

“皖南八校”2021 届高三第一次联考·数学(文科)

参考答案、解析及评分细则

1. D $\because A = \{x | -2 < x < 3\}, B = \{x | x \leq 2\}, \therefore A \cup B = (-\infty, 3)$.
2. B 由题意, $z = -1 + 2i$, 则 $z(1-i) = (-1+2i)(1-i) = 1+3i$. $\therefore z$ 的虚部是 3.
3. A $\because x > y+1 \Rightarrow x-y > 1 \Rightarrow x-y > 0 \Rightarrow x > y, \therefore x > y+1$ 是 $x > y$ 的充分条件.
又 $\because x > y \Rightarrow x-y > 0 \not\Rightarrow x > y+1, \therefore x > y+1$ 不是 $x > y$ 的必要条件,
 $\therefore x > y+1$ 是 $x > y$ 成立的充分而不必要条件.
 $x > y-1$ 是 $x > y$ 成立的必要而不充分条件; $x^2 > y^2$ 是 $x > y$ 成立的既不充分也不必要条件;
 $x^3 > y^3$ 是 $x > y$ 成立的充要条件.
4. D 因为 $a = (0, 2), b = (2, 2)$, 所以 $|a| = 2, |b| = 2\sqrt{2}$, 所以 $|a| \neq |b|$, 故 A 错误;
因为 $a = (0, 2), b = (2, 2)$, 所以 $a-b = (-2, 0)$, 所以 $(a-b)$ 与 b 不平行, 故 B 错误;
又 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 故 C 错误;
又 $(a-b) \cdot a = 0-0=0$, 故 D 正确.
5. C 设直角三角形的直角边长为 $a, a+1$, 则 $a^2 + (a+1)^2 = 25, a > 0$. 解得 $a = 3$.
 $\therefore \sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}. \therefore \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{7}{25}$.
6. C 因为 $f(x) = \log_2 x + \sqrt{16-4^x}$,
所以要使函数有意义需满足 $\begin{cases} x > 0 \\ 16-4^x \geq 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x > 0 \\ x \leq 2 \end{cases}$, 即 $0 < x \leq 2$, 所以函数的定义域为 $(0, 2]$.
7. A $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \sin(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x + \frac{5\pi}{6}) = \sin[2(x + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}]$, 故选 A.
8. A 由题意得 $\begin{cases} 3^b = 288 \\ 3^{5k+b} = 144 \end{cases}, \therefore 3^k = \frac{144}{288} = \frac{1}{2}$, 所以 $x = 15$ 时, $y = 3^{15k+b} = (3^k)^{15} \cdot 3^b = \frac{1}{8} \times 288 = 36$.
9. B 由 $\overrightarrow{OA} = \lambda a + \mu b, \overrightarrow{OB} = 3a - 2b, \overrightarrow{OC} = 2a - 3b$,
所以 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3-\lambda)a - (2+\mu)b, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = -a - b$;
若 A、B、C 三点共线, 则 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BC}$, 即 $3-\lambda = -(2+\mu)$, 化简得 $\lambda = \mu + 5$.
10. B $f(x) = 2^x + x - 1, g(x) = \log_2 x + x - 1, h(x) = \sin x + x - 1$,
故 $2^x = -x + 1, \log_2 x = -x + 1, \sin x = -x + 1$, 作出函数 $y = 2^x, y = \log_2 x, y = \sin x, y = -x + 1$ 图像, 可得 $x_1 < x_3 < x_2$.
11. D 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \sqrt{2}$ 或 $x = -\sqrt{2}$.
当 $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $y = f(x)$ 的增区间为 $(-\infty, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, +\infty)$;
当 $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $y = f(x)$ 的减区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. 故 B 错误.
所以当 $x = -\sqrt{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 有极大值, 故 A 错误.
当 $x < -\sqrt{2}$ 时, $f(x) = (\frac{3}{2}x^2 - 3x)e^x > 0$ 恒成立, 所以函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{2})$ 上没有零点;
当 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 上单调递减, 且 $f(0) = 0$, 存在唯一零点;
当 $x > \sqrt{2}$ 时, 函数 $y = f(x)$ 在 $(\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(2) = 0$, 存在唯一零点.
故函数 $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有两个零点, 故 C 错误.
函数 $f(x) = (\frac{3}{2}x^2 - 3x)e^x$, 得 $f'(x) = 3(\frac{1}{2}x^2 - 1)e^x$, 则 $f'(0) = -3$;
又 $f(0) = 0$, 从而曲线 $y = f(x)$ 在原点处的切线方程为 $y = -3x$, 故 D 正确.
12. C 在 $\triangle ADC$ 中, $\frac{DC}{\sin 75^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ}$, 在 $\triangle BCD$ 中, $\frac{DC}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin 30^\circ}$,
设 $DC = x$, 则 $AC = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}x, BC = \frac{\sqrt{2}}{2}x$,

在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理, $AB^2=AC^2+BC^2-2AC \times BC \cdot \cos 60^\circ$,解得 $x=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

13. 2e 令 $t=\ln x, f(t)=te^t$, 所以 $f(x)=xe^x, f'(x)=(x+1)e^x, f'(1)=2e$.

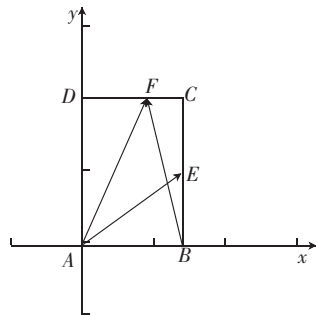
14. $\frac{7}{2}$ 建立如图所示的坐标系,可得 $A(0,0), B(2,0), E(2,\frac{3}{2}), F(x,3)$,

$$\therefore \overrightarrow{AB}=(2,0), \overrightarrow{AF}=(x,3),$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}=2x=3 \text{ 解得 } x=\frac{3}{2}, \therefore F(\frac{3}{2}, 3)$$

$$\therefore \overrightarrow{AE}=(2, \frac{3}{2}), \overrightarrow{BF}=(-\frac{1}{2}, 3),$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}=-1+\frac{9}{2}=\frac{7}{2}.$$



15. $(0, \frac{2}{3})$ 由于 $f(-x)=f(x)$, 所以函数为偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上为减函

数. 要 $f(x-1)<f(2x-1)$, 则需 $|x-1|>|2x-1|$, 解得 $x \in (0, \frac{2}{3})$.

16. $[4\sqrt{3}, +\infty) \cup \{2\sqrt{3}\}$ 由正弦定理知, 满足 $b=4, A=60^\circ$ 三角形仅有一个, 则 $a=b \sin A$ 或 $a \geq b$, 即 $a=2\sqrt{3}$ 或 $a \geq 4$, 由余弦定理得, $c=2+\sqrt{a^2-12}$, $\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc \cdot \sin A=\sqrt{3}(2+\sqrt{a^2-12}) \in \{2\sqrt{3}\} \cup [4\sqrt{3}, +\infty)$.

17. 解: (1) 由函数 $y=f(x)$ 的图象可知, $A=2$, 1 分

$$\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}, \text{ 故 } T=2\pi, \text{ 则 } \omega=1, \text{ 2 分}$$

$$\text{又当 } x=\frac{\pi}{6} \text{ 时, } \sin(\frac{\pi}{6}+\varphi)=1, \text{ 且 } -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}, \text{ 故 } \varphi=\frac{\pi}{3}, \text{ 4 分}$$

$$\text{所以 } f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3}). \text{ 5 分}$$

$$(2) g(x)=f(x) \cos x=2\sin(x+\frac{\pi}{3}) \cos x=2(\frac{1}{2} \sin x+\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x) \cos x=\sin x \cos x+\sqrt{3} \cos^2 x=\frac{1}{2} \sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 8 分}$$

$$\text{令 } -\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq 2x+\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ 得 } -\frac{5\pi}{12}+k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12}+k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{故 } g(x) \text{ 的单调递增区间为 } [-\frac{5\pi}{12}+k\pi, \frac{\pi}{12}+k\pi], k \in \mathbf{Z}. \text{ 10 分}$$

18. 解: (1) $\because f(1)=5, \therefore m=4$ 1 分

$$\therefore f(x)=\frac{x^2+4}{x}=x+\frac{4}{x}. \text{ 2 分}$$

$\because f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上递减, 在 $[2, 4]$ 上递增,

$$\text{且 } f(2)=4, f(1)=f(4)=5. \text{ 4 分}$$

$$\therefore f(x) \text{ 值域为 } [4, 5]. \text{ 5 分}$$

(2) 对于任意 $x_1 \in [1, 4]$, 总存在 $x_0 \in [-2, 2]$, 使得 $g(x_0)=f(x_1)$ 成立,

则 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 值域的子集; 7 分

依题意知, $a \neq 0$

$$\text{当 } a>0 \text{ 时, } g(x_0) \in [-2a-1, 2a-1], \therefore [4, 5] \subseteq [-2a-1, 2a-1].$$

$$\therefore \begin{cases} a>0 \\ -2a-1 \leq 4, \therefore a \geq 3. \\ 2a-1 \geq 5 \end{cases} \text{ 9 分}$$

$$\text{当 } a<0 \text{ 时, } g(x_0) \in [2a-1, -2a-1], \therefore [4, 5] \subseteq [2a-1, -2a-1].$$

$$\therefore \begin{cases} a<0 \\ 2a-1 \leq 4, \therefore a \leq -3. \\ -2a-1 \geq 5 \end{cases} \text{ 11 分}$$

$$\text{故 } a \geq 3 \text{ 或 } a \leq -3. \text{ 12 分}$$

19. 解: (1) 由正弦定理得 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$, 2 分

$$\therefore a^2 + b^2 - c^2 = ab,$$

由余弦定理可知, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$, 4 分

又 $\because C \in (0, \pi)$, $\therefore C = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(2) 因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 由 (1) 知 $C = \frac{\pi}{3}$, $A+B+C=\pi$ 得到 $A+B = \frac{2\pi}{3}$,

$$\therefore \begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2} \end{cases} \therefore \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

由正弦定理得, $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, $b=4$.

由三角形面积公式有: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = 4\sqrt{3} \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-B)}{\sin B} = \frac{6}{\tan B} + 2\sqrt{3}$ 10 分

又因 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$, 故 $\tan B > \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore 2\sqrt{3} < S_{\triangle ABC} < 8\sqrt{3}$.

故 $S_{\triangle ABC}$ 的取值范围是 $(2\sqrt{3}, 8\sqrt{3})$ 12 分

20. 解: (1) $\because f'(x) = -\frac{b}{(a+bx)^2}$, $\therefore f'(1) = -\frac{b}{(a+b)^2}$ 1 分

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程是 $y - \frac{1}{a+b} = -\frac{b}{(a+b)^2}(x-1)$ 2 分

依题意知, $\begin{cases} -\frac{b}{(a+b)^2} = -\frac{b}{4} \\ \frac{1}{a+b} + \frac{b}{(a+b)^2} = \frac{3}{4} \end{cases} \therefore \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \text{ 或者 } \begin{cases} a=-7 \\ b=5 \end{cases}$ 4 分

$\because a, b > 0 \therefore a=b=1$ 5 分

(2) $\because 2(x-k)f(x) \geq \ln x$, $\therefore k \leq x - \frac{1}{2}(x+1)\ln x$ 7 分

令 $g(x) = x - \frac{1}{2}(x+1)\ln x$, 则 $g'(x) = 1 - \frac{1}{2}(\ln x + \frac{x+1}{x}) = \frac{1}{2}(1 - \ln x - \frac{1}{x})$,

令 $h(x) = g'(x) = \frac{1}{2}(1 - \ln x - \frac{1}{x})$, $\therefore h'(x) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = \frac{1-x}{2x^2}$.

当 $x \in (0, 1]$ 时, $h'(x) \geq 0$, $h(x)$ 递增, 即 $g'(x)$ 递增. 9 分

$\therefore g'(x) \leq \frac{1}{2}(1 - \ln 1 - 1) = 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(0, 1]$ 递减, $\therefore g(x)_{\min} = g(1) = 1$ 11 分

$\therefore$ 实数 k 的取值范围为 $k \leq 1$ 12 分

21. 解: (1) 因为 $x=20$ 时, $y=7000$; $x=30$ 时, $y=1500$, 所以 $\begin{cases} \frac{n}{20} = 1500 \\ 100m + \frac{n}{10} = 7000 \end{cases}$,

解得 $m=40, n=30000$,

每日的销售量 $y = \begin{cases} 40(x-30)^2 + \frac{30000}{x-10} (10 < x \leq 30) \\ -70x + 4900 (30 < x \leq 50) \end{cases}$ 5 分

(2) 由 (1) 知, 当 $10 < x \leq 30$ 时: 每日销售利润

$f(x) = [40(x-30)^2 + \frac{30000}{x-10}](x-10) = 40(x-30)^2(x-10) + 30000 = 40(x^3 - 70x^2 + 1500x - 9000) + 30000, (10 < x \leq 30)$ 7 分

则 $f'(x) = 40(3x^2 - 140x + 1500)$,

当 $x = \frac{50}{3}$ 或 $x=30$ 时, $f'(x)=0$, 当 $x \in (10, \frac{50}{3})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (\frac{50}{3}, 30)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

$\therefore x = \frac{50}{3}$ 是函数 $f(x)$ 在 $(10, 30]$ 上的唯一极大值点, $f(\frac{50}{3}) = 40 \times \frac{32000}{27} + 30000; \dots\dots\dots 9$ 分

当 $30 < x \leq 50$ 时: 每日销售利润 $f(x) = (-70x + 4900)(x - 10) = -70(x^2 - 80x + 700)$,

$f(x)$ 在 $x = 40$ 有最大值, 且 $f(40) = 63000 < f(\frac{50}{3})$. $\dots\dots\dots 11$ 分

综上, 销售价格 $x = \frac{50}{3} \approx 16.67$ 元/枚时, 每日利润最大. $\dots\dots\dots 12$ 分

22. 解: $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{3}(ax^2 + a + 1) + \frac{e^{-x}}{3} \cdot 2ax = -\frac{e^{-x}}{3}(ax^2 - 2ax + a + 1)$. $\dots\dots\dots 1$ 分

(1) 若 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 内为减函数, 则 $f'(x) \leq 0$ 在 $[1, 2]$ 内恒成立.

而 $e^{-x} > 0$, $\therefore ax^2 - 2ax + a + 1 \geq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立. $\dots\dots\dots 2$ 分

(i) 若 $x = 1$, 则 $1 \geq 0$ 恒成立. $\dots\dots\dots 3$ 分

(ii) 若 $x \in (1, 2]$, 则 $\therefore a(x-1)^2 \geq -1$, $\therefore a \geq -\frac{1}{(x-1)^2} (x \in (1, 2])$,

$\therefore a \geq [-\frac{1}{(x-1)^2}]_{\max} = -1$, 综上 $a \geq -1$. $\dots\dots\dots 5$ 分

(2) 当 $a \geq -1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 内单调递减, $\therefore f(x)_{\max} = f(1) = \frac{2a+1}{3e}$. $\dots\dots\dots 6$ 分

当 $a < -1$ 时, $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{3}(ax^2 - 2ax + a + 1)$, 令 $f'(x) = 0$,

则 $x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a(a+1)}}{2a} = 1 \pm \frac{\sqrt{-a}}{a}$.

当 $a < -1$ 时, $1 < x_1 = 1 - \frac{\sqrt{-a}}{a} < 2$, $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{-a}}{a} < 1$,

当 $x \in [1, 1 - \frac{\sqrt{-a}}{a}]$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in [1 - \frac{\sqrt{-a}}{a}, 2]$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. $\dots\dots\dots 8$ 分

$\therefore f(x)$ 的最大值只能在 $x = 1$ 或 $x = 2$ 处.

$f(2) - f(1) = \frac{1}{3e^2}[(5-2e)a + (1-e)].$

(i) 当 $a < \frac{e-1}{5-2e}$ 时, $f(2) > f(1)$, $\therefore f(x)_{\max} = f(2) = \frac{1}{3e^2}(5a+1)$.

(ii) 当 $a = \frac{e-1}{5-2e}$ 时, $f(1) = f(2)$, $\therefore f(x)_{\max} = f(1) = f(2) = \frac{1}{3e^2}(5a+1)$.

(iii) 当 $\frac{e-1}{5-2e} < a < -1$ 时, $f(1) > f(2)$, $\therefore f(x)_{\max} = f(1) = \frac{2a+1}{3e}$. $\dots\dots\dots 11$ 分

综上, $f(x)_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{3e^2}(5a+1) & (a \leq \frac{e-1}{5-2e}) \\ \frac{1}{3e}(2a+1) & (a > \frac{e-1}{5-2e}) \end{cases}$. $\dots\dots\dots 12$ 分