2021 届石家庄市质检二数学答案

一、单选题

1. C　2.B　3.D　4.A　5.B　6.D　7.C　8.B

二、多选题

9.AC　10.AD　11.ABD　12.ACD

三、填空题

13．2　　　　14．$\left(-\infty,1\right)$

15. $\frac{7}{8},\frac{245}{256}$　　　　16．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

三、解答题：（其他答案请参照本标准，教研组商定执行）

17．解：方案一：解法一：设数列$\left\{a_n\right\}$的公差为d，

由$a_5=6$，得$a_1+4d=6$，………**1** 分

由$a_1+S_3=50$，得$4a_1+3d=50$，………**2** 分

解得: $a_1=14,d=-2$，………**4** 分

$a_n=14-2\left(n-1\right)=16-2n$，………**5** 分

$a_n\geq 0,\Rightarrow 16-2n\geq 0\Rightarrow n\leq 8$，………**7** 分

故当$n\leq 7$时，$a_n>0;\ n=8,a_n=0;\ n\geq 9$时，$a_n<0$，　………**9** 分

故$n=7$或$n=8$时，S_n取最大值．　………**10** 分

解法二：设数列$\left\{a_n\right\}$的公差为d，

由$a_5=6$，得$a_1+4d=6$，………**1** 分

由$a_1+S_3=50$，得$4a_1+3d=50$，………**2** 分

解得：$a_1=14,d=-2$，………**4** 分

$a_n=14-2\left(n-1\right)=16-2n$，………**5** 分

$S_n=-n^2+15n$………**7** 分

对称轴 $n=7.5$ ………**8** 分

故 $n=7$ 或 $n=8$ 时，S_n 取最大值． ………**10** 分

方案二：由 $S_{12}-S_9>0$，得 $a_{12}+a_{11}+a_{10}>0$，即 $3a_{11}>0$，………**2** 分

由 $a_2+a_{21}<0$，得 $a_2+a_{21}=a_{11}+a_{12}<0$，………**4** 分

所以 $a_{12}<0$，………**6** 分

故 $d=a_{12}-a_{11}<0$，………**7** 分

所以当 $n\le 11$ 时，$a_n>0$，$n\ge 12$ 时，$a_n<0$， ………**9** 分

故 $n=11$ 时，S_n 取最大值． ………**10** 分

方案三：

由 $S_9>0$，得 $S_9=\dfrac{9\left(a_1+a_9\right)}{2}=\dfrac{9\times 2a_5}{2}>0$，

所以 $a_5>0$，………**2** 分

由 $S_{10}<0$，得 $S_{10}=\dfrac{10\left(a_1+a_{10}\right)}{2}=\dfrac{10\left(a_5+a_6\right)}{2}<0$，

所以 $a_5+a_6<0$，………**4** 分

又 $a_5>0$，故 $a_6<0$，………**6** 分

所以 $d=a_6-a_5<0$，………**7** 分

所以当$n\le 5$时，$a_n>0$，$n\ge 6$时，$a_n<0$， ………**9** 分

故$n=5$时，S_n取最大值． ………**10** 分

18．解：（**1**）解法一：

由诱导公式，将$\cos(2\pi-B)+\sin(\pi+B)=\dfrac{1}{5}$

化简得 $\cos B-\sin B=\dfrac{1}{5}$ ①……………2 分

因为$\cos^2 B+\sin^2 B=1$ ②

由①②整理得$25\sin^2 B+5\sin B-12=0$……………4 分

因式分解得 $(5\sin B-3)(5\sin B+4)=0$

因为$\sin B>0$ ，所以$\sin B=\dfrac{3}{5}$.……………6 分

解法二：

由诱导公式，将$\cos(2\pi-B)+\sin(\pi+B)=\dfrac{1}{5}$

化简得 $\cos B-\sin B=\dfrac{1}{5}$ ①……………2 分

平方可得：$1-2\sin B\cdot\cos B=\dfrac{1}{25}$

$2\sin B\cdot\cos B=\dfrac{24}{25}$

又因为B为三角形内角，所以$\sin B>0,\cos B>0$

$\sin B+\cos B=\sqrt{1+2\sin B\cdot\cos B}=\dfrac{7}{5}\cdots$ ②……………4分

由①②可得$\sin B=\dfrac{3}{5}$……………6分

（**2**）$\because\cos A=-\dfrac{5}{13},\therefore\sin A=\dfrac{12}{13}$

由正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得$b=\dfrac{13}{4}$………**7** 分

由（1）知$\cos B=\frac{4}{5}$………**8** 分

因为ΔABC中，$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}-\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{33}{65}$ ………**10** 分

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times5\times\frac{13}{4}\times\frac{33}{65}=\frac{33}{8}$. ………12分

19．解：（1）由已知数据可求$\bar{t}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3,$

$\bar{y}=\frac{1.01+1.10+1.21+1.33+1.40}{5}=1.21,$ …………………..2 分

$\sum_{i=1}^{5}t_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55,$

$\sum_{i=1}^{5}t_i y_i=1\times1.01+2\times1.10+3\times1.21+4\times1.33+5\times1.40=19.16,$…………………4 分

$\therefore\hat{b}=\frac{19.16-5\times3\times1.21}{55-5\times3^2}=\frac{1.01}{10}$=0.101,

$\therefore\hat{a}=1.21-0.101\times3$=0.907

$\therefore$ 所求回归方程为$\hat{y}=0.101t+0.907$ **…………………6** 分

当$t=6$时，$\hat{y}=0.101\times6+0.907=1.513$（万元），

$\therefore$ 2021 年该地区农村居民人均消费支出约为1.513万元. **…………………8** 分

（2）已知 2021 年该地区农村居民平均消费支出1.513万元，

由图 2 可知，2020 年该地区农村居民食品类支出为4451元，则预测 2021 年该地区食品类支出为$4451\times(1+3\%)=4584.53$元， **…………………10** 分

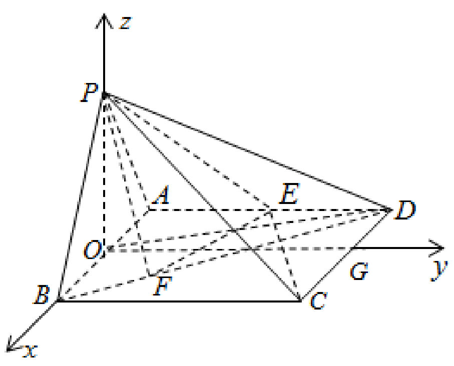
$\therefore$ 恩格尔系数$=\frac{4584.53}{15130}\times100\%\approx30.3\%\in(30\%,40\%)$

所以，2021 年底该地区农村居民生活水平能达到富裕生活标准. **…………………12** 分

20．解：法一：（**1**）取AB的中点O连PO,DO，

$\because PA=PB,\therefore PO\perp AB$，

又$\because$平面$PAB\perp$底面$ABCD$，



$\therefore PO\perp$底面$ABCD$，$EC\subset$底面$ABCD$，

$\therefore PO\perp EC$，　　　　　　　　··························2 分

在正方形$ABCD$内，O,E分别为AB,AD的中点，

$\therefore \Delta DAO\cong\Delta CDE$，$\therefore \angle ODE=\angle ECD,$

又$\because \angle ECD+\angle DEC=90^{\circ},\therefore \angle DEC+\angle ODE=90^{\circ}$，

$\therefore EC\perp OD$，$OD\bigcap PO=O$，　　　　　··························4 分

$\therefore CE\perp$平面POD，$\because PD\subset$平面POD，

$\therefore CE\perp PD$.　　　　　　　　　　··························5 分

法二：（**1**）取AB的中点O连PO,DO，$\because PA=PB,\therefore PO\perp AB$，

又$\because$平面$PAB\perp$底面$ABCD$，$\therefore PO\perp$底面$ABCD$，

取CD的中点G，连OG，则OB,OP,OG两两垂直，·······················2 分

$\therefore$ 分别以OB,OG,OP所在的直线为x轴，y轴，z轴建立如图空间直角坐标系.

设$AB=2$，则$C(1,2,0),P(0,0,\sqrt{3}),E(-1,1,0),D(-1,2,0),$

$\therefore \overrightarrow{CE}=(-2,-1,0),\overrightarrow{PD}=(-1,2,-\sqrt{3}),$·······················4 分

$\therefore \overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{PD}=2-2=0$，

$\therefore CE\perp PD$.·······················5分

（**2**）取CD的中点G，连OG，由（**1**）可知OB,OP,OG两两垂直，

$\therefore$ 分别以OB,OG,OP所在的直线为x轴，y轴，z轴建立如图空间直角坐标系.

设$AB=2$，则$A(-1,0,0),B(1,0,0),P(0,0,\sqrt{3}),E(-1,1,0),D(-1,2,0)$，

$\therefore \overrightarrow{PE}=(-1,1,-\sqrt{3}),\overrightarrow{AP}=(1,0,\sqrt{3}),\overrightarrow{BD}=(-2,2,0),\overrightarrow{BE}=(-2,1,0)$

设$\overrightarrow{BF}=\lambda\overrightarrow{BD}(0<\lambda<1)$，则$\overrightarrow{BF}=(-2\lambda,2\lambda,0)$

$\therefore \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BE}=(-2\lambda+2,2\lambda-1,0)$ ………………7 分

设平面 PEF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\because \begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{PE}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{EF}\end{cases}, \therefore \begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}-x+y-\sqrt{3}z=0\\ (-2\lambda+2)x+(2\lambda-1)y=0\end{cases}$，

令 $y=1$, 则 $x=\dfrac{2\lambda-1}{2\lambda-2}, z=\dfrac{1}{\sqrt{3}(2-2\lambda)}$，

$\therefore \vec{n}=(\dfrac{2\lambda-1}{2\lambda-2},1,\dfrac{1}{\sqrt{3}(2-2\lambda)})$ ………………………9 分

设直线 AP 与平面 PEF 所成角的为 θ，

$$\therefore \sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AP},\vec{n}>|=|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AP}||\vec{n}|}|=|\frac{1}{2\cdot\sqrt{(\frac{2\lambda-1}{2\lambda-2})^2+1+(\frac{1}{\sqrt{3}(2-2\lambda)})^2}}|=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

………………………11 分

整理得：$9\lambda^2-6\lambda+1=0$，$\therefore \lambda=\dfrac{1}{3}$.

$\therefore$ 在 BD 上存在点 F，使得直线 AP 与平面 PEF 成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，此时点 F 为靠近点 B 的三等份点，即 $BF=\dfrac{1}{3}BD$. ………………………12 分

21.解：（1） $f'(x)=\dfrac{1}{x}+mx,(x>0)$ ………………**1** 分

当 $m>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+mx$? $2\sqrt{m}$，即 $2\sqrt{m}=2, m=1$，当且仅当 $x=1$ 时取得等号；……………**3** 分

此时的切线方程为 $y=2x-\dfrac{3}{2}$；……………… **4** 分

（2） $F(x)=\ln x+\dfrac{m}{2}x^2-mx,(x>0), F'(x)=\dfrac{1}{x}+mx-m=\dfrac{mx^2-mx+1}{x}$，

由题意可得：$mx^2 - mx + 1 = 0$ 在 $\left(0,+?\right)$ 内有两个不相等的实数根 x_1, x_2

则：$m > 0, D = m^2 - 4m > 0, \backslash\ m > 4$，且 $x_1 + x_2 = 1, x_1x_2 = \dfrac{1}{m}$............... **6** 分

$$F(x_1) + F(x_2) = (\ln x_1 + \frac{m}{2}x_1{}^2 - mx_1) + (\ln x_2 + \frac{m}{2}x_2{}^2 - mx_2)$$

所以：$= \ln x_1\, x_2 + \dfrac{m}{2}((x_1 + x_2)^2 - 2\,x_1\, x_2) - m(x_1 + x_2)$

$$= \ln\frac{1}{m} + \frac{m}{2}(1 - \frac{2}{m}) - m = \ln\frac{1}{m} - \frac{m}{2} - 1$$

................**8** 分

令 $g(m) = \ln\dfrac{1}{m} - \dfrac{m}{2} - 1(m > 4)$，函数 $g(m)$ 单调递减且 $g(e^2) = -\dfrac{e^2}{2} - 3$，............... **10** 分

则 $g(m) = \ln\dfrac{1}{m} - \dfrac{m}{2} - 1\ ?\ \ \dfrac{e^2}{2} - 3$ 解得 $m\ £\ e^2$，

综上：m 的取值范围为 $4 < m\ ?\ e^2$；............... **12** 分

22.解：（**1**）设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$，

联立直线与椭圆方程：$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$，整理得 $(a^2 + b^2)x^2 - 2a^2x + a^2 - a^2b^2 = 0$，

$\backslash\ \ D > 0$，则 $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2a^2}{a^2 + b^2} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{a^2 - a^2b^2}{a^2 + b^2} \end{cases}$，.................... **2** 分

因为 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$，

所以 $(x_1 + 1, y_1) \cdot (x_2 + 1, y_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 1) + y_1y_2 = (x_1 + 1)(x_2 + 1) + (x_1 - 1)(x_2 - 1)$

$= 2x_1x_2 + 2 = 0$，

所以 $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{a^2 - a^2b^2}{a^2 + b^2} = -1$，$2a^2 + b^2 = a^2b^2$，.................... **4** 分

所以$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1$，即椭圆过定点$T_1(1,\sqrt{2})$，$T_2(1,-\sqrt{2})$，$T_3(-1,\sqrt{2})$，$T_4(-1,-\sqrt{2})$，

所以${x_0}^2+{y_0}^2=1+2=3$ .... **6 分**

（2）

$$|PQ|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\sqrt{2\left((x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right)}=\sqrt{2\left(\left(\frac{2a^2}{a^2+b^2}\right)^2+4\right)}=2\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^2+1}$$

$$=2\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}\right)^2+1}$$

(*) .... **8 分**

由$2a^2+b^2=a^2b^2$得：$b^2=\dfrac{2a^2}{a^2-1}>0,\therefore\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{2}{a^2-1}$，

带入*式有 ....**10 分**

$$|PQ|=2\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{1}{1+\frac{2}{a^2-1}}\right)^2+1}$$

因为$a^2>1$，所以$|PQ|$的取值范围$(2\sqrt{2},4)$ .... **12 分**