

石家庄市 2021 届高中毕业班教学质量检测(一)

数 学

(时间 120 分钟, 满分 150 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题的答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上的对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。
3. 在答题卡上与题号相对应的答题区域内答题, 写在试卷、草稿纸上或答题卡非题号对应的答题区域的答案一律无效。不得用规定以外的笔和纸答题, 不得在答题卡上做任何标记。

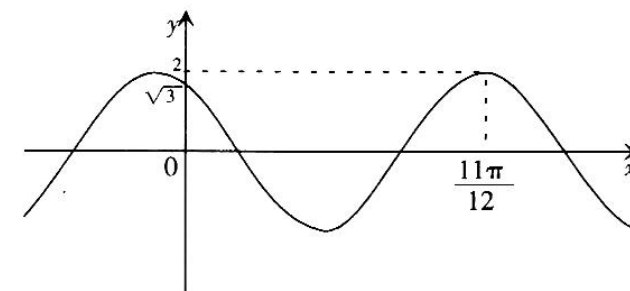
一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 A, B, U 满足: $A \subsetneq B \subsetneq U$, 则 $U =$
A. $A \cup \complement_U B$ B. $B \cup \complement_U A$ C. $A \cap \complement_U B$ D. $B \cap \complement_U A$
2. 设向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (m, -1)$, 且 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$, 则实数 $m =$
A. -3 B. $\frac{3}{2}$ C. -2 D. $-\frac{3}{2}$
3. 甲、乙、丙三人从红、黄、蓝三种颜色的帽子中各选一顶戴在头上, 每人帽子的颜色互不相同, 乙比戴蓝帽的人个头高, 丙和戴红帽的人身高不同, 戴红帽的人比甲个头小, 则甲、乙、丙所戴帽子的颜色分别为
A. 红、黄、蓝 B. 黄、红、蓝 C. 蓝、红、黄 D. 蓝、黄、红
4. $a > 2$ 是 $a + \frac{2}{a} > 3$ 的
A. 充要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 2021 年是巩固脱贫攻坚成果的重要一年, 某县为响应国家政策, 选派了 6 名工作人员到 A、B、C 三个村调研脱贫后的产业规划, 每个村至少去 1 人, 不同的安排方式共有
A. 630 种 B. 600 种 C. 540 种 D. 480 种
6. 已知菱形 $ABCD$ 边长为 2, $\angle ABC = 60^\circ$, 沿对角线 AC 折叠成三棱锥 $B'-ACD$, 使得二面角 $B'-AC-D$ 为 60° , 设 E 为 $B'C$ 的中点, F 为三棱锥 $B'-ACD$ 表面上动点, 且总满足 $AC \perp EF$, 则点 F 轨迹的长度为
A. $2\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
7. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n \sin \frac{n\pi}{3}$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2021} =$
A. $1011\sqrt{3}$ B. $-\frac{5}{2}\sqrt{3}$ C. $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ D. $-1011\sqrt{3}$

8. 若 $f(x)$ 图象上存在两点 A, B 关于原点对称, 则点对 $[A, B]$ 称为函数 $f(x)$ 的“友情点对” (点对 $[A, B]$ 与 $[B, A]$ 视为同一个“友情点对”). 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{e^x}, & x \geq 0 \\ ax^2, & x < 0 \end{cases}$ 恰有两个“友情点对”, 则实数 a 的取值范围是
A. $(-\frac{1}{e}, 0)$ B. $(0, \frac{1}{e})$ C. $(0, 1)$ D. $(-1, 0)$

二、选择题: 本小题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 关于 $(1-2x)^{2021} = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_{2021} \cdot x^{2021} (x \in \mathbf{R})$, 则
A. $a_0 = 1$ B. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2021} = 3^{2021}$
C. $a_3 = 8C_{2021}^3$ D. $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2021} = 1 - 3^{2021}$
10. 设 z 为复数, 则下列命题中正确的是
A. $|z|^2 = zz$ B. $z^2 = |z|^2$
C. 若 $|z| = 1$, 则 $|z + i|$ 的最大值为 2 D. 若 $|z - 1| = 1$, 则 $0 \leq |z| \leq 2$
11. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$ 的图象如图, 把函数 $f(x)$ 的图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 下列结论正确的是
A. $\varphi = \frac{\pi}{3}$
B. 函数 $g(x)$ 的最小正周期为 π
C. 函数 $g(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{12}]$ 上单调递增
D. 函数 $g(x)$ 关于点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 中心对称

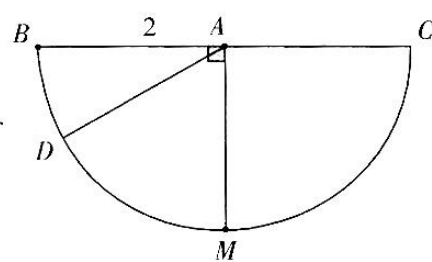


12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 长轴长为 4, 点 $P(\sqrt{2}, 1)$ 在椭圆内部, 点 Q 在椭圆上, 则以下说法正确的是
A. 离心率的取值范围为 $(0, \frac{1}{2})$
B. 当离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时, $|QF_1| + |QP|$ 的最大值为 $4 + \frac{\sqrt{6}}{2}$
C. 存在点 Q 使得 $\overrightarrow{QF_1} \cdot \overrightarrow{QF_2} = 0$
D. $\frac{1}{|QF_1|} + \frac{1}{|QF_2|}$ 的最小值为 1

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(10, \sigma^2)$, 若 $P(X < 8) = 0.23$, 则 $P(X < 12) =$ _____.
 14. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 F 且被抛物线截得的弦长为 2 的直线有且仅有两条, 写出一个满足条件的抛物线的方程 _____, 此时该弦中点到 y 轴的距离为 _____.
- (本题第一空得 2 分, 第二空得 3 分.)

15. 如图所示,一个圆锥的侧面展开图为以 A 为圆心,半径长为 2 的半圆,点 D, M 在 $\widehat{BC}$ 上,且 $\widehat{BD}$ 的长度为 $\frac{\pi}{3}$, $\widehat{BM}$ 的长度为 π ,则在该圆锥中,点 M 到平面 ABD 的距离为_____.
16. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 其导函数为 $f'(x)$, 满足 $f'(x) > 2, f(2) = 4$, 则不等式 $xf(x-1) > 2x^2 - 2x$ 的解集为_____.



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 a_1, a_2, a_5 成等比数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $b_n = 2^{n-1}$, 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

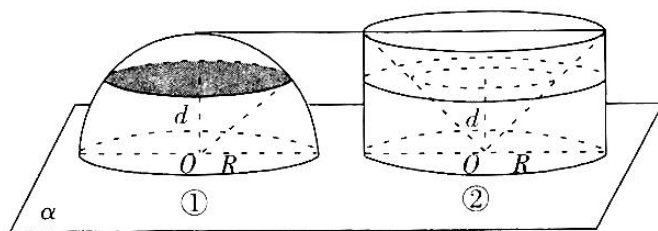
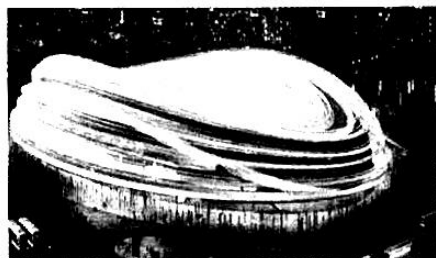
在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 满足 $\sqrt{3}c = b(\sin A + \sqrt{3}\cos A)$.

(I) 求角 B 的大小;

(II) 若 $a+c=2$, 求 b 的取值范围.

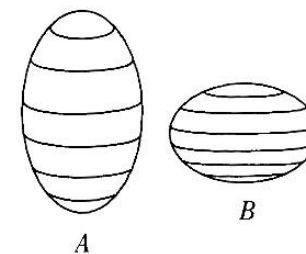
19. (本小题满分 12 分)

2022 年北京冬奥会标志性场馆——国家速滑馆的设计理念来源于一个冰和速度结合的创意, 沿着外墙面由低到高盘旋而成的“冰丝带”, 就像速度滑冰运动员高速滑动时留下的一圈圈风驰电掣的轨迹, 冰上划痕成丝带, 22 条“冰丝带”又象征北京 2022 年冬奥会. 其中“冰丝带”呈现出圆形平面、椭圆形平面、马鞍形双曲面三种造型, 这种造型富有动感, 体现了冰上运动的速度和激情. 这三种造型取自于球、椭球、圆柱等空间几何体, 其设计参数包括曲率、挠率、面积、体积等. 对几何图形的面积、体积计算方法的研究在中国数学史上有过辉煌的成就, 如《九章算术》中记录了数学家刘徽提出利用牟合方盖的体积来推导球的体积公式, 但由于不能计算牟合方盖的体积并没有得出球的体积计算公式. 直到 200 年以后数学家祖冲之、祖暅父子在《缀术》提出祖暅原理: “幂势既同, 则积不容异”, 才利用牟合方盖的体积推导出球的体积公式. 原理的意思是: 两个等高的几何体若在所有等高处的水平截面的面积相等, 则这两个几何体的体积相等.



(I) 利用祖暅原理推导半径为 R 的球的体积公式时, 可以构造如图②所示的几何体 M , 几何体 M 的底面半径和高都为 R , 其底面和半球体的底面同在平面 α 内. 设与平面 α 平行且距离为 d 的平面 β 截两个几何体得到两个截面, 请在图②中用阴影画出与图①中阴影截面面积相等的图形并给出证明;

(II) 现将椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 所围成的椭圆面分别绕其长轴、短轴旋转一周后得两个不同的椭球 A, B (如图), 类比(I)中的方法, 探究椭球 A 的体积公式, 并写出椭球 A, B 的体积之比.



20. (本小题满分 12 分)

“T2 钻石联赛”是世界乒联推出一种新型乒乓球赛事, 其赛制如下: 采用七局四胜制, 比赛过程中可能出现两种模式: “常规模式”和“FAST5 模式”. 在前 24 分钟内进行的常规模式中, 每小局比赛均为 11 分制, 率先拿满 11 分的选手赢得该局; 如果两名球员在 24 分钟内都没有人赢得 4 局比赛, 那么将进入“FAST5”模式, “FAST5”模式为 5 分制的小局比赛, 率先拿满 5 分的选手赢得该局. 24 分钟计时后开始的所有小局均采用“FAST5”模式. 某位选手率先在 7 局比赛中拿下 4 局, 比赛结束. 现有甲、乙两位选手进行比赛, 经统计分析甲、乙之间以往比赛数据发现, 24 分钟内甲、乙可以完整打满 2 局或 3 局, 且在 11 分制比赛中, 每局甲获胜的概率为 $\frac{2}{3}$, 乙获胜的概率为 $\frac{1}{3}$; 在“FAST5”模式, 每局

比赛双方获胜的概率都为 $\frac{1}{2}$, 每局比赛结果相互独立.

(I) 求 4 局比赛决出胜负的概率;

(II) 设在 24 分钟内, 甲、乙比赛了 3 局, 比赛结束时, 甲乙总共进行的局数记为 X , 求 X 的分布列及数学期望.

21. (本小题满分 12 分)

已知坐标原点为 O , 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦点到其渐近线的距离为 $\sqrt{2}$, 离心率为 $\sqrt{3}$.

(I) 求双曲线的方程;

(II) 设过双曲线上动点 $P(x_0, y_0)$ 的直线 $x_0x - \frac{y_0y}{2} = 1$ 分别交双曲线的两条渐近线于 A, B 两点, 求 $\triangle AOB$ 的外心 M 的轨迹方程.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{-x \sin x}{\cos x}$, 且方程 $f(x) - a = 0$ 在 $[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}]$ 上有解.

(I) 求实数 a 的取值范围;

(II) 设函数 $g(x) = (a+1) \sin x - x \cos x (x \in [\frac{\pi}{2}, \pi])$ 的最大值为 $G(a)$, 求函数 $G(a)$ 的最小值;

数学答题卡

注意事项

1. 答题前,考生先将本人的姓名、准考证号填写清楚,并认真核准条形码上的准考证号、姓名及科目,在规定的位贴条形码。
2. 客观题及主观题答题区域必须使用 2B 铅笔填涂;主观题必须使用 0.5 毫米的黑色签字笔书写,要求字体工整、笔迹清楚。
3. 请严格按照题号顺序在各题相应的答题区内作答,超出答题区域的答案无效,在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁,不要折叠,不要破损,禁止涂划、涂改、涂擦。

请对齐此左上角
条形码粘贴区

考号

[illegible]

[0][0][0][0][0][0][0][0][0][0][0][0]

[1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1]

[2][2][2][2][2][2][2][2][2][2][2]

[3][3][3][3][3][3][3][3][3][3][3]

[4] [4] [4] [4] [4] [4] [4] [4] [4] [4] [4]

[5][5][5][5][5][5][5][5][5][5][5]

[6][6][6][6][6][6][6][6][6][6][6]

[7][7][7][7][7][7][7][7][7][7][7]

[8][8][8][8][8][8][8][8][8][8][8]

[9][9][9][9][9][9][9][9][9][9][9]

选择题填涂说明:

正确填涂:

错误填涂：☒A☒B☒C☒D

缺考标记 []

违纪标记 ☐

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

- | | | | |
|---|-----------------|---|-----------------|
| 1 | [A] [B] [C] [D] | 5 | [A] [B] [C] [D] |
| 2 | [A] [B] [C] [D] | 6 | [A] [B] [C] [D] |
| 3 | [A] [B] [C] [D] | 7 | [A] [B] [C] [D] |
| 4 | [A] [B] [C] [D] | 8 | [A] [B] [C] [D] |

二、选择题:本小题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

- 9 [A] [B] [C] [D]
10 [A] [B] [C] [D]
11 [A] [B] [C] [D]
12 [A] [B] [C] [D]

三、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. _____
14. _____
15. _____
16. _____

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

18. (本小题满分 12 分)

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

19. (本小题满分 12 分)

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

20. (本小题满分 12 分)

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

21. (本小题满分 12 分)

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

22. (本小题满分 12 分)

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效