

唐山市 2021 年普通高等学校招生统一考试第一次模拟演练

数 学

注意事项:

- 1、答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
- 2、回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
- 3、考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | x < 2\}$, 则 $A \cup \complement_{\mathbb{R}} B =$
A. $\mathbb{R}$ B. $\{x | -1 < x < 2\}$
C. $\{x | x > -1\}$ D. $\{x | x < 2\}$
2. 若虚数 z 满足 $z(1+i) = |z|^2$, 则 $z =$
A. $1-i$ B. $1+i$ C. $-1-i$ D. $-1+i$
3. 设 $a = \log_{\pi} 0.3$, $b = 0.3^{\pi}$, $c = 3^{-\pi}$, 则
A. $a > c > b$ B. $b > c > a$
C. $c > b > a$ D. $c > a > b$
4. 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ 上到直线 $3x + 4y + c = 0$ 距离为 1 的点恰有一个, 则 $c =$
A. 3 B. 8 C. 3 或 -17 D. -22 或 8
5. 记 $(x + \frac{1}{2x})^4$ 展开式的偶数项之和为 P , 则 P 的最小值为
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
6. 在 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的两位整数中任取一个, 则取到的整数十位上数字比个位上数字大的概率是
A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$
7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 $y = \sqrt{3}x$ 与 C 相交于 A, B 两点, 若四边形 AF_1BF_2 是矩形, 则双曲线 C 的离心率 $e =$
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}+1$ D. $\sqrt{3}+1$
8. 已知函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 是奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 8x^3 - \log_2(-x)$, 则满足 $f(\log_4 x) \geq 0$ 的 x 的取值范围是
A. $[\frac{1}{2}, +\infty)$ B. $[\frac{1}{2}, 2]$
C. $[\frac{1}{2}, 1] \cup [2, +\infty)$ D. $[0, \frac{1}{2}] \cup [1, 2]$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 2 分。

9. 已知 F 为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点, A, B 为 E 的两个顶点。

若 $|AF| = 5$, $|BF| = 3$, 则 E 的方程为

- A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ B. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$ D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$

10. 在下列函数中,其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称的是

- A. $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ B. $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x$
C. $f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$ D. $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是面对角线 BD 上的动点, Q 是棱 C_1D_1 的中点,过 A_1, P, Q 三点的平面与正方体的表面相交,所得截面多边形可能是

- A. 三角形 B. 四边形
C. 五边形 D. 六边形

12. 函数 $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$ 的图象(如右图)称为牛顿三叉戟曲线,则

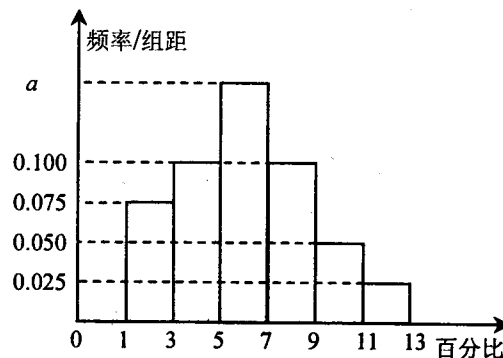
- A. $f(x)$ 的极小值点为 $\frac{1}{2}$
B. 当 $x > 0$ 时, $|f(-x)| < f(x)$
C. 过原点且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线仅有 2 条
D. 若 $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 < 0 < x_2$, 则 $x_2 - x_1$ 的最小值为 $\sqrt{3}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

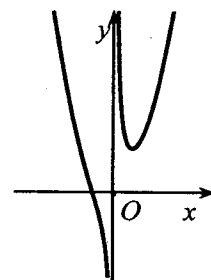
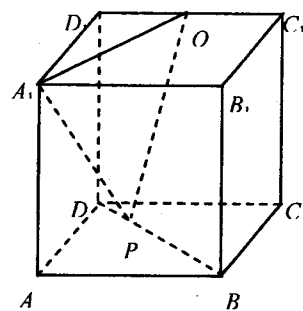
13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 项和, $a_3 = 4$, $a_2 + a_4 = 10$, 则 $S_5 =$ _____。

14. 与向量 $a = (-1, 2)$ 同向的单位向量 $b =$ _____。

15. 为了解 M 离子在小鼠体内的残留程度,进行如下试验:给 100 只小鼠服 M 离子溶液,每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同,经过一段时间后检测出残留在小鼠体内离子的百分比。根据试验数据得到如右频率分布直方图,则图中 $a =$ _____;估计 M 离子残留百分比的平均数为_____。(同组中的每个数据用该组区间的中点值代替)



16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle PAB$ 是边长为 3 的等边三角形, $AC = BC$, $\angle ACB = 90^\circ$, 二面角 $P-AB-C$ 的大小为 120° , 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为_____。



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, C=2B$.

(1) 若 $a=2, B=15^\circ$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2) 若 $a+b=\sqrt{2}c$ ，证明： $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-1, a_{n+1}+(-1)^n a_n=11-2n$ ，记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 求 S_{101} 的值；

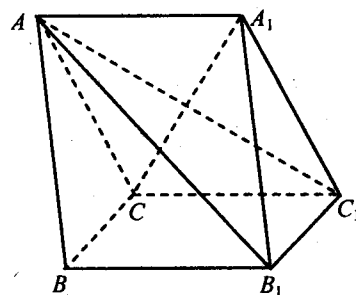
(2) 求 S_n 的最大值.

19. 如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $ACC_1A_1 \perp$ 底面 $ABC, \angle ACB=90^\circ$,

$AC=BC=CC_1=2$.

(1) 证明： $A_1C \perp AB_1$ ；

(2) 若 A_1B_1 与平面 AB_1C_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ，求四面体 ACB_1A_1 的体积.



20. (12 分)

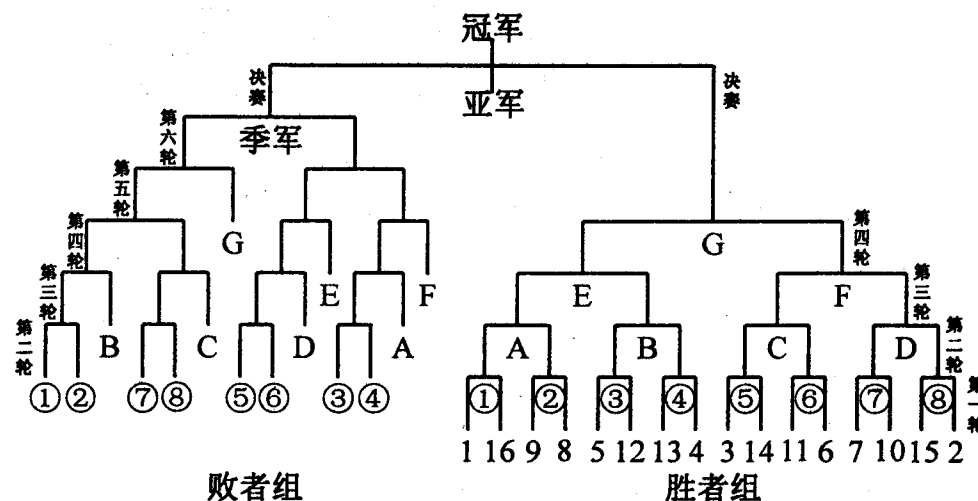
已知抛物线 $E: x^2=4y$ ，点 $P(1, -2)$ ，斜率为 $k (k>0)$ 的直线 l 过点 P ，与 E 相交于不同的点 A, B .

(1) 求 k 的取值范围；

(2) 斜率为 $-k$ 的直线 m 过点 P ，与 E 相交于不同的点 C, D ，证明：直线 AC ，直线 BD 及 y 轴围成等腰三角形.

21. (12 分)

某赛事共有 16 位选手参加，采用双败淘汰制。双败淘汰制，即一个选手在两轮比赛中失败才被淘汰出局。各选手抽签后两两交战（结果是“非胜即败”），胜者继续留在胜者组，败者则被编入败者组，在败者组一旦失败即被淘汰，最后由胜者组的获胜者和败者组的获胜者进行决赛。对阵秩序表如下图所示：



赛前通过抽签确定选手编号为 1~16，在胜者组进行第一轮比赛。每条横线代表一场比赛，横线下方的记号为失败者的编号代码，而获胜者没有代码，如败者组中的①，②，...，⑧指的是在胜者组第一轮比赛的失败者，败者组中的 A, B, ..., G 指的是在胜者组第二轮到第四轮比赛的失败者。

(1) 本赛事共计多少场比赛？一位选手最多能进行多少轮比赛？（直接写结果）

(2) 选手甲每轮比赛胜败都是等可能的，设甲共进行 X 轮比赛，求其期望 $E(X)$ ；

(3) 假设选手乙每轮比赛的胜率都为 t ，那么乙有三成把握经败者组进入决赛吗？

参考知识：正整数 $n>1$ 时， $(1-\frac{1}{n})^n < \frac{1}{e}$ ， e 为自然对数的底， $e \approx 2.71828$.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.

(1) 证明： $f(x)$ 在定义域内为减函数；

(2) 当 $a>0$ 时， $f(x) \geq \frac{2a}{x+a}$ ，求 a 的取值范围.