

泉州市 2021 届高中毕业班质量监测（三）

2021.03

高三数学

本试卷共 22 题，满分 150 分，共 6 页。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 考生作答时，将答案答在答题卡上。请按照题号在各题的答题区域（黑色线框）内作答，超出答题区域书写的答案无效。在草稿纸、试题卷上答题无效。
3. 选择题答案使用 2B 铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号；非选择题答案使用 0.5 毫米的黑色中性（签字）笔或碳素笔书写，字体工整、笔迹清楚。
4. 保持答题卡卡面清洁，不折叠、不破损。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 i 是虚数单位，则 “ $a = i$ ” 是 “ $a^2 = -1$ ” 的
 - A. 充分不必要条件
 - B. 必要不充分条件
 - C. 充要条件
 - D. 既不充分也不必要条件
2. 已知集合 $A = \{(x, y) | x + y = 8, x, y \in \mathbb{N}^*\}$ ， $B = \{(x, y) | y > x + 1\}$ ，则 $A \cap B$ 中元素的个数为
 - A. 2
 - B. 3
 - C. 4
 - D. 5
3. 函数 $y = \cos 2x + \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ 的最小值为
 - A. -2
 - B. $-\frac{9}{8}$
 - C. $-\frac{5}{8}$
 - D. 0
4. “立定跳远” 是《国家学生体质健康标准》测试项目中的一项。已知某地区高中男生的立定跳远测试数据 ξ （单位：cm）服从正态分布 $N(200, \sigma^2)$ ，且 $P(\xi \geq 220) = 0.1$ ，现从该地区高中男生中随机抽取 3 人，并记 ξ 不在 $(180, 220)$ 的人数为 X ，则
 - A. $P(180 < \xi < 220) = 0.9$
 - B. $E(X) = 2.4$
 - C. $D(X) = 0.16$
 - D. $P(X \geq 1) = 0.488$
5. 已知单位向量 a, b 满足 $a \cdot b = \frac{1}{4}$ ，且 $c = 2a + b$ ，则 $\sin \langle a, c \rangle =$
 - A. $\frac{\sqrt{55}}{8}$
 - B. $\frac{3\sqrt{6}}{8}$
 - C. $\frac{\sqrt{10}}{8}$
 - D. $\frac{3}{8}$

6. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=1$, $AA_1=\sqrt{2}$, 则异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $-\frac{1}{12}$

7. 已知 $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $c=\frac{\ln 3}{\ln 2}$, 则

- A. $a>b>c$ B. $c>b>a$ C. $c>a>b$ D. $a>c>b$

8. 已知曲线 $E:(y^2-4x)(y^2+8x)=0$, 直线 $x=my+1$ 与 E 有且只有 4 个公共点, 这些公共点从左到右依次为 A, B, C, D , 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则下列结论中错误的是

- A. $m>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $m<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $x_1<-1<x_2$
C. $|CD|>6$ D. $|AB|<\sqrt{2}|CD|$

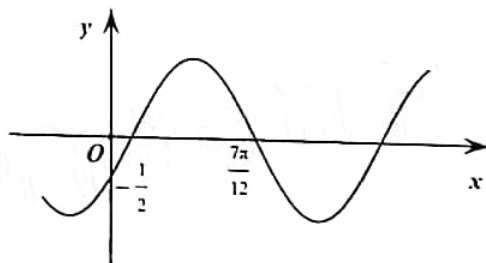
二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分。

9. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_2=10$, $S_5=S_2$, 则

- A. $S_3=S_4$ B. $a_6=10$ C. S_n 的最大值为 30 D. a_n 的最大值为 15

10. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0$, $|\varphi|\leq\frac{3\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则

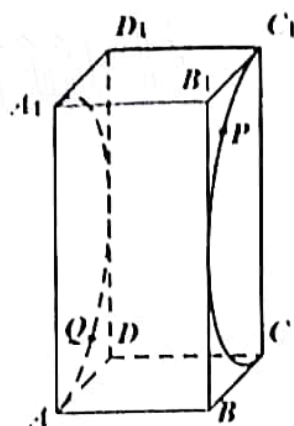
- A. $\omega=2$ B. $\omega=\frac{26}{7}$
C. $\varphi=\frac{7\pi}{6}$ D. $\varphi=-\frac{\pi}{6}$



11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x<1, \\ \ln x, & x\geq 1, \end{cases}$ $g(x)=kx-k$, 则

- A. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数 B. 当 $k=\frac{1}{4}$ 时, 方程 $f(x)=g(x)$ 有且只有 3 个不同实根
C. $f(x)$ 的值域为 $(-1, +\infty)$ D. 若 $(x-1)(f(x)-g(x))\leq 0$, 则 $k\in[1, +\infty)$

12. 如图, 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为1, 侧棱长为2, 点 P, Q 分别在半圆弧 $\widehat{C_1C}$, $\widehat{A_1A}$ (均不含端点) 上, 且 C_1, P, Q, C 在球 O 上, 则



- A. 当点 P 在 $\widehat{C_1C}$ 的中点处, 三棱锥 C_1-PQC 的体积为定值
 B. 当点 P 在 $\widehat{C_1C}$ 的中点处, 过 C_1, P, Q 三点的平面截正四棱柱所得的截面的形状都是四边形
 C. 球 O 的表面积取值范围为 $(4\pi, 8\pi)$
 D. 当点 Q 在 $\widehat{A_1A}$ 的三等分点处, 球 O 的表面积为 $(11-4\sqrt{3})\pi$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $(x+2)^6$ 展开式中, 二项式系数最大的项的系数为_____. (用数字填写答案)
14. 甲问乙: “您有几个孩子”, 乙说: “四个”. 此时, 一男孩过来, 乙对甲说: “这是我小孩”, 接着乙对该男孩说: “去把哥哥姐姐都叫过来, 你们四人一起跟甲去趟学校”. 根据上述信息, 结合正确的推理, 最多需要猜测_____次, 才可以推断乙的四个小孩从长到幼的正确性别情况; 第 3 次才猜对的概率为_____. (第一空 2 分; 第二空 3 分)
15. 圆锥曲线光学性质 (如图 1 所示) 在建筑、通讯、精密仪器制造等领域有着广泛的应用, 如图 2, 一个光学装置由有公共焦点 F_1, F_2 的椭圆 C 与双曲线 C' 构成, 一光线从左焦点 F_1 发出, 依次经过 C' 与 C 的反射, 又回到点 F_1 历时 m 秒; 若将装置中的 C' 去掉, 则该光线从点 F_1 发出, 经过 C 两次反射后又回到点 F_1 历时 n 秒, 若 C 与 C' 的离心率之比为 $\frac{1}{3}$, 则

$$\frac{m}{n} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

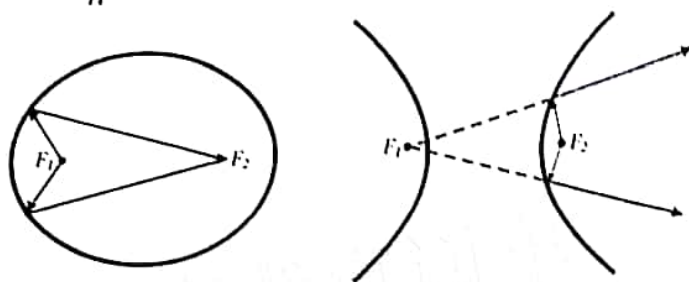


图 1

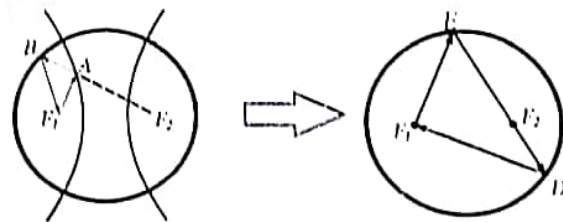


图 2

16. 若正数 x, y 满足 $xy(x+2y)=16$, 则 $x+y$ 的最小值为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

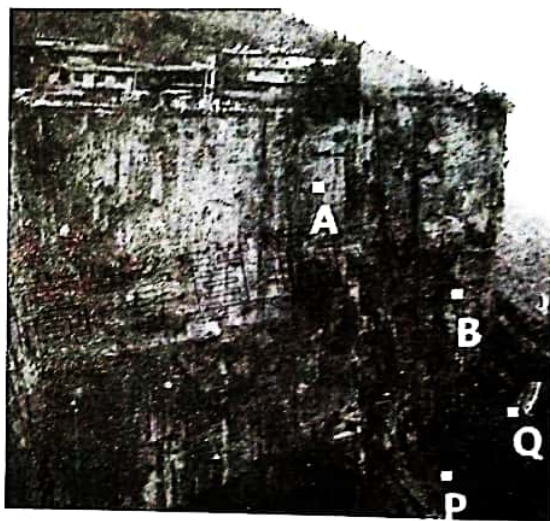
已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 9$, $a_{n+1} = 10a_n + 9$, $b_n = a_n + 1$.

(1) 证明: $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{(-1)^n \lg b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12 分)

脱贫攻坚取得的全面胜利是中国共产党领导全国人民创造的又一个彪炳史册的人间奇迹. 某地区有一贫困村坐落于半山平台, 村民通过悬崖峭壁间的藤条结成的“藤梯”往返村子, 因而被称为“悬崖村”. 当地政府把“藤梯”改成钢梯, 使之成为村民的“脱贫天梯”, 实现了“村民搬下来, 旅游搬上去”, 做到了长效脱贫.



如图, 为得到峭壁上的 A, B 两点的距离, 钢梯的设计团队在崖底的 P, Q 两点处分别测得 $\angle APQ = \alpha_1$,

$\angle BPQ = \beta_1$, $\angle APB = \theta$, $\angle AQP = \alpha_2$, $\angle BQP = \beta_2$, 且 $PQ = s$.

(1) 用 α_1, α_2, s 表示 AP ;

(2) 已知 $\beta_1 = 17^\circ$, $\beta_2 = 150^\circ$, $s = 90.0$ 米, $\theta = 51.3^\circ$, 又经计算得 $AP = 250.0$ 米, 求 AB .

参考数据: $\sin 13^\circ \approx 0.225$, $\cos 13^\circ \approx 0.974$, $\sin 51.3^\circ \approx 0.780$, $\cos 51.3^\circ \approx 0.625$.

19. (12 分)

永春老醋以其色泽鲜艳、浓香醇厚的独特风味，与山西陈醋、镇江香醋、保宁药醋并称中国四大名醋。为提高效率、改进品质，某永春老醋生产公司于 2018 年组织技术团队进行发酵工艺改良的项目研究。2020 年底，技术团队进行阶段试验成果检验，为下阶段的试验提供数据参考。现从改良前、后两种发酵工艺生产的成品醋中，各随机抽取 100 件进行指标值 M 的检测，检测分两个步骤，先检测是否合格，若合格，再进一步检测是否为一等品。因检测设备问题，改良后的成品醋有 20 件只进行第一步检测且均为合格，已完成检测的 180 件成品醋的最终结果如下表所示。

指标 区间	[-2, -1)		[-1, 0)		[0, 1)		[1, 2)		[2, 3)		[3, 4)	
来源	改良 前	改良 后	改良 前	改良 后	改良 前	改良 后	改良 前	改良 后	改良 前	改良 后	改良 前	改良 后
个数	3	1	5	2	30	26	31	34	24	15	7	2

附：成品醋的品质采用指标值 M 进行评价，评价标准如下表所示。

$M \in [0, 1)$	$M \in [1, 3)$	$M \notin [0, 3)$
一等品	二等品	三等品
合格		不合格

(1) 现从样本的不合格品中随机抽取 2 件，记来自改良后的不合格品件数为 X ，求 X 的分布列；

(2) 根据以往的数据，每销售一件成品醋的利润 y （单位：元）与指标值 M 的关系为

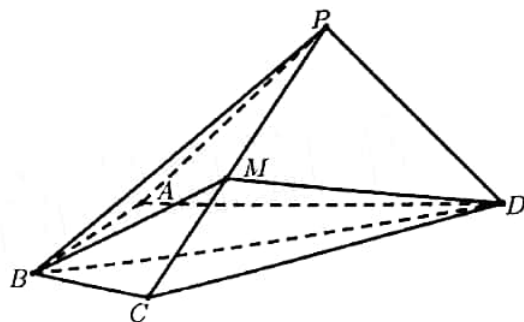
$$y = \begin{cases} 5, & M \in [0, 1), \\ 3, & M \in [1, 3), \\ -2, & M \notin [0, 3). \end{cases}$$

若欲实现“改良后成品醋利润比改良前至少增长 20%”，则 20 件

还未进一步检测的样本中，至少需要几件一等品？

20. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 二面角 $P-AD-C$ 是直二面角, AD 为等腰直角三角形 PAD 的斜边, $AD=CD=2$, $AB=BC=1$, $BD=\sqrt{5}$, M 为线段 PC 上的动点.



- (1) 当 $PM=MC$ 时, 证明: $PA \parallel$ 平面 MBD ;
- (2) 若平面 $MBD \perp$ 平面 $ABCD$, 求二面角 $B-MD-C$ 的余弦值.

21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别为 A, B , 右焦点为 F , 折线 $|x-1|=my (m \neq 0)$

与 C 交于 M, N 两点.

- (1) 当 $m=2$ 时, 求 $|MF|+|NF|$ 的值;
- (2) 直线 AM 与 BN 交于点 P , 证明: 点 P 在定直线上.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = ae^{-x} + \sin x - x$.

- (1) 若 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 单调递减, 求实数 a 的取值范围;
- (2) 证明: 对任意整数 a , $f(x)$ 至多 1 个零点.