

唐山市 2021 年普通高等学校招生统一考试第一次模拟演练

数学参考答案

一. 选择题: CACD BBDC

二. 选择题: ACD AD ABC BD

三. 填空题: 13. 31; 14. $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$;

15. 0.150, 6.1 (第一空 2 分, 第二空 3 分) 16. 13π

四. 解答题: (若有其他解法, 请参照给分)

17. 解:

(1) 由 $C=2B$ 及 $B=15^\circ$ 得 $C=30^\circ$, 于是 $A=135^\circ$. …1 分

由正弦定理可得 $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = 2\sqrt{2} \sin B = 2\sqrt{2} \sin 15^\circ = \sqrt{3} - 1$, …4 分

因此 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. …5 分

(2) 由 $C=2B$ 得 $\sin C = \sin 2B = 2 \sin B \cos B$,

由正弦定理可得 $c = 2b \cos B$, …7 分

又 $2a \cos B = a^2 + c^2 - b^2$, 所以 $ac^2 = b(a^2 + c^2 - b^2)$,

整理可得 $(a-b)[c^2 - b(a+b)] = 0$,

将 $a+b = \sqrt{2}c$ 代入上式可得 $(a-b)^2(a+b) = 0$,

因此 $a=b$, …9 分

于是 $c = \sqrt{2}a = \sqrt{2}b$, 即 $C=90^\circ$.

故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形. …10 分

18. 解:

(1) 由 $a_{n+1} + (-1)^n \cdot a_n = 11 - 2n$ 可得

当 $n=2k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 时, $a_{2k+1} + a_{2k} = 11 - 4k \dots\dots (i)$ …1 分

所以 $a_2 + a_3 = 11 - 4 \times 1$, $a_4 + a_5 = 11 - 4 \times 2$, $\dots$, $a_{100} + a_{101} = 11 - 4 \times 50$, …3 分

因此 $S_{101} = a_1 + 11 \times 50 - 4 \times \frac{(1+50) \times 50}{2} = -4551$. …5 分

(2) 当 $n=2k-1$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 时, $a_{2k} - a_{2k-1} = 13 - 4k \dots\dots (ii)$, …6 分

(i) 式减去 (ii) 式得 $a_{2k+1} + a_{2k-1} = -2$, …7 分

又 $a_1 = -1$, 于是 $a_{2k-1} = -1$ ($k \in \mathbf{N}^*$), $a_{2k} = 12 - 4k$ …8 分

可得 $a_2 = 8$, $a_4 = 4$, $a_6 = 0$; 当 $k > 3$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 时, $a_{2k} < 0$; …9 分

又 $k \in \mathbf{N}^*$, $a_{2k-1} = -1 < 0$,

则 $n > 6$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 时, $a_n < 0$; …10 分

又 $S_1 = -1$, $S_2 = 7$, $S_3 = 6$, $S_4 = 10$, $S_5 = S_6 = 9$,

$n > 6$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 时, $S_n > S_{n+1}$; …11 分

因此 $n=4$ 时, S_n 取得最大值, 且 $S_4 = 10$. …12 分

19. 解:

(1) 侧面 $ACC_1A_1 \perp$ 底面 ABC , $\angle ACB = 90^\circ$, 得 $BC \perp$ 侧面 ACC_1A_1 ,

又 $A_1C \subset$ 侧面 ACC_1A_1 , 得 $BC \perp A_1C$,

由 $BC \parallel B_1C_1$, 得 $B_1C_1 \perp A_1C$;

由 $AC = CC_1 = 2$, 得侧面 ACC_1A_1 是菱形, $AC_1 \perp A_1C$,

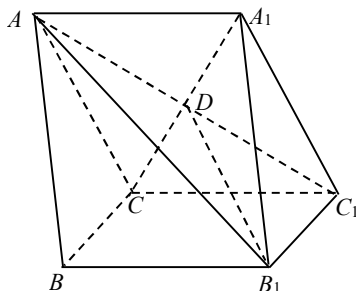
又 $B_1C_1 \cap AC_1 = C_1$, 则 $A_1C \perp$ 平面 AB_1C_1 ,

又 $AB_1 \subset$ 平面 AB_1C_1 , 则 $A_1C \perp AB_1$.

...2 分

...4 分

...6 分



(2) 设 $AC_1 \cap A_1C = D$, 连接 B_1D .

由 (1) 可知 $A_1C \perp$ 平面 AB_1C_1 , B_1D 为 A_1B_1 在平面 AB_1C_1 上的射影,

则 $\angle A_1B_1D$ 即为 A_1B_1 与平面 AB_1C_1 的所成角,

又 $A_1B_1 = 2\sqrt{2}$, 由 $\sin \angle A_1B_1D = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 得 $A_1D = 1$,

...8 分

...9 分

则 $A_1C = A_1C_1 = CC_1 = 2$, $S_{\triangle A_1CC_1} = \sqrt{3}$.

$$V_{\text{四面体 } ACB_1A_1} = V_{\text{三棱锥 } B_1-ACA_1} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle A_1CC_1} \times B_1C_1 = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

...12 分

20. 解:

(1) 由题意设 l 的方程为 $y + 2 = k(x - 1)$, 与 $x^2 = 4y$ 联立得,

$$x^2 - 4kx + 4k + 8 = 0$$

由 $\Delta > 0$ 得 $k^2 - k - 2 > 0$, 即 $k < -1$, 或 $k > 2$.

又 $k > 0$,

所以 k 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

...4 分

...5 分

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$,

由 (1) 可得 $x_1 + x_2 = 4k$;

由题意设 m 的方程为 $y + 2 = -k(x - 1)$, 与 $x^2 = 4y$ 联立得,

$$x^2 + 4kx - 4k + 8 = 0$$

得 $x_3 + x_4 = -4k$;

...8 分

$$k_{AC} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{x_3^2}{4} - \frac{x_1^2}{4}}{x_3 - x_1} = \frac{x_3 + x_1}{4},$$

$$\text{同理 } k_{BD} = \frac{x_4 + x_2}{4}$$

...10 分

$$\text{因为 } k_{AC} + k_{BD} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 0$$

所以直线 AC , 直线 BD 及 y 轴围成等腰三角形.

...12 分

21. 解:

(1) 30, 7.

...4 分

(2) X 的可能取值为 2, 3, 4, 5, 6, 7.

$$P(X=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}, P(X=3)=C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}, P(X=4)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16},$$

$$P(X=5)=C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}, P(X=6)=P(X=7)=C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{16},$$

分布列如下:

X	2	3	4	5	6	7
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$\text{则 } E(X)=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{16}+5\times\frac{3}{16}+6\times\frac{1}{16}+7\times\frac{1}{16}=\frac{15}{4}.$$

...8 分

(3) 乙经败者组进入决赛的概率为 $f(t)=C_4^1(1-t)t^5, 0<t<1$.

$f'(t)=4t^4(5-6t)$, 当 $0<t<\frac{5}{6}$ 时, $f'(t)>0$, $f(t)$ 单调递增,

当 $\frac{5}{6}<t<1$ 时, $f'(t)<0$, $f(t)$ 单调递减,

得 $f(t)$ 的最大值为 $f(\frac{5}{6})=4\times\frac{1}{6}\times(\frac{5}{6})^5=\frac{4}{5}\times(\frac{5}{6})^6=\frac{4}{5}\times(1-\frac{1}{6})^6$,

由参考知识得 $(1-\frac{1}{6})^6<\frac{1}{e}$, 故 $f(\frac{5}{6})<\frac{4}{5e}<\frac{3}{10}$,

所以, 乙经败者组进入决赛没有三成把握.

...12 分

22. 解:

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)\cup(1, +\infty)$.

...1 分

$$f'(x)=\frac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}, \text{ 令 } g(x)=1-\frac{1}{x}-\ln x, \text{ 则 } g'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2},$$

...3 分

当 $0<x<1$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x>1$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减,

所以 $g(x)\leq g(1)=0, f'(x)<0$,

因此 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内分别单调递减.

...5 分

由 $g(x)\leq 0$ 得 $1-\frac{1}{x}\leq \ln x$, 等号当且仅当 $x=1$ 时成立,

所以 $\ln x\leq x-1$, 等号当且仅当 $x=1$ 时成立.

令 $x_1\in(0, 1), x_2\in(1, +\infty)$,

于是 $\ln x_1<x_1-1, \ln x_2<x_2-1$, 又 $x_1-1<0, x_2-1>0$,

从而 $\frac{\ln x_1}{x_1-1}>1, \frac{\ln x_2}{x_2-1}<1$, 所以 $f(x_1)>f(x_2)$,

故 $f(x)$ 在定义域内单调递减.

...6 分

$$(2) f(x)-\frac{2a}{x+a}=\frac{\ln x}{x-1}-\frac{2a}{x+a}=\frac{1}{x-1}\left[\ln x-\frac{2a(x-1)}{x+a}\right],$$

$$\text{令 } h(x)=\ln x-\frac{2a(x-1)}{x+a}, \text{ 则 } h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a(a+1)}{(x+a)^2}=\frac{(x-a^2)^2+a^2-a^4}{x(x+a)^2}.$$

...8 分

当 $a^2 - a^4 \geq 0$, 即 $0 < a \leq 1$ 时, $x^2 - 2a^2x + a^2 \geq 0$, 所以 $h'(x) \geq 0$,
于是 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $h(1) = 0$,

所以 $0 < x < 1$ 时, $h(x) < 0$, 从而 $f(x) - \frac{2a}{x+a} = \frac{1}{x-1}h(x) > 0$;

$x > 1$ 时, $h(x) > 0$, 从而 $f(x) - \frac{2a}{x+a} = \frac{1}{x-1}h(x) > 0$,

因此, $0 < a \leq 1$ 时, $f(x) \geq \frac{2a}{x+a}$10 分

当 $a^2 - a^4 < 0$, 即 $a > 1$ 时, 若 $1 < x < a^2$, $x^2 - 2a^2x + a^2 < 0$, 所以 $h'(x) < 0$,
于是 $h(x)$ 在 $(1, a^2)$ 上单调递减, 又 $h(1) = 0$,

所以 $1 < x < a^2$ 时, $h(x) < 0$, 从而 $f(x) - \frac{2a}{x+a} = \frac{1}{x-1}h(x) < 0$, 与 $f(x) \geq \frac{2a}{x+a}$ 矛盾,

因此, $a > 1$ 不满足题设.

综上, a 的取值范围是 $(0, 1]$12 分