

# “皖南八校”2021 届高三第一次联考·数学(理科)

## 参考答案、解析及评分细则

1. A 依题意得  $M=[-1,2], N=(0,+\infty), \therefore M \cap N=(0,2]$ .
2. B 设  $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ , 则  $z-\bar{z}=a+bi-(a-bi)=2bi=2i, 2b=2, b=1, \therefore z$  的虚部是 1.
3. C 因为实数  $x>0, y>0$ , 不等式  $\log_{\frac{1}{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} y>0$  解得  $0<xy<1, \therefore$  实数  $x>0, y>0$ , 则“ $xy<1$ ”是“ $\log_{\frac{1}{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} y>0$ ”的充要条件.
4. D  $\sin(\alpha-\pi) \cdot \cos(\pi+\alpha)=-\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha)=\sin \alpha \cdot \cos \alpha=\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha+\cos^2 \alpha}=\frac{\tan \alpha}{\tan^2 \alpha+1}=-\frac{2}{5}$ .
5. C  $\int_{-2}^2(\sin x+\sqrt{4-x^2})dx=\int_{-2}^2 \sin x dx+\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx=\frac{1}{2} \pi \times 2^2=2 \pi$ .
6. D 因为  $a=(0,2), b=(2,2)$ , 所以  $|a|=2, |b|=2\sqrt{2}$ , 所以  $|a| \neq |b|$ , 故 A 错误;  
因为  $a=(0,2), b=(2,2)$ , 所以  $a-b=(-2,0)$ , 所以  $(a-b)$  与  $b$  不平行, 故 B 错误;  
又  $\cos \langle a, b \rangle=\frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $a$  与  $b$  的夹角为  $\frac{\pi}{4}$ , 故 C 错误;  
又  $(a-b) \cdot a=0-0=0$ , 故 D 正确.
7. B  $\because e^{0.3}>e^0=1, \therefore a>1, \therefore 0<(\frac{1}{2})^e<(\frac{1}{2})^1=\frac{1}{2}, \therefore 0<b<\frac{1}{2}$ ,  
 $\because \log_5 \sqrt{7}>\log_5 \sqrt{5}=\frac{1}{2}$ , 且  $\log_5 \sqrt{7}<\log_5 5=1, \therefore \frac{1}{2}<c<1, d=\sin 4<0$ .  
 $\therefore a>c>b>d$ .
8. A 由题意得  $\begin{cases} 3^b=288 \\ 3^{5k+b}=144 \end{cases}, \therefore 3^{5k}=\frac{144}{288}=\frac{1}{2}$ , 所以  $x=15$  时,  $y=3^{15k+b}=(3^{5k})^3 \cdot 3^b=\frac{1}{8} \times 288=36$ .
9. D 将函数  $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})$  的图象横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$  (纵坐标不变), 可得  $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$  的图象;  
再向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位, 所得函数  $g(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ ,  
若  $x_1, x_2 \in (0, \frac{\pi}{2}), x_1 \neq x_2$ , 则  $2x_1+\frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}), 2x_2+\frac{\pi}{3} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ ,  
 $\therefore g(x_1)=g(x_2), \therefore \frac{2x_1+\frac{\pi}{3}+2x_2+\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{2}$ ,  
 $\therefore x_1+x_2=\frac{\pi}{6}$ , 则  $g(x_1+x_2)=\sin(2 \times \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})=\sin \frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
10. C 由题意可得  $\angle DAC=75^\circ, \angle DBC=45^\circ$ ,  
在  $\triangle ADC$  中, 由正弦定理得  $AC=\frac{CD \cdot \sin \angle ADC}{\sin \angle DAC}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin 75^\circ}=2\sqrt{3}$ ,  
在  $\triangle BDC$  中, 由正弦定理得  $BC=\frac{CD \cdot \sin \angle BDC}{\sin \angle DBC}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3}+1$ ,  
在  $\triangle ACB$  中, 由余弦定理得  $AB^2=AC^2+BC^2-2 \times AC \times BC \cdot \cos \angle ACB=(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2 \times 2\sqrt{3} \times (\sqrt{3}+1) \times \frac{1}{2}=10$ , 所以  $AB=\sqrt{10}$  km.
11. D 令  $f'(x)=0$  得  $x=\sqrt{2}$  或  $x=-\sqrt{2}$ .  
当  $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$  时,  $f'(x)>0$ , 函数  $y=f(x)$  的增区间为  $(-\infty, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, +\infty)$ ;  
当  $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  时,  $f'(x)<0$ , 函数  $y=f(x)$  的减区间为  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . 故 B 错误.  
所以当  $x=-\sqrt{2}$  时, 函数  $y=f(x)$  有极大值, 故 A 错误.  
当  $x<-\sqrt{2}$  时,  $f(x)=(\frac{3}{2}x^2-3x)e^x>0$  恒成立, 所以函数  $y=f(x)$  在  $(-\infty, -\sqrt{2})$  上没有零点;  
当  $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$  时, 函数  $y=f(x)$  在  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  上单调递减, 且  $f(0)=0$ , 存在唯一零点;  
当  $x>\sqrt{2}$  时, 函数  $y=f(x)$  在  $(\sqrt{2}, +\infty)$  上单调递增, 且  $f(2)=0$ , 存在唯一零点.

故函数  $y=f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上有两个零点,故 C 错误.

函数  $f(x)=(\frac{3}{2}x^2-3x)e^x$ , 得  $f'(x)=3(\frac{1}{2}x^2-1)e^x$ , 则  $f'(0)=-3$ ;

又  $f(0)=0$ , 从而曲线  $y=f(x)$  在原点处的切线方程为  $y=-3x$ , 故 D 正确.

12. B 对①,  $f(2020)=2f(2016)=\cdots=2^{505}f(0)=2^{506}f(-4)=-2^{507}$ . 故①错误.

对②, 画出  $f(x)=\begin{cases} |x+4|-2, & x<-2, \\ 2f(x-4), & x\geq-2. \end{cases}$  图像知,  $f(x)=\frac{1}{4}x-1$  有四个根. 故②正确.

对③, 当  $x\in[6,10)$  时,  $f(x)=2f(x-4)=4f(x-8)=8f(x-12)=8(|x-12+4|-2)=8|x-8|-16$ . 故③正确.

对④, 画出图像,  $y=f(x)-t$  有 8 个零点, 即  $y=f(x)$  与  $y=t$  有 8 个交点.

此时  $\sum_{i=1}^8 x_i f(x_i) = t, \sum_{i=1}^8 x_i = t[(-4)\times 2 + 0\times 2 + 4\times 2 + 8\times 2] = 16t$ . 又  $t\in(-2,0)$ .

若函数  $y=f(x)-t$  在  $(-\infty,10)$  上有 8 个零点  $x_i (i=1,2,3,\cdots,8)$ , 则  $\sum_{i=1}^8 x_i f(x_i)$  的取值范围为  $(-32,0)$ , 故④错误.

13.  $2e$  令  $t=\ln x, f(t)=te^t$ , 所以  $f(x)=xe^x, f'(x)=(x+1)e^x, f'(1)=2e$ .

14.  $(0, \frac{2}{3})$  由于  $f(-x)=f(x)$ , 所以函数为偶函数, 且在  $[0, +\infty)$  上为减函数. 要  $f(x-1)<f(2x-1)$ , 则需  $|x-1|>|2x-1|$ , 解得  $x\in(0, \frac{2}{3})$ .

15.  $\frac{3}{2}$  由题意, 将函数  $f(x)=\cos \omega x (\omega>0)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度, 得到函数  $y=g(x)=\cos(\omega x + \frac{\omega\pi}{6})$  的图象, 若函数  $g(x)$  在区间  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上是单调递减函数,

$$\because x\in[0, \frac{\pi}{2}], \therefore \omega x + \frac{\omega\pi}{6} \in [\frac{\omega\pi}{6}, \frac{2\omega\pi}{3}], \therefore [\frac{\omega\pi}{6}, \frac{2\omega\pi}{3}] \subseteq [2k\pi, 2k\pi + \pi].$$

$$\therefore \frac{2\omega\pi}{3} - \frac{\omega\pi}{6} = \frac{\omega\pi}{2} \leq (2k\pi + \pi) - 2k\pi = \pi, \therefore 0 < \omega \leq 2.$$

$$\therefore 0 < \frac{\omega\pi}{6} < \frac{2\omega\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}.$$

$$\therefore k=0, \therefore [\frac{\omega\pi}{6}, \frac{2\omega\pi}{3}] \subseteq [0, \pi].$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\omega\pi}{6} > 0 \\ \frac{2\omega\pi}{3} \leq \pi \end{cases}, \text{解得 } 0 < \omega \leq \frac{3}{2}, \text{所以实数 } \omega \text{ 的最大值为 } \frac{3}{2}.$$

16. 1 以圆心  $O$  为坐标原点, 分别以  $BC, AO$  所在直线为  $x, y$  轴建立平面直角坐标系, 设点  $P(\cos \theta, \sin \theta), \theta \in [\pi, 2\pi]$ ,

$$\text{则由条件得 } \begin{cases} -\lambda + \mu = \cos \theta \\ -\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}\mu = \sin \theta - \sqrt{3} \end{cases}, \text{得 } \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \\ \mu = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \end{cases}, \text{故 } 2\lambda + \mu = \frac{3}{2} - \sin(\theta + \frac{\pi}{6}), \theta \in [\pi, 2\pi], \text{最小值为 } 1.$$

17. 解: (1) 由函数  $y=f(x)$  的图象可知,  $A=2$ , ..... 1 分

$$\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \text{故 } T=2\pi, \text{则 } \omega=1, \text{ ..... 2 分}$$

$$\text{又当 } x=\frac{\pi}{6} \text{ 时, } \sin(\frac{\pi}{6} + \varphi) = 1, \text{且 } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \text{故 } \varphi = \frac{\pi}{3}, \text{ ..... 4 分}$$

$$\text{所以 } f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{3}). \text{ ..... 5 分}$$

$$(2) g(x) = f(x) \cos x = 2\sin(x + \frac{\pi}{3}) \cos x = 2(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x) \cos x = \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ ..... 8 分}$$

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ 得 } -\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

- 故  $g(x)$  的单调递增区间为  $[-\frac{5\pi}{12}+k\pi, \frac{\pi}{12}+k\pi], k \in \mathbf{Z}$ . ..... 10 分
18. 解: (1)  $\because f(1)=5, \therefore m=4$ . ..... 1 分
- $\therefore f(x)=\frac{x^2+4}{x}=x+\frac{4}{x}$ . ..... 2 分
- $\because f(x)$  在  $[1, 2]$  上递减, 在  $[2, 4]$  上递增,
- 且  $f(2)=4, f(1)=f(4)=5$ . ..... 4 分
- $\therefore f(x)$  值域为  $[4, 5]$ . ..... 5 分
- (2) 对于任意  $x_1 \in [1, 4]$ , 总存在  $x_0 \in [-2, 2]$ , 使得  $g(x_0)=f(x_1)$  成立,
- 则  $f(x)$  的值域是  $g(x)$  值域的子集; ..... 7 分
- 依题意知,  $a \neq 0$
- 当  $a > 0$  时,  $g(x_0) \in [-2a-1, 2a-1], \therefore [4, 5] \subseteq [-2a-1, 2a-1]$ .
- $\therefore \begin{cases} a > 0 \\ -2a-1 \leq 4, \therefore a \geq 3. \\ 2a-1 \geq 5 \end{cases}$  ..... 9 分
- 当  $a < 0$  时,  $g(x_0) \in [2a-1, -2a-1], \therefore [4, 5] \subseteq [2a-1, -2a-1]$ .
- $\therefore \begin{cases} a < 0 \\ 2a-1 \leq 4, \therefore a \leq -3. \\ -2a-1 \geq 5 \end{cases}$  ..... 11 分
- 故  $a \geq 3$  或  $a \leq -3$ . ..... 12 分
19. 解: (1) 由已知可得  $4 \times \frac{1+\cos(A+B)}{2} - \cos 2(\pi-C) = \frac{7}{2}$ , ..... 2 分
- $\therefore 2-2\cos C-2\cos^2 C+1=\frac{7}{2}$ .
- $\therefore 4\cos^2 C+4\cos C+1=0, \therefore \cos C=-\frac{1}{2}$ . ..... 4 分
- $\because 0 < C < \pi, \therefore C=\frac{2\pi}{3}$ . ..... 5 分
- (2) 由(1)知  $C=\frac{2\pi}{3}$ , 因为  $CD$  平分  $\angle ACB, \therefore \angle ACD=\frac{\pi}{3}$ ,
- $\because S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC \cdot CD \cdot \sin \frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}AD \cdot h,$
- $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC \cdot CD \cdot \sin \frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}BD \cdot h,$
- 由  $S_{\triangle ACD}:S_{\triangle BCD}=2:1$ ,
- 得  $AC:BC=2:1=AD:BD$ . ..... 8 分
- 设  $BC=x$ , 则  $AC=2x$ , 分别在  $\triangle ACD$  和  $\triangle BCD$  中由余弦定理得,
- $AD^2=1+4x^2-2x, BD^2=1+x^2-x$ . ..... 10 分
- $\therefore (1+4x^2-2x)=4(1+x^2-x)$ , 解得  $x=\frac{3}{2}$ .
- $\therefore AC=2x=3$ . ..... 12 分
20. 解: (1)  $\because f'(x)=-\frac{b}{(a+bx)^2}, \therefore f'(1)=-\frac{b}{(a+b)^2}$ . ..... 1 分
- $\therefore f(x)$  在  $x=1$  处的切线方程是  $y-\frac{1}{a+b}=-\frac{b}{(a+b)^2}(x-1)$ . ..... 2 分
- 依题意知,  $\begin{cases} -\frac{b}{(a+b)^2}=-\frac{b}{4} \\ \frac{1}{a+b}+\frac{b}{(a+b)^2}=\frac{3}{4} \end{cases}, \therefore \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$  或者  $\begin{cases} a=-7 \\ b=5 \end{cases}$ . ..... 4 分
- $\because a, b > 0 \therefore a=b=1$ . ..... 5 分
- (2)  $\because 2(x-k)f(x) \geq \ln x, \therefore k \leq x-\frac{1}{2}(x+1)\ln x$ . ..... 7 分
- 令  $g(x)=x-\frac{1}{2}(x+1)\ln x$ , 则  $g'(x)=1-\frac{1}{2}(\ln x+\frac{x+1}{x})=\frac{1}{2}(1-\ln x-\frac{1}{x})$ ,
- 令  $h(x)=g'(x)=\frac{1}{2}(1-\ln x-\frac{1}{x}), \therefore h'(x)=\frac{1}{2}(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})=\frac{1-x}{2x^2}$ .
- 当  $x \in (0, 1]$  时,  $h'(x) \geq 0, h(x)$  递增, 即  $g'(x)$  递增. ..... 9 分

∴  $g'(x) \leq \frac{1}{2}(1 - \ln 1 - 1) = 0$ , ∴  $g(x)$  在  $(0, 1]$  递减, ∴  $g(x)_{\min} = g(1) = 1$ , ..... 11 分

∴ 实数  $k$  的取值范围为  $k \leq 1$ . ..... 12 分

21. 解: (1) 因为  $x=20$  时,  $y=7000$ ;  $x=30$  时,  $y=1500$ , 所以  $\begin{cases} \frac{n}{20} = 1500 \\ 100m + \frac{n}{10} = 7000 \end{cases}$ ,

解得  $m=40, n=30000$ ,

每日的销售量  $y = \begin{cases} 40(x-30)^2 + \frac{30000}{x-10} (10 < x \leq 30) \\ -70x + 4900 (30 < x \leq 50) \end{cases}$ . ..... 5 分

(2) 由(1)知, 当  $10 < x \leq 30$  时: 每日销售利润

$f(x) = [40(x-30)^2 + \frac{30000}{x-10}](x-10) = 40(x-30)^2(x-10) + 30000 = 40(x^3 - 70x^2 + 1500x - 9000) + 30000, (10 < x \leq 30)$ . ..... 7 分

则  $f'(x) = 40(3x^2 - 140x + 1500) = 40(x-30)(3x-50)$ ,

当  $x = \frac{50}{3}$  或  $x=30$  时,  $f'(x)=0$ , 当  $x \in (10, \frac{50}{3})$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增;

当  $x \in (\frac{50}{3}, 30)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减.

∴  $x = \frac{50}{3}$  是函数  $f(x)$  在  $(10, 30]$  上的唯一极大值点,  $f(\frac{50}{3}) = 40 \times \frac{32000}{27} + 30000$ ; ..... 9 分

当  $30 < x \leq 50$  时: 每日销售利润  $f(x) = (-70x + 4900)(x-10) = -70(x^2 - 80x + 700)$ ,

$f(x)$  在  $x=40$  有最大值, 且  $f(40) = 63000 < f(\frac{50}{3})$ . ..... 11 分

综上, 销售价格  $x = \frac{50}{3} \approx 16.67$  元/枚时, 每日利润最大. ..... 12 分

22. 解: (1)  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ,  $f'(x) = ae^x - b$ , ..... 1 分

当  $a > 0, b < 0$  时,  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增; ..... 2 分

当  $a > 0, b > 0$  时, 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x > \ln \frac{b}{a}$ , 令  $f'(x) < 0$ , 得  $x < \ln \frac{b}{a}$ ,

则  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln \frac{b}{a})$  上单调递减, 在  $(\ln \frac{b}{a}, +\infty)$  上单调递增; ..... 3 分

当  $a < 0, b > 0$  时,  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递减; ..... 4 分

当  $a < 0, b < 0$  时, 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x < \ln \frac{b}{a}$ , 令  $f'(x) < 0$ , 得  $x > \ln \frac{b}{a}$ ,

则  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln \frac{b}{a})$  上单调递增, 在  $(\ln \frac{b}{a}, +\infty)$  上单调递减; ..... 5 分

综上, 当  $a > 0, b < 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增;

当  $a > 0, b > 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln \frac{b}{a})$  上单调递减, 在  $(\ln \frac{b}{a}, +\infty)$  上单调递增;

当  $a < 0, b > 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递减;

当  $a < 0, b < 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln \frac{b}{a})$  上单调递增, 在  $(\ln \frac{b}{a}, +\infty)$  上单调递减; ..... 6 分

(2) 证明: 当  $a=b=1$  时,  $f(x) = e^x - x - 1$ .

由(1)知,  $f(x)_{\min} = f(0) = 0$ , 所以  $f(x) = e^x - x - 1 \geq 0$ .

即  $x \leq e^x - 1$ . 当且仅当  $x=0$  时取等号. ..... 8 分

当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时,  $(x+1)^2 > 0, (x+1)^2 \ln \sin x < 0$ ,

则  $(x+1)^2 \ln \sin x < e^{(x+1)^2 \ln \sin x} - 1$ ,

即  $(x+1)^2 \ln \sin x < (\sin x)^{(x+1)^2} - 1$ , ..... 10 分

又  $(x^2 + 2x + 2) \ln \sin x < (x+1)^2 \ln \sin x$ ,

所以  $(x^2 + 2x + 2) \ln \sin x < (\sin x)^{(x+1)^2} - 1$ ,

即  $(\sin x)^{(x+1)^2} - 1 > (x^2 + 2x + 2) \ln \sin x$ . ..... 12 分