绝密★启用前

2021 届浙江省水球高考命题研究组方向性测试Ⅲ

数　　学

姓名________________　　　　　　　　准考证号____________________________

本试题卷分选择题和非选择题两部分。全卷共 4 页，选择题部分 1 至 2 页；非选择题部分 3 至 4 页。满分 150 分，考试时间 120 分钟。

考生注意：

1．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的位置上。

2．答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范作答，在本试题卷上的作答一律无效。

参考公式：

若事件 A,B 互斥，则

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

若事件 A,B 相互独立，则

$P(AB)=P(A)P(B)$

若事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，则 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$

台体的体积公式

$V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h$

其中 S_1,S_2 分别表示台体的上、下底面积，h 表示台体的高

柱体的体积公式

$V=Sh$

其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高

椎体的体积公式

$V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

选择题部分(共 40 分)

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-2x\le 0\}$，$B=\{x\,|\,2x-3\in A\}$，则 $A\cap B=$

A. $[0,\frac{3}{2}]$　　B. $[\frac{3}{2},2]$　　C. $[0,1]$　　D. $[1,2]$

2. 函数 $y=2^{3x+1}$ 在 $x=0$ 处的导数是

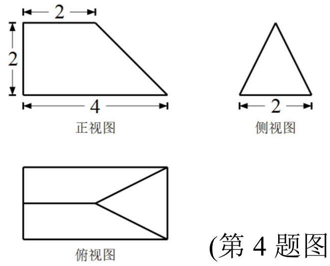
A. $6\ln 2$　　B. $2\ln 2$　　C. 6　　D. 2

3. 若二项式 $(x+\frac{1}{\sqrt{x}})^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的展开式中第 5 项与第 6 项的系数相同，则其常数项是

A. 9　　B. 36　　C. 84　　D. 126

4. 某几何体的三视图(单位:cm)如图所示,则该几何体的体积(单位:cm^3)是

A. 4　　B. 6　　C. $\dfrac{16}{3}$　　D. $\dfrac{20}{3}$



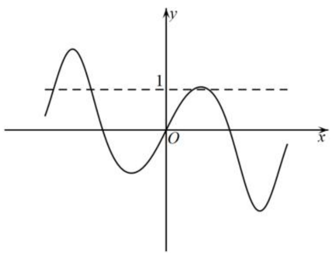
(第 4 题图)

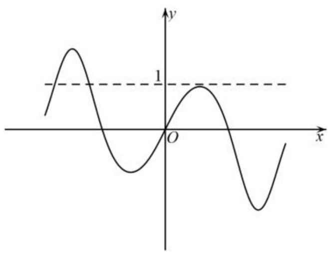
5. 已知 $A(x_0, y_0)$ 是函数 $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}(a>b>0)$ 的图像上一点,设 $B(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$,则 $|AB|+y_0$ 的最大值

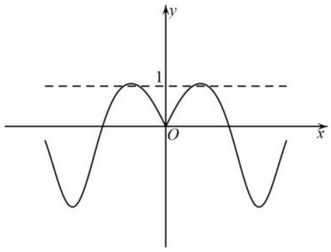
A. 与 a 有关,且与 b 有关　　B. 与 a 有关,但与 b 无关

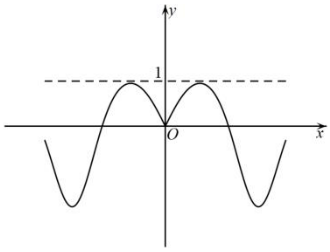
C. 与 a 无关,但与 b 有关　　D. 与 a 无关,且与 b 无关

6. 函数 $y=2\sin(x\cos x)$ 的图像可能是

A. 

B. 

C. 

D. 

7. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$,则“ $|a-b|>|b|$ ”是“ $\dfrac{b}{a}<\dfrac{1}{2}$ ”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b}(0<\lambda<1)$,则

A. 当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 时, $|\boldsymbol{c}|$ 有最大值　　B. 当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 时, $|\boldsymbol{c}|$ 有最小值

C. 当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$ 时, $|\boldsymbol{c}|$ 有最大值　　D. 当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$ 时, $|\boldsymbol{c}|$ 有最小值

9. 已知在圆锥 SO 中, P 为母线 SC 的中点, AB 为圆 O 的直径(点 A,B 不与 C 重合),记二面角 $P-AC-B$, $P-BC-A$, $P-AB-C$ 的大小分别为 α,β,γ ,则

A. 若 $\alpha>\gamma$,则 $\alpha>\beta$　　B. 若 $\alpha>\gamma$,则 $\alpha<\beta$

C. 若 $\alpha<\gamma$,则 $\beta>\gamma$　　D. 若 $\alpha<\gamma$,则 $\beta<\gamma$

10. 设 a,b 是常数,若函数 $f(x)=(x-a)\ln(bx^2-2bx+c)$ 不可能有两个零点,则

A. $a>0$　　B. $a<0$

C. $b>0$　　D. $b<0$

非选择题部分(共 110 分)

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11. 我国清代数学家李锐在《开方说》中讨论了 n 次实系数方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0(a_n\neq 0)$ 的正根个数与系数符号间的关系：设方程的正根个数为 u，在忽略系数为 0 的项时相邻两项的系数变号(即符号相反)总次数为 v，则 $v-u\in\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{N}\}$. 对于方程 $f:(3x+2)(x-1)(x-2)=0$，$u(f)=$______，$v(f)=$______，$v(f)-u(f)=$______.

12. 复数 z_1，z_2 满足 $\begin{cases}z_1+z_2=1+\mathrm{i}\\ z_1^2-z_2^2=1-\mathrm{i}\end{cases}$ (i 为虚数单位)，则 $z_1-z_2=$______，$|z_2|=$______.

13. 已知在$\triangle ABC$ 中，$AB=8$，$AC=7$，$BC=5$，D 是线段 AB 上一点，且满足 $\angle BDC=\dfrac{\pi}{4}$，则 $B=$______，$CD=$______.

14. 已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\leq 0\\ x+3y-2\leq 0\\ x-a\geq 0\end{cases}$，若 $z=ax+y$ 的最小值是 -2，则 $a=$______.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，前 n 项积为 T_n，若 $a_1>1$，$S_n=T_n(n\in\mathbf{N}^*)$，则 a_3 的最大值是______.

16. 盒子中装有 1 个黑球和 2 个白球，小水每次从盒子中随机摸出 1 个球，并换入 1 个黑球，则第二次摸球时摸出黑球的概率是______，设三次摸换球后盒子中所剩黑球的个数为 ξ，则 $E(\xi)=$______.

17. 设直线 l 与双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右支交于 P,Q 两点，O 是坐标原点，$\triangle OPQ$ 是等腰直角三角形. 若这样的直线 l 恰有两条，则双曲线离心率的取值范围是______.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. (本题满分 14 分) 已知函数 $f(x)=\cos^2x+\sqrt{3}\sin x\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$.

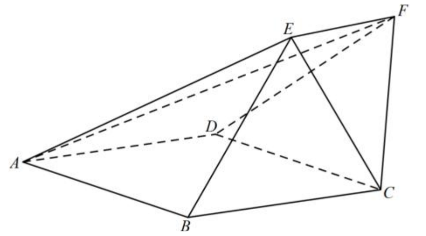
(Ⅰ) 求 $f(x)$ 的对称轴方程；

(Ⅱ) 求 $\cos\varphi$ 的取值范围，使得对任意 $x\in\mathbf{R}$，均有 $f(x+\varphi)+2f(x)\leq 4$ 成立.

19.（本题满分 15 分）如图，在七面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是菱形，其中 $\angle BAD = 60°$，$\triangle BCE$，$\triangle CEF$，$\triangle CDF$ 是等边三角形，且 $AB \perp BE$．

（Ⅰ）证明：$AB \perp EF$；

（Ⅱ）求直线 AF 与平面 CDF 所成角的正弦值．



(第 19 题图)

20.（本题满分 15 分）已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $2S_n = a_n^2 + a_n (n \in \mathbf{N}^*)$．

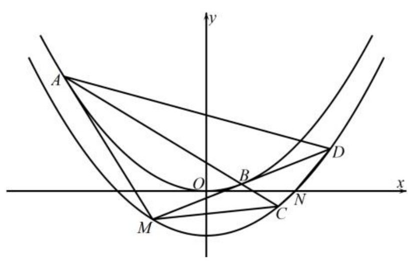
（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）记 $b_n = 2^{a_n} - 1$，证明：当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时，$2n+1 \le \dfrac{b_2}{b_1} + \dfrac{b_3}{b_2} + \cdots + \dfrac{b_{n+1}}{b_n} < 2n+2$．

21.（本题满分 15 分）如图，设抛物线 $E_1: x^2 = 4y$，$E_2: x^2 = 4y + 4$．点 M 是第三象限内抛物线 E_2 上的动点，N 是抛物线 E_2 与 x 轴正半轴的交点．过点 M 作抛物线 E_1 的两条切线，记切点分别为 A, B，射线 AB, MB 分别与抛物线 E_2 交于点 C, D，且点 C 在第四象限内．

（Ⅰ）证明：$|BD| = |BM|$；

（Ⅱ）求五边形 $AMCND$ 面积的最大值．



(第 21 题图)

22.（本题满分 15 分）已知函数 $f(x) = \ln x - \sqrt{ax-1} + 1$，$a > 0$．

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）证明：$\dfrac{\ln 1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{\ln 2}{4\sqrt{4}} + \cdots + \dfrac{\ln n}{(n+2)\sqrt{n+2}} < 2 + \sqrt{2} (n \in \mathbf{N}^*)$．

命题&审核：水球高考命题研究组