

2021 届普通高中教育教学质量监测考试

全国卷(新高考) 数学

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分.
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分 150 分,测试时间 120 分钟.
5. 考试范围:高考全部内容.

第 I 卷

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设 i 是虚数单位,若复数 $z = \frac{2}{1+i} + 2i$, 则 $|z| =$
 A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2
2. 设集合 $A = \{x | -2 < x < 4\}$, $B = \{x | x^2 + x - 6 < 0\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{x | -2 < x < 2\}$ B. $\{x | -3 < x < 2\}$
 C. $\{x | -2 < x < 3\}$ D. $\{x | 2 < x < 4\}$
3. 曲线 $y = \frac{ax}{x-1}$ 在点 $(2, 2a)$ 处的切线方程为 $3x - y + b = 0$, 则
 A. $a = 3, b = -12$ B. $a = -3, b = 0$ C. $a = 3, b = 0$ D. $a = -3, b = -12$
4. 意大利数学家斐波那契(约 1170~1250),以兔子繁殖为例,引入“兔子数列”:即 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233... 在实际生活中,很多花朵(如梅花,飞燕草,万寿菊等)的瓣数恰是斐波那契数列中的数,斐波那契数列在现代物理及化学等领域也有着广泛的应用.已知斐波那契数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in \mathbb{N}^+)$, 若 $1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + \dots + a_{25} = a_k$, 则 $k =$
 A. 2020 B. 2021 C. 59 D. 60
5. 已知 A, B 为单位圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上的两点,且满足 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$, 点 P 为圆 O 上一动点,则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是
 A. $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ B. $[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}]$
 C. $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ D. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的右焦点为 F , O 为坐标原点,以 F 为圆心, OF 为半径的圆与双曲线 C 的一条渐近线相交于 O, A 两点,若 $\triangle OAF$ 的面积等于 2, 则双曲线 C 的离心率为
 A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\sqrt{5}$
7. 如图是隋唐天坛,古叫圜丘,它位于唐长安城明德门遗址东约 950 米,即今西安市雁塔区陕西师范大学以南.天坛初建于隋而废弃于唐末,比北京明清天坛早 1000 多年,是隋唐王朝近三百年里的皇家祭天之处.某数学兴趣小组为了测得天坛的直径,在天坛外围测得 $AB = 60$ 米, $BC = 60$ 米, $CD = 40$ 米, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCD = 120^\circ$, 据此可以估计天坛的最下面一层的直径 AD 大约为
 (结果精确到 1 米)(参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{7} \approx 2.646$)
 A. 39 米 B. 43 米 C. 49 米 D. 53 米



8. 已知关于 x 的方程 $k \cdot e^x - e^x - \sqrt{|x|} = 0$ 恰好有 3 个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围为

- A. $(1, \frac{\sqrt{2e}}{2} + 1)$ B. $(1, \frac{\sqrt{2e}}{2e} + \frac{3}{4})$
C. $(1, \frac{1}{e} + 1)$ D. $(1, \frac{\sqrt{2e}}{2e} + 1)$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分.

9. 设函数 $f(x) = 2^{x-1} + 2^{1-x}$, 则

- A. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 B. $f(x)$ 的最小值是 2
C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称 D. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称

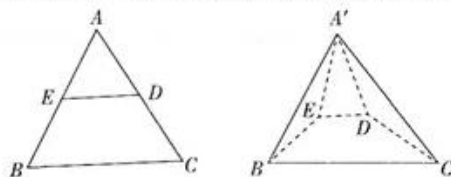
10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_{n+1} = S_n + n - 1$, 则下列结论正确的是

- A. 若 $a_1 = 1$, 则数列 $\{S_n + n\}$ 为等比数列 B. 若 $a_1 = 1$, 则数列 $\{a_n + 1\}$ 为等比数列
C. 若 $a_1 = -1$ 则数列 $\{S_n + n\}$ 为等差数列 D. 若 $a_1 = -1$ 则数列 $\{a_n + 1\}$ 为等差数列

11. 甲、乙、丙三位同学进行乒乓球比赛, 设每场比赛双方获胜的概率都为 $\frac{1}{2}$, 约定赛制如下: 累计负两场者被淘汰; 比赛前抽签决定首先比赛的两人, 另一人轮空; 每场比赛的胜者与轮空者进行下一场比赛, 负者下一场轮空, 直至有一人被淘汰; 当一人被淘汰后, 剩余的两人继续比赛, 直至其中一人被淘汰, 另一人最终获胜, 比赛结束. 经抽签, 甲、乙首先比赛, 丙轮空. 则下列说法正确的是

- A. 最少进行 3 场比赛 B. 第三场比赛甲轮空的概率为 $\frac{1}{4}$
C. 乙最终获胜的概率为 $\frac{9}{32}$ D. 丙最终获胜的概率 $\frac{7}{16}$

12. 如图, 在等边三角形 ABC 中, $AB=2$, 点 D, E 分别是 AC, AB 的中点, 以 DE 为折痕把 $\triangle ADE$ 折起, 使点 A 到达点 A' 的位置 ($A' \notin$ 平面 $BCDE$), 则在 $\triangle ADE$ 翻转过程中, 下列说法正确的是



- A. 四棱锥 $A'-BCDE$ 的体积的最大值是 $\frac{9}{8}$
B. 当二面角 $A'-DE-B$ 为直二面角时, $|A'B| = \frac{\sqrt{10}}{2}$
C. 一定存在某个位置, 使平面 $A'BC \perp$ 平面 $BCDE$
D. 平面 $A'ED \perp$ 平面 $BCDE$ 时, 四棱锥 $A'-BCDE$ 外接球的表面积为 $\frac{13\pi}{3}$

第 II 卷

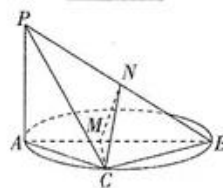
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0 \\ (\frac{1}{2})^x, & x \leq 0 \end{cases}$, 且 $f(a) + f(-1) = 0$, 则实数 $a =$ _____.

14. 已知圆 $E: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 的圆心与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 重合, 过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 与圆 E 交于 M, N 两点 (其中 A 点和 M 点在第一象限), 则 $|AM| \cdot |BN| =$ _____.

15. 如图, 点 C 在以 AB 为直径的圆周上运动 (C 点与 A, B 不重合), P 是平面 ABC 外一点, 且 $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = AB = 2$, 过 C 点分别作直线 AB, PB 的垂线, 垂足分别为 M, N , 则三棱锥 $B-CMN$ 体积的最大值为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = \sin 2x \cdot |\sin x|$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 _____; $f(x)$ 的最大值为 _____ (本题第一空 2 分, 第二空 3 分).



四、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在① $\cos B = -\frac{2}{3}$; ② $a = 7$; ③ $b = 3$, 这三个条件中任选两个, 补充在下面问题中, 使问题中的三角形存在, 并求 $\triangle ABC$ 的面积.

问题: 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 是角 A, B, C 所对的边, 已知 $\sin B - \sin C = \sin(A - C)$, 补充的条件 _____ 和 _____.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_2 = 3$, 且 $a_3^2 = 2a_7$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

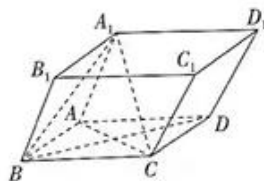
(2) 若 $a_1 > 0$, 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $2b_1 + 2^2b_2 + 2^3b_3 + \cdots + 2^nb_n = a_n, n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

19. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC = \angle A_1AC = 60^\circ, AC \perp BA_1$.

(1) 证明: $A_1A = A_1C$;

(2) 若二面角 A_1-AC-B 为直二面角, 求直线 BD 与平面 A_1BC 所成角的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)

设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点 A 在抛物线 $C_2: y^2 = 8x$ 的准线上, F 是椭圆 C_1 的右焦点, 且椭圆 C_1 的焦距为 2, 过点 F 且斜率不为 0 的直线 l 与椭圆 C_1 交于 D, E 两点, 直线 AD 和 AE 分别与直线 $x = 4$ 交于点 M, N .

(1) 求椭圆 C_1 的方程;

(2) $|MF|^2 + |NF|^2$ 是否存在最小值, 若存在, 求出最小值; 若不存在, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

2020 年春节期间,全国人民都在抗击“新型冠状病毒肺炎”的斗争中,在党和政府的正确领导下,在全国人民的共同努力下,中国的抗疫取得了很大的成功,基本阻断了本土病例的传播,但是全球疫情持续恶化,中国还是要坚持常态化的防控措施,为了应对常态化疫情防控,好多会议选择在网上线上召开,某大型网络公司为了给用户提供更好的在线视频会议服务,从使用该平台的用户中选择了 100 名用户进行调查研究,统计结果如下:

会议规模	小型会议	中型会议	大型会议
频数	15	45	40

该网络公司每销售一件“小型会议”,“中型会议”,“大型会议”产品,可以获得的销售利润分别为 150,350,550(单位:元).

- (1)根据统计结果估计该网络公司每销售一件网络会议产品获得的平均销售利润;
 (2)该公司为了解月广告费用 x (单位:万元)对月销售量 y (单位:百件)的影响,对近 5 个月的月广告费用 x_i 和月销售量 y_i ($i=1,2,3,4,5$) 数据做了初步处理,发现 $y=a \cdot x^b$ 可以作为月销售量 y (百件)关于月广告费用 x (万元)的回归方程,同时得到如下一些统计量的值.

$\sum_{i=1}^5 u_i$	$\sum_{i=1}^5 v_i$	$\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})$	$\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})^2$
16.30	24.87	0.41	1.64

表中 $u_i = \ln x_i, v_i = \ln y_i, \bar{u} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 u_i, \bar{v} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 v_i$.

(i) 建立 y 关于 x 的回归方程;(取 $e^{4.159} = 64$)

表中 $u_i = \ln x_i, v_i = \ln y_i, \bar{u} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 u_i, \bar{v} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 v_i$.

(i) 建立 y 关于 x 的回归方程;(取 $e^{4.159} = 64$)

(ii) 结合(1)的结果及所求的回归方程估计该公司应投入多少广告费,才能使得该产品月收益达到最大?

(收益 = 销售利润 - 广告费用)

参考公式:对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$,其回归直线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距的最小二乘

估计分别为 $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta} \bar{u}$.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^{2x} - \ln 2x - ax$ ($a \in \mathbf{R}$) 在点 $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ 处的切线与 y 轴垂直.

- (1)求实数 a 的值;
 (2) $f(x) \geq kx + 1$ 对一切 $x > 0$ 恒成立,求实数 k 的取值范围.