

2021 届普通高中教育教学质量监测考试

全国卷(新高考) 数学 参考答案

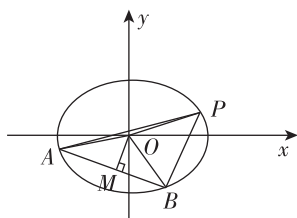
1. C 【解析】 $z = \frac{2}{1+i} + 2i = \frac{2(1-i)}{1^2-i^2} + 2i = 1-i+2i = 1+i$, 故 $|z| = \sqrt{2}$.

2. A 【解析】由题意得, $A = \{x | -2 < x < 4\}$, $N = \{x | -3 < x < 2\}$, 则 $A \cap B = \{x | -2 < x < 2\}$.

3. D 【解析】 $y' = \frac{a(x-1)-ax}{(x-1)^2} = -\frac{a}{(x-1)^2}$, $y'|_{x=2} = -\frac{a}{(2-1)^2} = -a$, 直线 $3x-y+b=0$ 的斜率为 3. 所以 $-a = 3$, 故 $a = -3$, 故切点为 $(2, -6)$, 代入切线方程为 $3x-y+b=0$ 得 $b = -12$.

4. D 【解析】依题意, $1+a_3+a_5+a_7+a_9+\dots+a_{59} = a_2+a_3+a_5+a_7+a_9+\dots+a_{59} = a_4+a_5+a_7+a_9+\dots+a_{59} = a_6+a_7+a_9+\dots+a_{59} = \dots = a_{58}+a_{59} = a_{60}$, 则 $k = 60$.

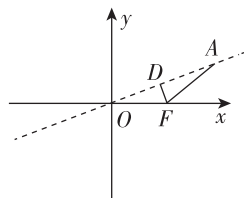
5. B 【解析】如图, 圆的半径为 1, 且 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$, 易得 $\angle AOB = 120^\circ$. 由题意知 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} - 1 - 1 \times 1 \times \cos 120^\circ + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - \frac{1}{2}$. 设 AB 的中点为 M,



则 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$, 且 $|\overrightarrow{OM}| = \frac{1}{2}$, 设 $\overrightarrow{OM}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ , 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} - \frac{1}{2}$.

$\overrightarrow{OP} - \frac{1}{2} = 2|\overrightarrow{OM}| |\overrightarrow{OP}| \cos \theta - \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \cos \theta - \frac{1}{2} = \cos \theta - \frac{1}{2}$. 又因为 $\theta \in [0, \pi]$, 所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的范围为 $[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$.

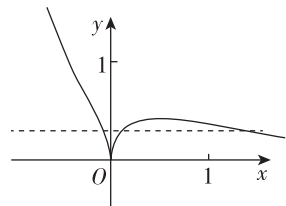
6. C 【解析】设 D 为 OA 中点, 则 $DF \perp OA$, 渐近线方程为 $y = \frac{1}{a}x$, $F(c, 0)$. 其中 $c^2 = 1^2 + a^2$, 则 $|DF| = \frac{c}{\sqrt{1^2+a^2}} = 1$, 因为 D 为 AO 中点. 因为 $\tan \angle AOF = \frac{|DF|}{|OD|} = \frac{1}{a}$, 所以



$|OD| = a$, $|AO| = 2a$. 则 $S_{\triangle OAF} = \frac{1}{2} \times 2a \times 1 = a$. 解得 $a = 2$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

7. D 【解析】在 $\triangle ACB$ 中, $AB = 60$, $BC = 60$, $\angle ABC = 60^\circ$, 所以 $AC = 60$, 在 $\triangle CDA$ 中, $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos 60^\circ = 60^2 + 40^2 - 2 \times 60 \times 40 \times \frac{1}{2} = 2800$, 所以 $AB = 20\sqrt{7} \approx 53$ (米).

8. D 【解析】 $k \cdot e^x - e^x - \sqrt{|x|} = 0$, 即为 $k - 1 = \frac{\sqrt{|x|}}{e^x}$, 设 $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{e^x}$ ($x \in \mathbf{R}$), 当



$x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$, 故 $f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}e^x}$, 函数在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 上

单调递减, 且 $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2e}}{2e}$, 当 x 趋于 $+\infty$ 时, $f(x)$ 趋于 0; 当 $x < 0$ 时,

$f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{e^x}$, $f'(x) = -\frac{1-2x}{2\sqrt{-x}e^x} < 0$, 函数单调递减, 此时 $f(x)$ 的取值范围为 $(0, +\infty)$; 如图所示画出函

数图象, 则 $0 < k - 1 < f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2e}}{2e}$, 故 $k \in (1, \frac{\sqrt{2e}}{2e} + 1)$.

9. BC 【解析】 $f(x) = 2^{x-1} + 2^{1-x} \geq 2\sqrt{2^{x-1} \cdot 2^{1-x}} = 2$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号, 故 B 正确; 因为 $f(x) = 2^{x-1} + 2^{1-x}$, 所以 $f(2-x) = 2^{(2-x)-1} + 2^{1-(2-x)} = 2^{1-x} + 2^{x-1} = f(x)$, 所以 $f(x) = f(2-x)$, 即 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 故 C 正确, 因为函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 所以 AD 错误.

10. ACD 【解析】因为 $S_{n+1} = 2S_n + n - 1$, 所以 $S_{n+1} + n + 1 = 2(S_n + n)$. 若 $a_1 = 1$, 则 $S_1 + 1 = 2 \neq 0$, 所以 $\frac{S_{n+1} + n + 1}{S_n + n} = \frac{2S_n + 2n}{S_n + n} = 2$. 故数列 $\{S_n + n\}$ 是等比数列, 故 A 正确; 所以 $S_n + n = 2^n$, 则 $S_n = 2^n - n$. 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n-1} - 1$, 由 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 3$ 可得 $a_1 + 1 = 2, a_2 + 1 = 2, a_3 + 1 = 4$, 即 $\frac{a_3 + 1}{a_2 + 1} \neq \frac{a_2 + 1}{a_1 + 1}$, 故 B 错误; 若 $a_1 = -1$, 则由 $S_{n+1} + n + 1 = 2(S_n + n)$, 得 $S_n + n = 0$, 此时数列 $\{S_n + n\}$ 为等差数列, 故 C 正确, 此时可求得 $a_n = -1, a_n + 1 = 0$, 此时数列 $\{a_n + 1\}$ 为等差数列; 故 D 正确.

11. BCD 【解析】根据赛制, 至少需要进行四场比赛, 至多需要进行五场比赛. 故 A 错; 第三场比赛甲轮空, 即第三场是乙和丙比赛, 则第二场甲一定参赛了, 说明第一场甲赢了, 第二场是甲和丙比赛, 甲输了, 所以第三场比赛甲轮空的概率为 $P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 故 B 正确. 记事件 A 为甲输, 事件 B 为乙输, 事件 C 为丙输, 记事件 M: 甲赢, 记事件 N: 丙赢, 则甲赢的基本事件包括: BCBC, ABCBC, ACBCB, BABCC, BACBC, BCACB, BCABC, BCBAC, 所以甲赢的概率为 $P(M) = (\frac{1}{2})^4 + 7 \times (\frac{1}{2})^5 = \frac{9}{32}$. 由对称性可知, 乙赢的概率和甲赢的概率相等, 所以丙赢的概率为 $P(N) = 1 - 2 \times \frac{9}{32} = \frac{7}{16}$.

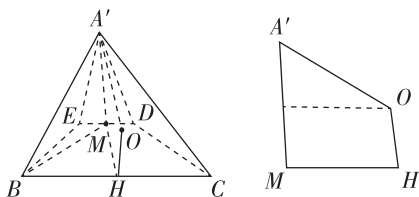
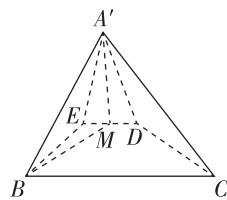
12. BD 【解析】在翻折过程中, 平面 $A'ED \perp$ 平面 BCDE 时, 四棱锥 $A'-BCDE$ 体积最大,

$V = \frac{1}{3} \cdot S_{BCDE} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8}$, 故 A 错误; 对于 B, 当二面角 $A'-DE-B$ 为直二面角时, 取 ED 的中点 M, 如图所示, 可得 $A'M \perp$ 平面 BCDE, 则 $|A'B| =$

$\sqrt{A'M^2 + BM^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{2})^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 故 B 正确; 对于 C, 在翻折过程中, 点 A' 在底面 BCDE 的射影不可能在交线 BC 上, 因此不满足平面 $A'BC \perp$ 平面 BCDE, 因此 C 不正确. 对于 D, 平面 $A'ED \perp$ 平面 BCDE 时, 设外接球球心为 O, 如图, 易知 BC 中点 H 即为四边形

BCDE 的外接圆的圆心, 设球的半径为 R, $OH = d$, 则有 $(\frac{\sqrt{3}}{2} - d)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = R^2, d^2 + 1 = R^2$, 解得 $R^2 = \frac{13}{12}$, 所以

以外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = \frac{13\pi}{3}$, 故 D 正确.



13. $\frac{1}{4}$ 【解析】因为 $f(-1) = 2, f(a) + 2 = 0$, 所以 $f(a) = -2, f(a) = \log_2 a = -2$, 解得 $a = \frac{1}{4}$.

14. 1 【解析】易知抛物线方程为: $y^2 = 4x$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 $l: x = ty + 1$, 代入抛物线方程, 得 $y^2 - 4ty - 4 = 0$. 所以 $y_1 y_2 = -4$, 因为圆 E 的圆心为抛物线焦点 F. 根据抛物线的定义知, $|AF| = x_1 + 1, |BF| = x_2 + 1$, 故 $|AM| = x_1, |BN| = x_2$, 所以 $|AM| \cdot |BN| = x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4} = \frac{(y_1 y_2)^2}{16}$. 因为 $y_1 y_2 = -4$, 所以 $|AM| \cdot |BN| = 1$.

15. $\frac{25\sqrt{5}}{324}$ 【解析】因为 $PA \perp$ 平面 ABC, $CM \subset$ 平面 ABC, 所以 $PA \perp CM$, 又 $CM \perp AB$, 所以 $CM \perp$ 平面 PAB, $PB \subset$ 平面 PAB, 所以 $CM \perp PB$, 又因为 $CN \perp PB$, 所以 $PB \perp$ 平面 CMN, 又 $MN \subset$ 平面 CMN, 所以 $PB \perp MN$, 三棱锥 B-CMN 体积 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle BMN} \cdot CM = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times BN \cdot MN \cdot CM$, 由 $PA = AB = 2$, 可知 $\triangle PAB$ 为等腰直角三角形, 设 $BN = x$, 则 $MN = x, BM = \sqrt{2}x$, 在直角三角形 ABC 中, 又 $CM \perp AB$, 所以 $CM^2 = AM \cdot BM$, 因为 $AB = 2$, 所以 $AM = 2 - \sqrt{2}x$, 所以 $CM = \sqrt{2x(2 - \sqrt{2}x)}$, 故 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times BN \cdot MN \cdot CM = \frac{1}{6} x^2 \sqrt{2x(2 - \sqrt{2}x)} = \frac{1}{6} x^2 \sqrt{2x(\sqrt{2} - x)} = \frac{1}{6} \sqrt{2x^5(\sqrt{2} - x)} = \frac{1}{6} \sqrt{2(\sqrt{2}x^5 - x^6)} (0 < x < \sqrt{2})$, 令 $u = \sqrt{2}x^5 -$

x^6 , 则 $u' = 5\sqrt{2}x^4 - 6x^5 = x^4(5\sqrt{2} - 6x)$, 令 $u' = 0$, 则 $x = \frac{5\sqrt{2}}{6}$, 当 $0 < x < \frac{5\sqrt{2}}{6}$ 时, $u' > 0$, 当 $\frac{5\sqrt{2}}{6} < x < \sqrt{2}$ 时, $u' < 0$, 故当 $x = \frac{5\sqrt{2}}{6}$ 时, $u = \sqrt{2}x^5 - x^6$ 取最大值, 此时 V 也取最大值, 最大值为 $V_{\max} = \frac{1}{6}(\frac{5\sqrt{2}}{6})^2 \sqrt{\sqrt{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{6}(2 - \sqrt{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{6})} = \frac{1}{6} \times \frac{25}{18} \times \sqrt{\frac{5}{3} \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \times \frac{25}{18} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{25\sqrt{5}}{324}$.

16. $\pi, \frac{4\sqrt{3}}{9}$ 【解析】由题 $f(x) = \sin 2x \cdot |\sin x|$, 则 $f(x + \pi) = \sin[2(x + \pi)] \cdot |\sin(x + \pi)| = \sin 2x \cdot |-\sin x| = f(x)$, 从而 π 是函数的周期. 当 $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = \sin 2x \cdot \sin x$, 则 $f'(x) = 6\sin x(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{3})(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{3})$, 设 $0 < \alpha < \beta < \pi$, 且 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \beta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则当 $0 < x < \alpha$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $\alpha < x < \beta$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $\beta < x < \pi$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 又 $f(0) = f(\pi) = 0$, 所以函数的最小值正周期是 π , 最大值为 $f(\alpha) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

17. 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $A + B + C = \pi$, 那么由 $\sin B - \sin C = \sin(A - C)$, 可得 $\sin(A + C) - \sin C = \sin(A - C)$, $\sin A \cos C + \cos A \sin C - \sin C = \sin A \cos C - \cos A \sin C$, $\therefore 2\cos A \sin C = \sin C \neq 0$, $\therefore \cos A = \frac{1}{2}$, $\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{3}$ 2 分

补充的条件为②③时, 三角形存在. 补充的条件①②或①③时, 三角形不存在,

选理由如下:

若补充的条件中有①.

因为 $\cos B = -\frac{2}{3} < -\frac{1}{2}$, 且 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B > \frac{2}{3}\pi$.

所以 $A + B > \pi$, 矛盾.

所以 $\triangle ABC$ 不能补充的条件①, 只能补充的条件为②③, 5 分

因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 6 分

所以 $7^2 = 3^2 + c^2 - 2 \times 3 \times c \times \frac{1}{2}$.

解得 $c = 8$, 或 $c = -5$ (舍). 8 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = 6\sqrt{3}$ 10 分

18. 【解析】(1) $\because a_2 = 3$, $\therefore a_1 + d = 3$ ①, 1 分

$\because a_3^2 = 2a_7$, $\therefore (a_1 + 2d)^2 = 2(a_1 + 6d)$ ②, 2 分

由①②得: $\begin{cases} d=1 \\ a_1=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} d=3 \\ a_1=0 \end{cases}$, 4 分

当 $\begin{cases} d=1 \\ a_1=2 \end{cases}$ 时, $a_n = n + 1$.

当 $\begin{cases} d=3 \\ a_1=0 \end{cases}$ 时, $a_n = 3(n - 1)$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n + 1$ 或 $a_n = 3(n - 1)$ 6 分

(2) $\because a_1 > 0$, $\therefore a_n = n + 1$,

$2b_1 + 2^2b_2 + 2^3b_3 + \cdots + 2^nb_n = n + 1$ ①,

$$2b_1 + 2^2b_2 + 2^3b_3 + \cdots + 2^{n-1}b_{n-1} = n(n \geq 2) \text{ ②},$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得: } b_n = \frac{1}{2^n}, n \geq 2, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$n=1$ 时, $b_1=1$ 不满足上式,

$$\text{所以 } b_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ \frac{1}{2^n}, n \geq 2 \end{cases}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } n \geq 2 \text{ 时, } T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{\frac{1}{2^2}(1 - \frac{1}{2^{n-1}})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

当 $n=1$ 时, $T_1=1$ 满足上式,

$$\text{所以 } T_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19.【解析】(1) 设 BD 交 AC 于点 O , 连接 A_1O , 因为底面 $ABCD$ 为菱形,

所以 $AC \perp BD$, 且 O 为 AC 及 BD 的中点

因为 $AC \perp BA_1, BD \cap BA_1 = B$

所以 $AC \perp$ 平面 A_1BO . $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

因为 $A_1O \subset$ 平面 A_1BO , 所以 $A_1O \perp AC$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

又 $AO=CO$, 所以 $A_1A=A_1C$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 因为 $A_1O \perp AC, BO \perp AC$,

所以 $\angle A_1OB$ 即为二面角 A_1-AC-B 的平面角,

因为二面角 A_1-AC-B 为直二面角, 所以 $A_1O \perp OB$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

从而 OB, OC, OA_1 两两垂直,

如图, 以 O 为原点, OB, OC, OA_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示的坐标系,

因为底面 $ABCD$ 为菱形, $A_1A=A_1C, \angle ABC = \angle A_1AC = 60^\circ$,

所以 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1AC$ 均为等边三角形,

设 $AB=2$, 则 $B(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 1, 0), A_1(0, 0, \sqrt{3}), D(-\sqrt{3}, 0, 0)$.

$$\overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{BA_1} = (-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{BD} = (-2\sqrt{3}, 0, 0), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设平面 A_1BC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

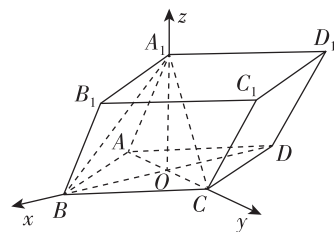
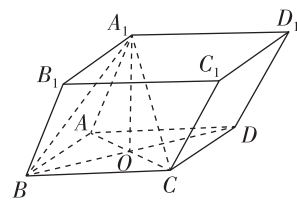
$$\text{可得 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\sqrt{3}x + y = 0 \\ -\sqrt{3}x + \sqrt{3}z = 0 \end{cases},$$

不妨令 $x=1$, 则 $y=\sqrt{3}, z=1$, 可取 $\mathbf{n} = (1, \sqrt{3}, 1)$, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

设直线 BD 与平面 A_1BC 所成角为 θ

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{|-2\sqrt{3}|}{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

所以直线 BD 与平面 A_1BC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$



20.【解析】(1) 抛物线 $C_2: y^2 = 8x$ 的准线为 $x = -2$,

椭圆左顶点 A 在抛物线 $C_2: y^2 = 8x$ 的准线上, 所以 $A(-2, 0), a=2$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

椭圆 C_1 的焦距为 2, 所以 $2c=2$, 所以 $c=1$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$,

所以椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2) $|MF|^2 + |NF|^2$ 存在最小值为 36, 理由如下:

设 $M(4, m), N(4, n), D(x_0, y_0)$, 直线 $x=4$ 与 x 轴交点为 $P(4, 0)$,

易知 $m \neq 0, n \neq 0$,

直线 AM 的方程为 $y = \frac{m}{6}(x+2)$, 联立得 $\begin{cases} y = \frac{m}{6}(x+2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 消去 y ,

整理得 $(27+m^2)x^2 + 4m^2x + (4m^2-108) = 0$,

$\Delta = (4m^2)^2 - 4(27+m^2)(4m^2-108) > 0$ 成立,

由 $-2x_0 = \frac{4m^2-108}{27+m^2}$, 解得 $x_0 = \frac{54-2m^2}{27+m^2}$, 6 分

所以 $y_0 = \frac{m}{6}(x_0+2) = \frac{18m}{27+m^2}$, 所以 $D(\frac{54-2m^2}{27+m^2}, \frac{18m}{27+m^2})$, 7 分

当 $|m|=3$ 时, $\frac{54-2m^2}{27+m^2} = 1$, 即 $DE \perp x$ 轴,

由椭圆的对称性可得 $|n|=3$, 即 $|MP|=|FP|=|NP|=3$,

又因为 $|PF|=3, \angle MPF = \angle NPF = 90^\circ$, 所以 $\angle MFP = \angle NFP = 45^\circ$,

$\angle MFN = 90^\circ$, 此时 $|MF|^2 + |NF|^2 = |MN|^2 = 36$, 8 分

当 $|m| \neq 3$ 时, $|n| \neq 3$,

直线 FD 的斜率 $k_{FD} = \frac{\frac{18m}{27+m^2} - 0}{\frac{54-2m^2}{27+m^2} - 1} = \frac{6m}{9-m^2}$,

同理 $k_{FE} = \frac{6n}{9-n^2}$,

因为 DE 过点 F , 所以 $\frac{6m}{9-m^2} = \frac{6n}{9-n^2}$, 所以 $mn = -9$, 9 分

$\overrightarrow{FM} = (3, m), \overrightarrow{FN} = (3, n)$,

$\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 9 + mn = 0$, 所以 $\angle MFN = 90^\circ$, 10 分

$|MF|^2 + |NF|^2 = |MN|^2, |m| \neq 3$ 且 $|n| \neq 3$,

所以 $|MN| = |MP| + |NP| = |m| + |n| > 2\sqrt{|mn|} = 2\sqrt{9} = 6$, 11 分

$|MF|^2 + |NF|^2 = |MN|^2 > 36$,

综上所述, $|MF|^2 + |NF|^2$ 的最小值为 36. 12 分

21. 【解析】(1) 设每销售一件网络会议产品的销售利润为 ξ 元, 则 ξ 的所有可能取值为 150, 350, 550,

三类产品的频率分别为 0.15, 0.45, 0.4, 1 分

所以 $P(\xi=150) = 0.15, P(\xi=350) = 0.45, P(\xi=550) = 0.4$,

所以随机变量 ξ 的分布列为:

ξ	150	350	550
P	0.15	0.45	0.4

..... 3 分

所以 $E(\xi) = 150 \times 0.15 + 350 \times 0.45 + 550 \times 0.4 = 400$,

故每销售一件网络会议产品的销售利润估计值为 400 元. 5 分

(2) (i) 由 $y = a \cdot x^b$ 得, $\ln y = \ln(a \cdot x^b) = \ln a + b \ln x$,

令 $u = \ln x, v = \ln y, c = \ln a$, 则 $v = c + bu$,

由表中数据可得, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})^2} = \frac{0.41}{1.64} = 0.25$, 7 分

$$\text{则 } \hat{c} = \bar{v} - \hat{b}\bar{u} = \frac{24.87}{5} - 0.25 \times \frac{16.30}{5} = 4.159,$$

所以, $\hat{v} = 4.159 + 0.25u$, 8 分

$$\text{即 } \ln \hat{y} = 4.159 + 0.25 \ln x = \ln(e^{4.159} \cdot x^{\frac{1}{4}}),$$

因为 $e^{4.159} = 64$, 所以 $\hat{y} = 64x^{\frac{1}{4}}$,

故所求的回归方程为 $y = 64x^{\frac{1}{4}}$; 9 分

(ii) 设月收益为 z 万元, 则 $z = E(\xi) \cdot y - x = 256x^{\frac{1}{4}} - x$,

设 $t = x^{\frac{1}{4}}, f(t) = 256t - t^4$, 则 $f'(t) = 256 - 4t^3 = 4(64 - t^3)$,

当 $t \in (0, 4)$ 时, $f'(t) > 0$, $f(t)$ 在 $(0, 4)$ 单调递增,

当 $t \in (4, +\infty)$ 时, $f'(t) < 0$, $f(t)$ 在 $(4, +\infty)$ 单调递减,

所以当 $t = 4$, 即 $x = 256$ 时, z 有最大值为 768,

即该公司投入 256 万元广告费, 能使得该产品每月的收益达到最大 768 万元. 12 分

22. 【解析】(1) $f'(x) = 2e^{2x} - \frac{1}{x} - a$, 1 分

$f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 的切线斜率为 $f'(\frac{1}{2}) = 2e - 2 - a = 0$, 解得 $a = 2e - 2$, 3 分

(2) 由 (1) 知, $f(x) = e^{2x} - \ln 2x - (2e - 2)x$,

由 $f(x) \geq kx + 1$ 对一切 $x > 0$ 恒成立, 故有 $f(\frac{1}{2}) \geq \frac{k}{2} + 1$,

又 $f(\frac{1}{2}) = 1$, 故 $\frac{k}{2} + 1 \leq 1$, 从而 $k \leq 0$, 5 分

由 $f(x) = e^{2x} - \ln 2x - (2e - 2)x$, 则 $f'(x) = 2e^{2x} - \frac{1}{x} - 2e + 2$, $f''(x) = 4e^{2x} + \frac{1}{x^2}$,

由 $f''(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒大于零, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 7 分

又 $f'(\frac{1}{2}) = 0$, 故 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; $x > \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 9 分

故 $f(x)$ 有最小值 $f(\frac{1}{2}) = 1$, 10 分

而当 $k \leq 0$ 时, $\frac{k}{2}x + 1 \leq 1$ 恒成立, 即 $f(x) \geq \frac{k}{2}x + 1$ 恒成立, 11 分

故实数 k 的取值范围为 $(-\infty, 0]$ 12 分