

数 学 (理科)

考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。第 I 卷每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;第 II 卷请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
3. 本卷命题范围:集合与常用逻辑用语,函数、导数及其应用(含定积分),三角函数、解三角形,平面向量与复数。

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $N = \{y | y = \pi^x\}$, 则 $M \cap N =$

A. $(0, 2]$

B. $(0, 1]$

C. $[-2, +\infty)$

D. $[-1, +\infty)$

2. 已知复数 z 满足 $z - \bar{z} = 2i$, 则 z 的虚部是

A. -1

B. 1

C. $-i$

D. i

3. 已知实数 $x > 0, y > 0$, 则“ $xy < 1$ ”是“ $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y > 0$ ”的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 若 $\tan \alpha = -2$, 则 $\sin(\alpha - \pi) \cdot \cos(\pi + \alpha) =$

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\pm \frac{2}{5}$

D. $-\frac{2}{5}$

5. 定积分 $\int_{-2}^2 (\sin x + \sqrt{4-x^2}) dx$ 的值是

A. $\frac{\pi}{2}$

B. π

C. 2π

D. $\frac{3\pi}{2}$

6. 设向量 $a = (0, 2)$, $b = (2, 2)$, 则

A. $|a| = |b|$

B. $(a-b) \parallel b$

C. a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$

D. $(a-b) \perp a$



7. 已知 $a=e^{0.3}$, $b=(\frac{1}{2})^e$, $c=\log_5 \sqrt{7}$, $d=\sin 4$, 则

- A. $a>b>c>d$ B. $a>c>b>d$ C. $d>b>a>c$ D. $b>a>d>c$

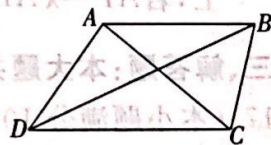
8. 某特种冰箱的食物保鲜时间 y (单位: 小时) 与设置储存温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 近似满足函数关系 $y=3^{kx+b}$ (k, b 为常数), 若设置储存温度 0°C 的保鲜时间是 288 小时, 设置储存温度 5°C 的保鲜时间是 144 小时, 则设置储存温度 15°C 的保鲜时间近似是

- A. 36 小时 B. 48 小时 C. 60 小时 D. 72 小时

9. 将函数 $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})$ 的图象横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 然后向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 所得函数记为 $g(x)$. 若 $x_1, x_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $x_1 \neq x_2$, 且 $g(x_1)=g(x_2)$, 则 $g(x_1+x_2)=$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 如图, 地面四个 5G 中继站 A、B、C、D, 已知 $CD=(\sqrt{6}+\sqrt{2})\text{km}$, $\angle ADB=\angle CDB=30^{\circ}$, $\angle DCA=45^{\circ}$, $\angle ACB=60^{\circ}$, 则 A、B 两个中继站的距离是



- A. $4\sqrt{3}\text{ km}$ B. $2\sqrt{10}\text{ km}$
C. $\sqrt{10}\text{ km}$ D. $6\sqrt{2}\text{ km}$

11. 已知函数 $f(x)=(\frac{3}{2}x^2-3x) \cdot e^x$, 则

- A. 函数 $f(x)$ 的极大值点为 $x=\sqrt{2}$
B. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{2})$ 上单调递减
C. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有 3 个零点
D. 函数 $f(x)$ 在原点处的切线方程为 $y=-3x$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} |x+4|-2, & x<-2, \\ 2f(x-4), & x\geq-2. \end{cases}$ 以下结论正确的个数有

① $f(2020)=2^{507}$;

② 方程 $f(x)=\frac{1}{4}x-1$ 有四个实根;

③ 当 $x \in [6, 10)$ 时, $f(x)=8|x-8|-16$;

④ 若函数 $y=f(x)-t$ 在 $(-\infty, 10)$ 上有 8 个零点 $x_i (i=1, 2, 3, \dots, 8)$, 则 $\sum_{i=1}^8 x_i f(x_i)$ 的取值范围为 $(-16, 0)$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填在题中的横线上.

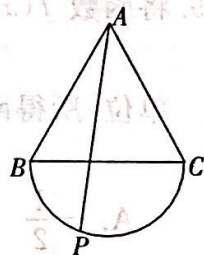
13. 设函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 内的可导函数,且 $f(\ln x) = x \ln x$,则 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知函数 $f(x) = (x^2 + \frac{1}{\pi})^{-2} - e^{\frac{x}{\pi}}$,则不等式 $f(x-1) < f(2x-1)$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 将函数 $f(x) = \cos \omega x (\omega > 0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后,得到函数 $y = g(x)$ 的图象,

若函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是单调递减函数,则实数 ω 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 如图,已知 $\triangle ABC$ 为边长为 2 的等边三角形,动点 P 在以 BC 为直径的半圆



上,若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$,则 $2\lambda + \mu$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

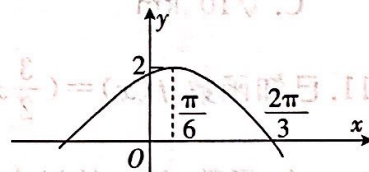
三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$,其中 $A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, x \in \mathbf{R}$,其部分图象如图所示.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的解析式;

(2) 已知函数 $g(x) = f(x) \cos x$,求函数 $g(x)$ 的单调递增区间.



18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + m}{x} (1 \leq x \leq 4)$,且 $f(1) = 5$.

(1) 求实数 m 的值,并求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 函数 $g(x) = ax - 1 (-2 \leq x \leq 2)$,若对任意 $x_1 \in [1, 4]$,总存在 $x_0 \in [-2, 2]$,使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立,求实数 a 的取值范围.



19. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且满足 $4\cos^2 \frac{A+B}{2} - \cos 2(A+B) = \frac{7}{2}$.

(1) 求角 C ;

(2) 设 D 为边 AB 上的点, CD 平分 $\angle ACB$, 且 $CD=1$, 若 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCD$ 的面积比 $2:1$, 求 AC 长.

20. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = \frac{1}{a+bx}$ ($a, b > 0$).

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程是 $bx+4y-3=0$, 求实数 a, b 的值;

(2) 在 (1) 的条件下, 若 $2(x-k)f(x) \geq \ln x$ 对于 $0 < x \leq 1$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

某科技公司生产某种芯片. 由以往的经验表明, 不考虑其他因素, 该芯片每日的销售量 y (单位: 枚) 与销售价格 x (单位: 元/枚, $10 < x \leq 50$): 当 $10 < x \leq 30$ 时满足关系式 $y = m(x-30)^2 + \frac{n}{x-10}$, (m, n 为常数); 当 $30 < x \leq 50$ 时满足关系式 $y = -70x + 4900$. 已知当销售价格为 20 元/枚时, 每日可售出该芯片 7000 枚; 当销售价格为 30 元/枚时, 每日可售出该芯片 1500 枚.

(1) 求 m, n 的值, 并确定 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 若该芯片的成本为 10 元/枚, 试确定销售价格 x 的值, 使公司每日销售该芯片所获利润 $f(x)$ 最大. (x 精确到 0.01 元/枚)

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = a \cdot e^x - bx - 1$ ($a, b \in \mathbf{R}, ab \neq 0$).

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $(\sin x)^{(x+1)^2} - 1 > (x^2 + 2x + 2) \ln \sin x$.

