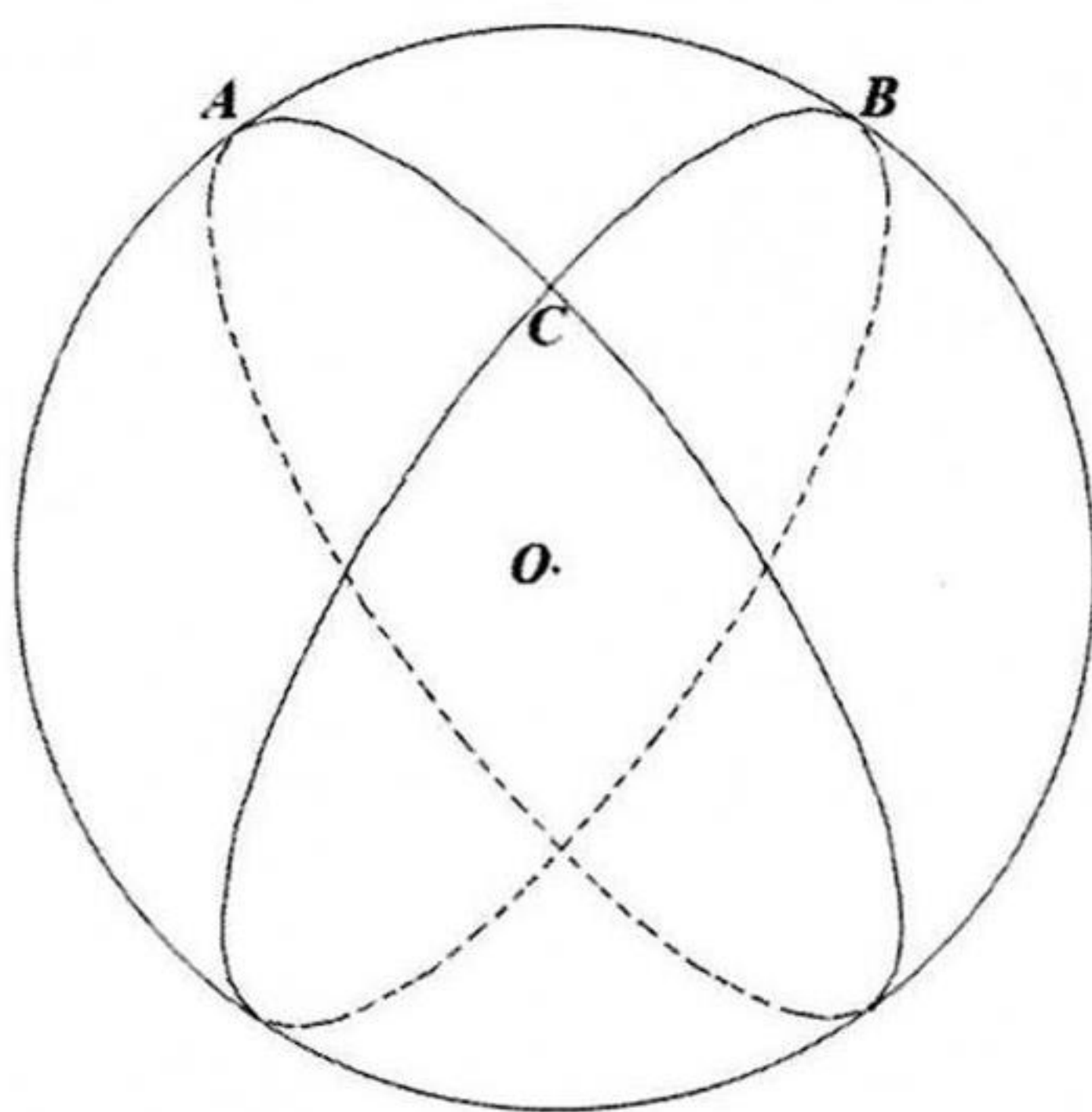
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 曲线 $y = (x+1)\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为_____.

14. 已知 $\triangle ABC$ 的外心为 O , $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{AB}| = 1$, 则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.

15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 以原点 O 为圆心、 C 的焦距为半径的圆交 x 轴于 A, B 两点, P 是圆 O 与 C 的一个公共点. 若 $|PA| = \sqrt{3}|PB|$, 则 C 的离心率为_____.

16. 球面几何是几何学的一个重要分支, 在航海、航空、卫星定位等方面都有广泛的应用. 如图, A, B, C 是球面上不在同一大圆 (大圆是过球心的平面与球面的交线) 上的三点, 经过这三点中任意两点的大圆的劣弧分别为 $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$, 由这三条劣弧组成的图形称为球面 $\triangle ABC$. 已知地球半径为 R , 北极为点 N , P, Q 是地球表面上的两点. 若 P, Q 在赤道上, 且经度分别为东经 40° 和东经 80° , 则球面 $\triangle NPQ$ 的面积为_____; 若 $NP = NQ = PQ = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$, 则球面 $\triangle NPQ$ 的面积为_____. (本小题第一空 2 分, 第二空 3 分)



四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在① $b\sin A + a\cos B = 0$, ② $\sqrt{5}\cos 2C + 3\cos C = 0$, ③ $\sin B + \sin C = 2\sin A$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求 $\triangle ABC$ 的面积; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.

问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 其内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\cos A = \frac{3}{5}$, $a = 4$, _____?

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分。

18. (12 分)

数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_{n+1} - 1 = S_n + 2a_n (n \in \mathbb{N}^*)$.

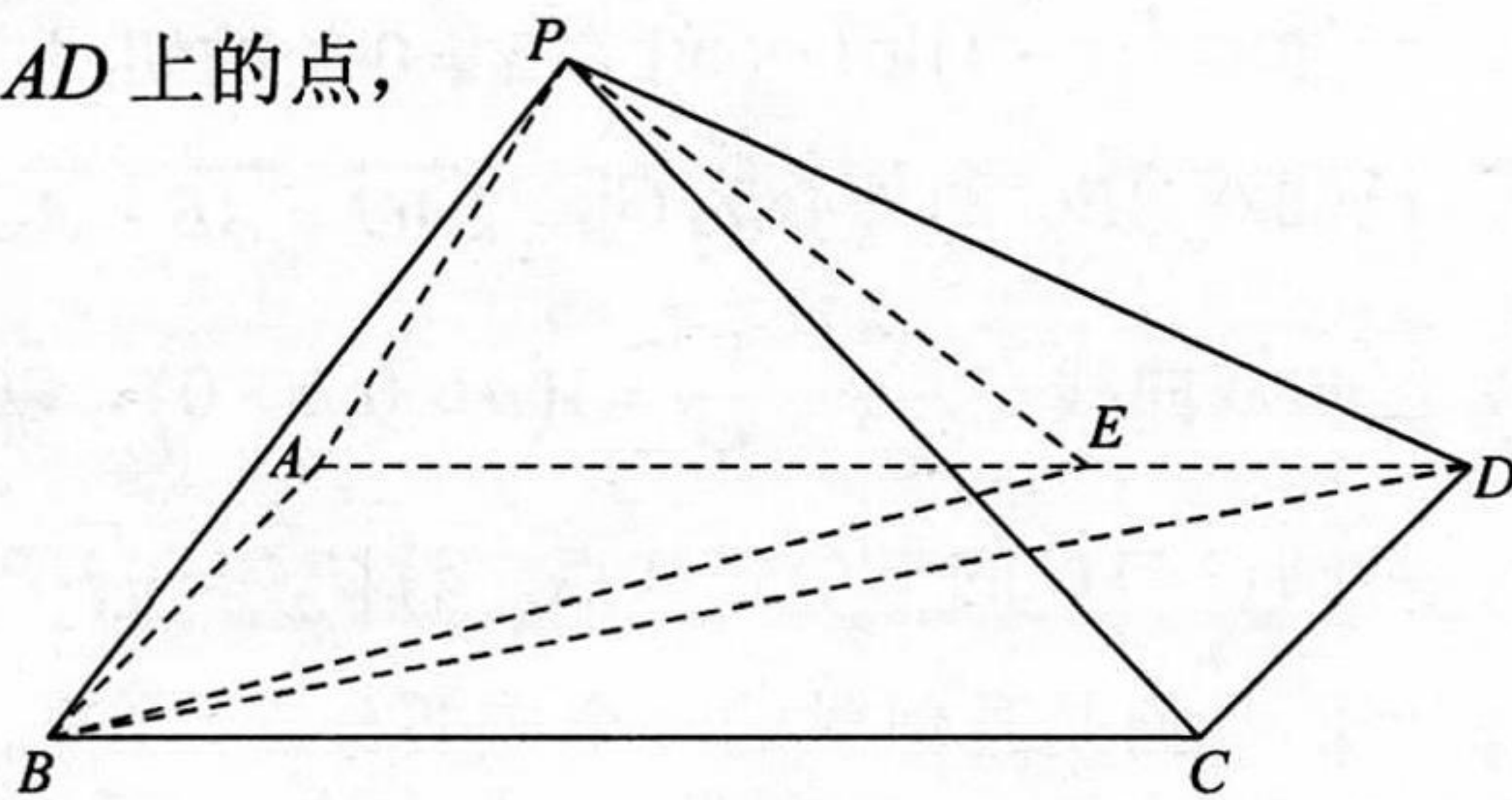
(1) 若数列 $\{a_n + 1\}$ 不是等比数列, 求 a_n ;

(2) 若 $a_1 = 1$, 在 a_k 和 a_{k+1} ($k \in \mathbb{N}^*$) 中插入 k 个数构成一个新数列 $\{b_n\}$: $a_1, 1, a_2, 3, 5, a_3, 7, 9, 11, a_4, \dots$, 插入的所有数依次构成首项为 1, 公差为 2 的等差数列, 求 $\{b_n\}$ 的前 50 项和 T_{50} .

19. (12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为矩形, E 是边 AD 上的点, $PA = AB = AE = 2DE$, $\angle PBA = \angle PBC = 60^\circ$.

- (1) 求证: 平面 $PBE \perp$ 平面 $ABCD$;
- (2) 求直线 PC 和平面 PBD 所成角的正弦值.

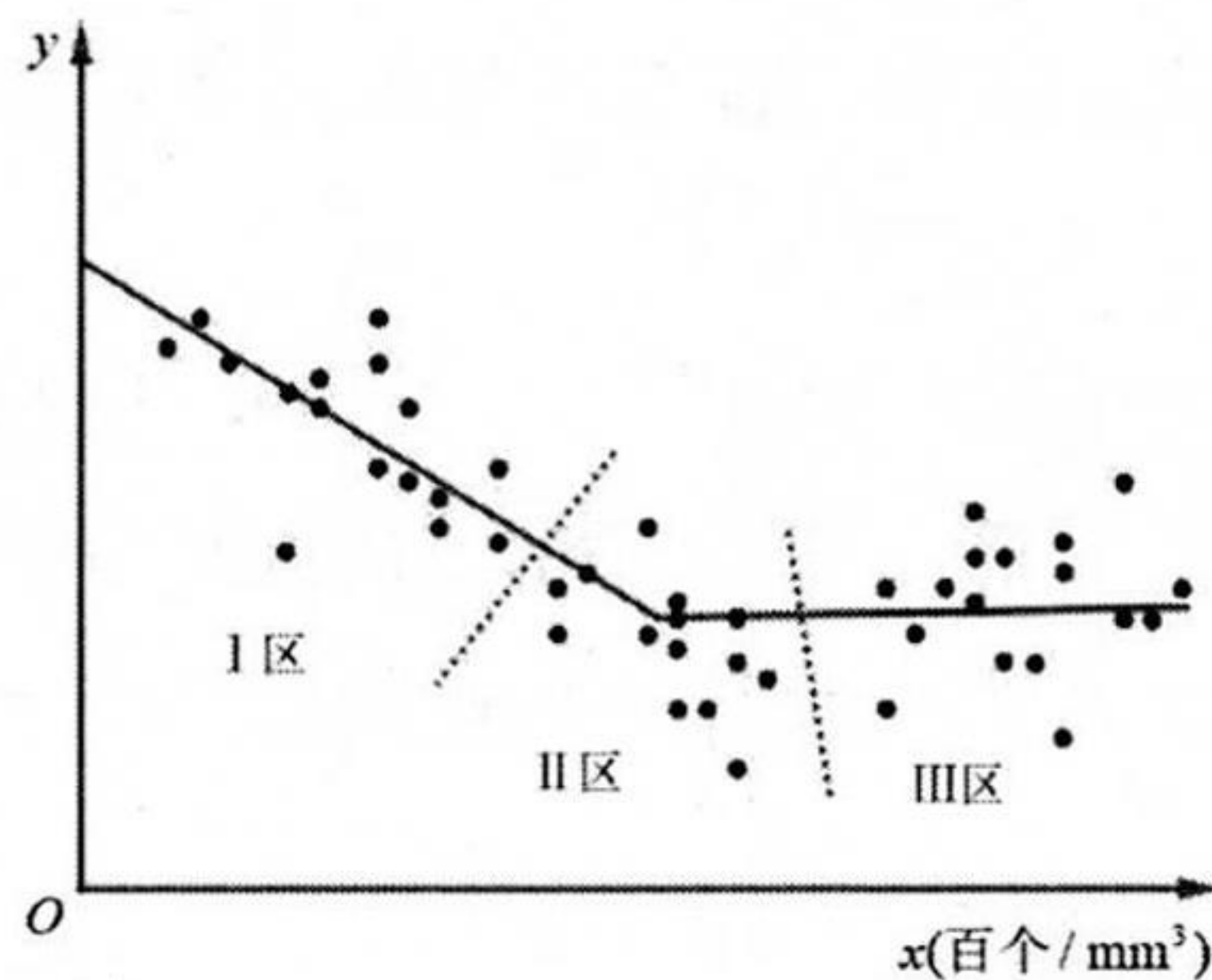


20. (12 分)

抗癌药在消灭癌细胞的同时也会使白细胞的数量减少. 一般地, 病人体内白细胞浓度低于 4000 个 $/\text{mm}^3$ 时需要使用升血药物进行“升血”治疗, 以刺激骨髓造血, 增加血液中白细胞数量. 为了解病人的最终用药剂量数 y (1 剂量 $= 25 \mu\text{g}$) 和首次用药时的白细胞浓度 x (单位: 百个 $/\text{mm}^3$) 的关系, 某校研究性学习小组从医院甲随机抽取了首次用药时白细胞浓度均分布在 $0 \sim 4000$ 个 $/\text{mm}^3$ 的 47 个病例, 其首次用药时的白细胞浓度为 x_i (单位: 百个 $/\text{mm}^3$), 最终用药剂量数为 y_i ($i = 1, 2, \dots, 47$), 得到数据 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, 47$), 数据散点图如图所示. 他们观察发现, 这些点大致分布在一条 L 形折线 (由线段 L_1 和 L_2 组成) 附近, 其中

L_1 所在直线是由 I、II 区的点得到的回归直线, 方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$, 其中 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$;

L_2 所在直线是由 II、III 区的点得到的回归直线, 方程为 $y = 0.02x + 14.64$.



以下是他们在统计中得到的部分数据:

$$\text{I区: } \sum_{i=1}^{16} x_i y_i = 4721, \quad \sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 1706, \quad \sum_{i=1}^{16} x_i = 160, \quad \sum_{i=1}^{16} y_i = 480;$$

$$\text{II区: } \sum_{i=17}^{30} x_i y_i = 4713, \quad \sum_{i=17}^{30} x_i^2 = 5134, \quad \sum_{i=17}^{30} x_i = 266, \quad \sum_{i=17}^{30} y_i = 252.$$

- (1) 根据上述数据求 $\hat{a}, \hat{b}$ 的值; (结果保留两位小数)
- (2) 根据 L 形折线估计, 首次用药时白细胞浓度 (单位: 个 $/\text{mm}^3$) 为多少时最终用药剂量最少? (结果保留整数)
- (3) 事实上, 使用该升血药的大量数据表明, 当白细胞浓度在 $0 \sim 4000$ 个 $/\text{mm}^3$ 时, 首次用药时白细胞浓度越高, 最终用药剂量越少. 请从统计学的角度分析 (2) 的结论与实际情况产生差异的原因. (至少写出两点)

参考数据: $\frac{4721 - 16 \times 10 \times 30}{1706 - 16 \times 10^2} \approx -0.745$, $\frac{9434 - 30 \times 14.5 \times 24}{6840 - 30 \times 14.5^2} \approx -1.889$, $\frac{9434 - 30 \times 14.2 \times 24.4}{6840 - 30 \times 14.2^2} \approx -1.214$.
 $30 + 0.745 \times 10 = 37.45$, $24 + 1.889 \times 14.5 \approx 51.39$, $24.4 + 1.214 \times 14.2 \approx 41.64$.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = (x+3)e^{-x} + 2x$.

(1) 证明: $f(x)$ 恰有两个极值点;

(2) 若 $f(x) \leq ax^2 + 3$, 求 a 的取值范围.

22. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B , O 为坐标原点, 直线 $l: x=1$ 与 C 的两个交点和 O, B 构成一个面积为 $\sqrt{6}$ 的菱形.

(1) 求 C 的方程;

(2) 圆 E 过 O, B , 交 l 于点 M, N , 直线 AM, AN 分别交 C 于另一点 P, Q , 点 S, T 满足 $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SP}$,

$\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{TQ}$, 求 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和的最大值.