

试卷类型：A

珠海市 2020-2021 学年度第二学期高三学生第二次

学业质量监测

数学试卷

本试卷共 6 页, 22 道小题, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

2021. 5

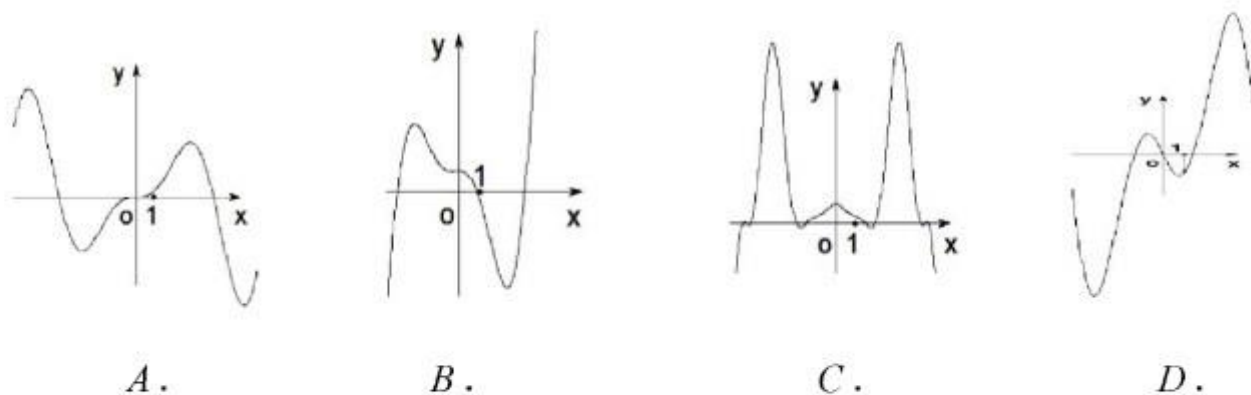
注意事项:

1. 答卷前, 考生务必在答题卡规定的地方填写自己的准考证号, 姓名, 考场号, 座位号. 用 2B 铅笔将试卷类型(A)填涂在答题卡相应位置上. 将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.
2. 回答选择题时, 选出每小题的答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号.
3. 回答非选择题时, 必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答. 将答案必须写在答题卡各题目规定的区域内, 写在本试卷上无效. 如需改动, 先划掉原来的答案, 然后再写上新的答案. 不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答的答案无效.
4. 请考生保持答题卡整洁. 考试结束后, 考生必须将答题卡交回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的选项中, 只有一项符合题目要求.

1. 已知集合 $A = \{x | 0.7^x > 1, x \in R\}$, $B = \{x | x^2 - x - 2 < 0, x \in R\}$, 则 $A \cap B =$
 $A. (0,1)$ $B. (-1,0)$ $C. (1,2)$ $D. (-1,2)$
2. 已知 i 是虚数单位, 复数 z 满足 $z(1+i) = 1-i$, z 对应复平面内的点 Z , 则 $|\overrightarrow{OZ}| =$
 $A. 1$ $B. 2$ $C. 3$ $D. 4$
3. 已知 $a, b \in R$, 满足 $ab < 0$, $a+b > 0$, $a > b$, 则
 $A. \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ $B. \frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 0$ $C. a^2 > b^2$ $D. a < |b|$
4. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$, 且 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 3$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| =$
 $A. 3$ $B. \sqrt{3}$ $C. 7$ $D. \sqrt{7}$
5. 5 位医生被分配到 4 个接种点承担接种新冠疫苗工作, 每个医生只能去一个接种点, 每个接种点至少有一名医生, 其中医生甲不能单独完成接种工作, 则共有 () 种不同的分配方法
 $A. 24$ $B. 48$ $C. 96$ $D. 12$

6. 函数 $f(x) = \sin x - x \cos x$ 的图像为



7. 设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. $a_3 + a_5 = 10$, $S_5 = 15$, 则 $S_6 =$

A. 18 B. 30 C. 36 D. 24

8. 《九章算术》勾股章有一问题:“今有立木,系索其末,委地三尺.引索却行,去本八尺而索尽,问索长几何?”其意思是:现有一竖立着的木柱,在木柱的上端系有绳索,绳索从木柱的上端顺木柱下垂后,堆在地面的部分尚有三尺,牵着绳索退行,拉直绳索,绳索头与地面接触点离木柱根部八尺处时绳索用尽.现从该绳索上任取一点,该点取自木柱中点上方的概率为

A. $\frac{55}{73}$ B. $\frac{55}{146}$ C. $\frac{11}{15}$ D. $\frac{55}{72}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

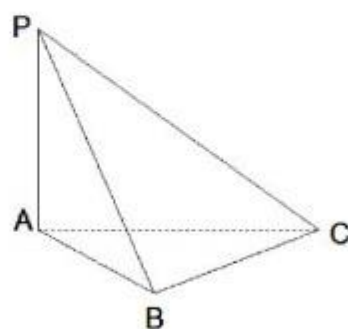
9. 已知函数 $f(x) = -x^2 \ln x$, 则

- A. $f(x) \leq 0$ 恒成立
- B. $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的减函数
- C. $f(x)$ 在 $x = e^{-\frac{1}{2}}$ 得到极大值 $\frac{1}{2e}$
- D. $f(x)$ 只有一个零点

10. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x$, 则

- A. π 是函数 $f(x)$ 的一个周期
- B. $x = -\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴
- C. 函数 $f(x)$ 的一个增区间是 $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$
- D. 把函数 $y = 2 \sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 得到函数 $f(x)$ 的图像

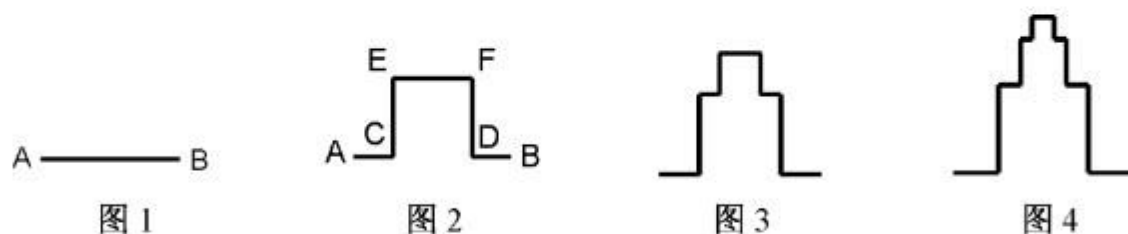
11. 如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AB=2, BC=2\sqrt{3}, AC=4$, A 到平面 PBC 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$, 则



(第 11 题图)

- A. $PA=4$
- B. 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 32π
- C. 直线 AB 与直线 PC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{16}$
- D. AB 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

12. 分形几何学是一门以不规则几何形态为研究对象的几何学. 分形的外表结构极为复杂, 但其内部却是有规律可寻的. 一个数学意义上的分形的生成是基于一个不断迭代的方程式, 即一种基于递归的反馈系统. 下面我们用分形的方法得到一系列图形, 如图 1, 在长度为 1 的线段 AB 上取两个点 C, D , 使得 $AC = DB = \frac{1}{4}AB$, 以 CD 为边在线段 AB 的上方做一个正方形, 然后擦掉 CD , 就得到图形 2; 对图形 2 中的最上方的线段 EF 作同样的操作, 得到图形 3; 依次类推, 我们就得到以下的一系列图形. 设图 1, 图 2, 图 3, $\dots$, 图 n , 各图中的线段长度和为 a_n , 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则



A. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

B. $S_{10} = \frac{6657}{256}$

C. $a_n < 3$ 恒成立

D. 存在正数 m , 使得 $S_n < m$ 恒成立

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若 $(x - \frac{a}{\sqrt{x}})^8$ ($a > 0$) 的二项展开式中二项式系数最大项为 $5670x^2$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

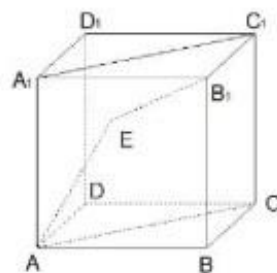
14. 已知某校期末考试数学平均分 $X \sim N(75, 100)$, 则 $P(65 < X < 95) = \underline{\hspace{2cm}}$.

附: $P(\mu - \sigma \leq X < \mu + \sigma) = 0.6826$

$P(\mu - 2\sigma \leq X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$

15. 设圆锥曲线 C 的两个焦点分别为 F_1, F_2 , P 为曲线 C 上一点, $|PF_1| : |PF_2| : |F_1F_2| = 5 : 4 : 2$, 则曲线 C 的离心率为_____.

16. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 E 为平面 AA_1C_1C 内的动点, $B_1E = 2$, 则 AE 长度的最小值为_____.



(第 16 题图)

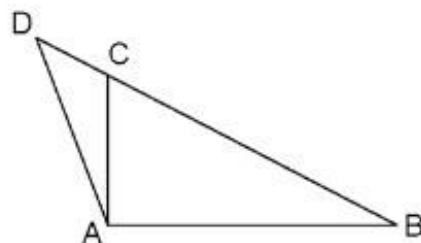
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 在① $3\cos 2B - \cos C = 1$; ② $\tan \frac{C}{2} = \tan B$; ③ $\sin B + \sqrt{3}\sin C = 2$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中.

问题：

如图，直角 $\triangle ABC$ 中， $A = \frac{\pi}{2}$, $BC = 4$, 且_____, 点 D 在 BC 的延长线上， $CD = 1$, 求 AD 长.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.



(第 17 题图)

18. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -1$, $a_4 = 2a_2 + a_3$

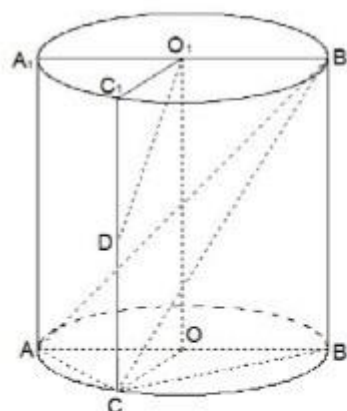
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n ;

(2) 若 $b_n = a_n^2 \cos \frac{n\pi}{2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 40 项和 S_{40} .

19. (12 分) 如图, 圆柱 OO_1 , 矩形 ABB_1A_1 为过轴 OO_1 的圆柱的截面, 点 C, C_1 为弧 AB, A_1B_1 的中点, 点 D 为 CC_1 的中点

(1) 求证: $O_1D \parallel$ 平面 AB_1C ;

(2) 若 $BB_1 = 2$, 三棱锥 $B_1 - ABC$ 的体积为 $\frac{2}{3}$, 求二面角 $C - AB_1 - B$ 的余弦值.



(第19题图)

20. (12 分) 现有甲乙两个项目, 对甲、乙两个项目分别投资 20 万元, 甲项目一年后利润是 1 万元、2 万元、4 万元的概率分别是 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{6}$; 乙项目的利润随乙项目的价格变化而变化, 乙项目在一年内, 价格最多可进行两次调整, 每次调整的概率为 p ($0 < p < 1$), 设乙项目一年内价格调整次数为 X , X 取 0, 1, 2 时, 一年后利润分别是 3 万元、2 万元、1 万元. 设 y_1, y_2 分别表示对甲、乙两个项目各投资 20 万元一年后的利润.

(1) 写出 y_1, y_2 的概率分布列和数学期望;

(2) 当 $E(y_1) > E(y_2)$ 时, 求 p 的取值范围.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = (x+1)e^x + mx + 3n \cos x + 3$ ($m, n \in \mathbb{R}$)

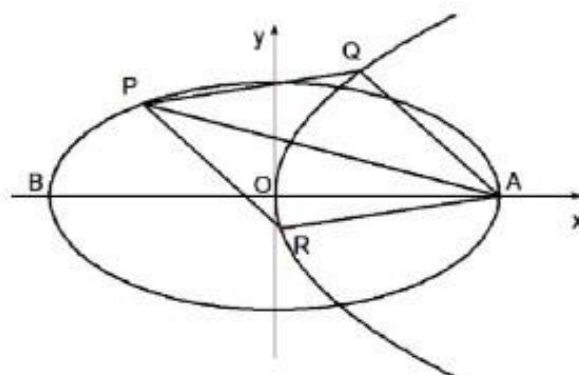
(1) $m > 0, n = 0$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的单调性;

(2) $n = -1$ 时, 不等式 $f(x) \geq \frac{1}{3}mx + 1$ 对 $x \geq 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

22. (12 分) 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $ab = 2$.

(1) 求椭圆 C_1 的方程;

(2) 已知点 B, A 为椭圆 C_1 的左、右顶点, 点 P 为椭圆 C_1 上不同于 A, B 的任一点, 在抛物线 $C_2: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上存在两点 Q, R , 使得四边形 $AQPR$ 为平行四边形, 求 p 的最小值.



(第 22 题图)

珠海市 2020-2021 学年度第二学期高三学生第二次

学业质量监测 数学评分参考

第 I 卷 选择题

1-5 B A C D C 6-8 A D B

9.CD

10.ACD

11.ABD

12.BC

填空题:

13. 3

14. 0.81855

15. $\frac{2}{9}$ 或 2

16. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

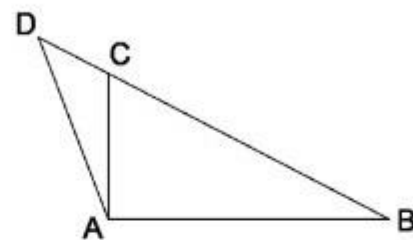
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 在① $3\cos 2B - \cos C = 1$ ；② $\tan \frac{C}{2} = \tan B$ ；③ $\sin B + \sqrt{3}\sin C = 2$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中。

问题：

如图，直角 $\triangle ABC$ 中， $A = \frac{\pi}{2}$ ， $BC = 4$ ，且_____，点 D 在 BC 的延长线上， $CD = 1$ ，求 AD 长。

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。



(第 17 题图)

解：选① $\because$ 直角 $\triangle ABC$ 中， $A = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore 3\cos 2B - \cos C = 3(1 - 2\sin^2 B) - \sin B = 1 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{即 } 6\sin^2 B + \sin B - 2 = 0$$

$$\text{得 } \sin B = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\because 0 < B < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{6} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\because BC = 4$$

$$\therefore AC = 2 \text{ 且 } \angle ACD = \frac{2\pi}{3} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\because CD = 1$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cos \angle ACD} = \sqrt{7} . \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

选② $\because$ 直角 $\triangle ABC$ 中， $A = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \tan \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{2\sin^2 \frac{C}{2}}{2\sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}$$

$$= \frac{1 - \cos C}{\sin C} = \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\cos C}{\sin C} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{得 } \cos C = \frac{1}{2}$$

$$\because 0 < C < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\because BC = 4$$

$$\therefore AC = 2 \text{ 且 } \angle ACD = \frac{2\pi}{3} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\because CD = 1$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cos \angle ACD} = \sqrt{7} . \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{选③} \because \text{直角 } \triangle ABC \text{ 中, } A = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \sin B + \sqrt{3} \sin C = \sqrt{3} \sin C + \cos C = 2$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C + \frac{1}{2} \cos C = \sin(C + \frac{\pi}{6}) = 1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\because 0 < C < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} < C + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore C + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\because BC = 4$$

$$\therefore AC = 2 \text{ 且 } \angle ACD = \frac{2\pi}{3} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\because CD = 1$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cos \angle ACD} = \sqrt{7} . \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -1$, $a_4 = 2a_2 + a_3$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n ;

(2) 若 $b_n = a_n^2 \cos \frac{n\pi}{2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 40 项和 S_{40} .

解: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d

由 $a_1 = -1$, $a_4 = a_1 + 3d = 3a_1 + 4d = 2a_2 + a_3$

得 $d = 2$ 2 分

$\therefore a_n = 2n - 3$ 4 分

$$(2) \because b_n = a_n^2 \cos \frac{n\pi}{2}$$

$\therefore$ ① n 为奇数时, $b_n = 0$ 5 分

② n 为偶数时,

$n = 4k + 2, k \in N$ 时, $b_n = -a_n^2$ 6 分

$n = 4k + 4, k \in N$ 时, $b_n = a_n^2$ 7 分

$\therefore S_{50} = (a_4^2 - a_2^2) + (a_8^2 - a_6^2) + (a_{12}^2 - a_{10}^2) + \cdots + (a_{36}^2 - a_{34}^2) + (a_{40}^2 - a_{38}^2)$ 9 分

$= 4(a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{40})$ 10 分

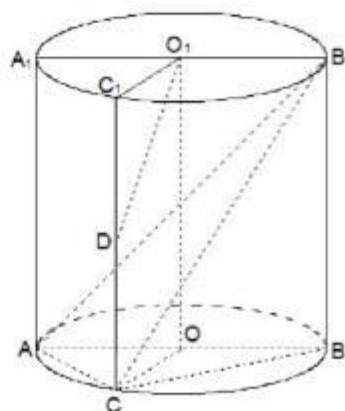
$= 4(20a_2 + \frac{20 \times 19}{2} \times 2d)$ 11 分

$= 3120$ 12 分

19. (12 分) 如图, 圆柱 OO_1 , 矩形 ABB_1A_1 为过轴 OO_1 的圆柱的截面, 点 C, C_1 为弧 $\widehat{AB}, \widehat{A_1B_1}$ 的中点, 点 D 为 CC_1 的中点

(1) 求证: $O_1D \parallel$ 平面 AB_1C ;

(2) 若 $BB_1 = 2$, 三棱锥 $B_1 - ABC$ 的体积为 $\frac{2}{3}$, 求二面角 $C - AB_1 - B$ 的余弦值.



(第19题图)

(1) 证明: 设 $AB_1 \cap OO_1 = E$, 连接 CE

则 E 为 OO_1 中点在矩形 CC_1O_1O 中

$\because$ 点 D 为 CC_1 的中点

$\therefore O_1E \parallel CD, O_1E = CD \dots\dots\dots 2$ 分

$\therefore$ 四边形 CDO_1E 是平行四边形

$\therefore O_1D \parallel CE, CE \subset \text{平面 } AB_1C, O_1D \not\subset \text{平面 } AB_1C \dots\dots\dots 3$ 分

$\therefore O_1D \parallel \text{平面 } AB_1C \dots\dots\dots 4$ 分

(2) 解: 取 AE 中点 F , 连接 CF, OF
 设圆锥底面半径 r

$\because$ 点 C, C_1 为弧 $\widehat{AB}, \widehat{A_1B_1}$ 的中点

$\therefore CC_1 \perp \text{平面 } ABC, OC \perp AB$

$\because$ 矩形 ABB_1A_1 为过轴 OO_1 的圆柱的截面

$\therefore \text{平面 } ABB_1A_1 \perp \text{平面 } ABC$

$\therefore OC \perp \text{平面 } ABB_1A_1 \dots\dots\dots 6$ 分

$\because BB_1 = 2$, 三棱锥 $B_1 - ABC$ 的体积为 $\frac{2}{3}$

$$\therefore V_{\text{三棱锥 } B_1 - ABC} = \frac{1}{3} \cdot BB_1 \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2r = \frac{2}{3}$$

得 $r = 1 = OA = OB = OC \dots\dots\dots 7$ 分

$\because OO_1 \perp \text{平面 } ABC, OO_1 = BB_1 = 2$

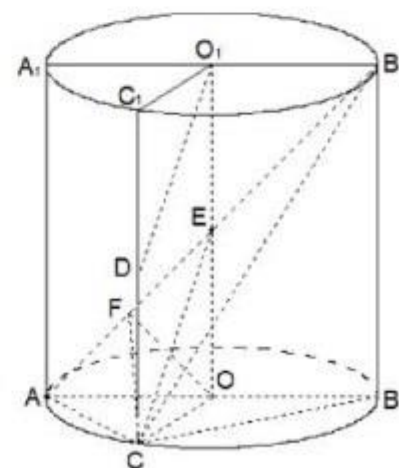
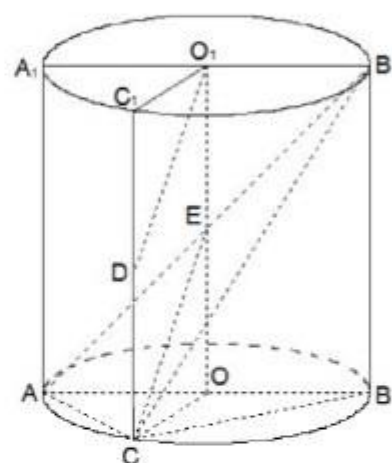
$\therefore OE = 1$

$\therefore CE = CA = AE = \sqrt{2}$

$\therefore FO \perp AB_1, FC \perp AB_1 \dots\dots\dots 8$ 分

$\therefore \angle OFC$ 为二面角 $C - AB_1 - B$ 的平面角 $\dots\dots\dots 9$ 分

$$\text{由 } OF = \frac{\sqrt{2}}{2}, CF = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



$$\therefore \cos \angle OFC = \frac{OF}{CF} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{二面角 } C-AB_1-B \text{ 的余弦值为 } \frac{\sqrt{3}}{3}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. (12分) 现有甲乙两个项目, 对甲、乙两个项目分别投资 20 万元, 甲项目一年后利润是 1 万元、2 万元、4 万元的概率分别是 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{6}$; 乙项目的利润随乙项目的价格变化而变化, 乙项目在一年内, 价格最多可进行两次调整, 每次调整的概率为 p ($0 < p < 1$), 设乙项目一年内价格调整次数为 X , X 取 0, 1, 2 时, 一年后利润分别是 3 万元、2 万元、1 万元. 设 y_1, y_2 分别表示对甲、乙两个项目各投资 20 万元一年后的利润.

(1) 写出 y_1, y_2 的概率分布列和数学

y_1	1	2	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

期望;

(2) 当 $E(y_1) > E(y_2)$ 时, 求 p 的取

值范围.

解: (1) y_1 的概率分布列如下:

.....2

y_2 的概率分布列如下:

y_2	3	2	1
P	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

分

.....4 分

$$E(y_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{11}{6} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$E(y_2) = 3 \times (1-p)^2 + 2 \times 2p(1-p) + 1 \times p^2 = 3 - 2p \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(2) $E(y_1) > E(y_2)$ 得 $3 - 2p < \frac{11}{6}$ 10 分

得 $p > \frac{7}{12}$

又 $0 < p < 1$

$\therefore \frac{7}{12} < p < 1$ 11 分

$\therefore p$ 的范围是 $(\frac{7}{12}, 1)$12 分

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = (x+1)e^x + mx + 3n \cos x + 3$ ($m, n \in R$)

(1) $m > 0, n = 0$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的单调性;

(2) $n = -1$ 时, 不等式 $f(x) \geq \frac{1}{3}mx + 1$ 对 $x \geq 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

解: (1) $m > 0, n = 0$ 时, $f(x) = (x+1)e^x + mx + 3$

$f'(x) = (x+2)e^x + m$ 1 分

$f''(x) = (x+3)e^x$ 2 分

当 $x < -3$ 时, $f''(x) < 0$; 当 $x > -3$ 时, $f''(x) > 0$ 3 分

$\therefore f'(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上单减, 在 $(-3, +\infty)$ 上单增.4 分

(2) $n = -1$ 时, 不等式 $f(x) = (x+1)e^x + mx - 3 \cos x + 3 \geq \frac{1}{3}mx + 1$ 对 $x \geq 0$ 恒成立

等价于 $3(x+1)e^x + 2mx - 9 \cos x + 6 \geq 0$ 对 $x \geq 0$ 恒成立.....“*”5 分

令 $q(x) = 3(x+1)e^x + 2mx - 9 \cos x + 6$, $x \geq 0$

则 $q'(x) = 3(x+2)e^x + 2m + 9 \sin x$

$q(0) = 0$

$q'(0) = 2(m+3)$

$\therefore q''(x) = 3(x+3)e^x + 9 \cos x = 3xe^x + 9(e^x + \cos x) > 0$ 对 $x \geq 0$ 恒成立

$\therefore q'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单增.....6 分

1) $m \geq -3$ 时, $q'(x) \geq q'(0) \geq 0$

$\therefore q(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单增

$\therefore q(x) \geq q(0) = 0$

$\therefore$ “*” 成立 8 分

2) $m < -3$ 时, $q'(0) = 2(m+3) < 0$

$\therefore 2 - \frac{2}{3}m > 4$

$\therefore q'(2 - \frac{2}{3}m) = 3(4 - \frac{2}{3}m)e^{2 - \frac{2}{3}m} + 2m + 9\sin(2 - \frac{2}{3}m)$

$> 12 - 2m + 2m + 9\sin(2 - \frac{2}{3}m) = 12 + 9\sin(2 - \frac{2}{3}m) > 0$ 9 分

$\therefore \exists x_0 \in (0, 2 - \frac{2}{3}m)$, 使得 $q'(x_0) = 0$

当 $0 < x < x_0$ 时, $q'(x) < 0$

$\therefore q(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单减

当 $0 < x \leq x_0$ 时, $q(x) < q(0) = 0$

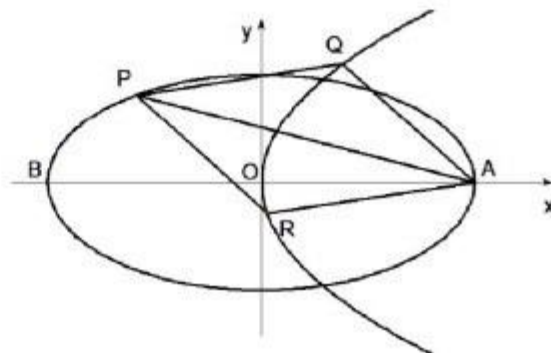
故 “*” 不成立. 11 分

综上, m 的取值范围是 $[-3, +\infty)$ 12 分

22. (12 分) 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $ab = 2$.

(1) 求椭圆 C_1 的方程;

(2) 已知点 B, A 为椭圆 C_1 的左、右顶点, 点 P 为椭圆 C_1 上不同于 A, B 的任一点, 在抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 上存在两点 Q, R , 使得四边形 $AQPR$ 为平行四边形, 求 p 的最小值.



(第 22 题图)

解: (1)由
$$\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ ab = 2 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = \sqrt{3} \end{cases}$$

$\therefore C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(2)由(1)知 $A(2, 0)$, 设 $Q(x_1, y_1), R(x_2, y_2), P(x_3, y_3)$

连接 AP, QR 设交于 $D(x_0, y_0)$

$\because$ 四边形 $AQPR$ 为平行四边形

$\therefore D$ 为 AP, QR 的中点且 QR 与 x 轴既不垂直也不平行.....5 分

设 $QR: y = kx + m (k \neq 0)$

QR 与 C_2 联立消 y 得 $k^2x^2 + 2(km - p)x + m^2 = 0$“*”

则 x_1, x_2 是“*”的二根

$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2(km - p)}{k^2} \\ x_1 x_2 = \frac{m^2}{k^2} \end{cases} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

且 $\Delta = 4(km - p)^2 - 4k^2m^2 > 0$

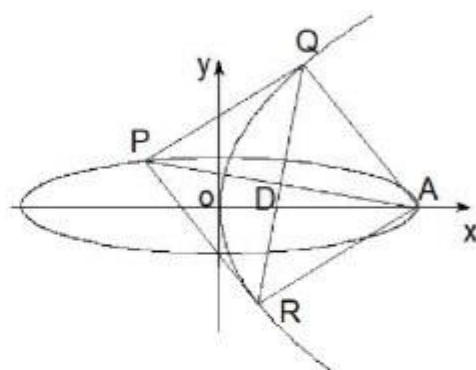
即 $-2km + p > 0$ ①7 分

$\therefore x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{km - p}{k^2}, y_0 = kx_0 + m = \frac{p}{k}$

$\because x_0 = \frac{x_3 + 2}{2}, y_0 = \frac{y_3}{2}$

$\therefore$ 得 $x_3 = 2x_0 - 2 = -\frac{2(km - p)}{k^2} - 2, y_3 = 2y_0 = \frac{2p}{k}$

$\therefore P(-\frac{2(km - p)}{k^2} - 2, \frac{2p}{k})$ 8 分



$\because$ 点 $P \in C_1$

$$\therefore \frac{\left[-\frac{2(km-p)}{k^2}-2\right]^2}{4} + \left(\frac{2p}{k}\right)^2 = 1$$

$$\text{即 } \left(\frac{km-p}{k^2}+1\right)^2 + \left(\frac{2p}{k}\right)^2 = 1 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{2p}{k} = \sin \theta \dots\dots\dots ② \\ \frac{km-p}{k^2} + 1 = \cos \theta \dots\dots\dots ③ \end{cases} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

其中 $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

由②得 $k = \frac{2p}{\sin \theta}$ 代入③得

$$km = p - \frac{4p^2}{1 + \cos \theta} \text{ 代入①得}$$

$$-2km + p = -2p + \frac{8p^2}{1 + \cos \theta} + p > 0$$

$$\text{得 } p > \frac{1 + \cos \theta}{8} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\because \sin \theta \neq 0$$

$$\therefore \cos \theta < 1$$

$$\therefore \frac{1 + \cos \theta}{8} < \frac{1}{4}$$

$$\therefore p \geq \frac{1}{4}$$

$$\therefore p \text{ 的最小值为 } \frac{1}{4} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$