

2021年汕头市普通高考第一次模拟考试试题

数 学

本试卷共6页，22小题，满分150分，考试用时120分钟。

考生注意：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号等信息填涂在答题卡相应位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将试题卷和答题卡一并交回。

第 I 卷 选择题

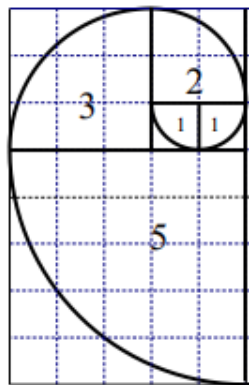
一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 4\}$, $B = \{x \mid (x-1)(x+2) < 0, x \in \mathbb{N}\}$, 则 $A \cup B =$
A. $\{1\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{0, 1, 2, 3\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
2. 在复平面内，复数 $\frac{3i}{1-i}$ 的共轭复数对应点的坐标所在的象限是
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 若 $\left(\frac{1}{5}\right)^a = 3$, 则 $a - \log_{\frac{1}{5}} 15 =$
A. -1 B. 1 C. $\frac{1}{5}$ D. 3
4. 已知 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = -3\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $\sin 2\alpha$ 的值是
A. $2\sqrt{3}$ B. $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ C. $-2\sqrt{3}$ D. $-\frac{4\sqrt{3}}{7}$
5. 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 \cdot a_4 = 16$, $a_4 + a_5 = 24$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为
A. $a_n = 2^{n-1}$ B. $a_n = 2^n$ C. $a_n = 3^n$ D. $a_n = 3^{n-1}$

6. 已知 $x > 1$, $y < 0$, 且 $3y(1-x) = x + 8$, 则 $x - 3y$ 的最小值是

- A. 8 B. 6 C. $\frac{15}{2}$ D. $\frac{13}{2}$

7. 斐波那契螺旋线被誉为自然界最完美的“黄金螺旋”，它的画法是：以斐波那契数：1, 1, 2, 3, 5, ... 为边的正方形拼成长方形，然后在每个正方形中画一个圆心角为 90° 的圆弧，这些圆弧所连起来的弧线就是斐波那契螺旋线。自然界存在很多斐波那契螺旋线的图案，例如向日葵、鹦鹉螺等。右图为该螺旋线的前一部分，如果用接下来的一段圆弧所对应的扇形做圆锥的侧面，则该圆锥的体积为



(第7题图)

- A. $\frac{4\sqrt{60}\pi}{3}$
 B. $\frac{2\sqrt{60}\pi}{3}$
 C. $\frac{125\sqrt{15}\pi}{192}$
 D. $\frac{125\sqrt{15}\pi}{64}$

8. 在新的高考改革方案中规定：每位考生的高考成绩是按照 3(语文、数学、英语)+2(物理、历史)选 1+4(化学、生物、地理、政治)选 2 的模式设置的，则在选考的科目中甲、乙两位同学恰有两科相同的概率为

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{1}{2}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右两个焦点分别为 F_1 、 F_2 ，直线 $y = kx (k \neq 0)$ 与 C 交于 A 、

B 两点， $AE \perp x$ 轴，垂足为 E ，直线 BE 与 C 的另一个交点为 P ，则下列结论正确的是

- A. 四边形 AF_1BF_2 为平行四边形 B. $\angle F_1PF_2 < 90^\circ$
 C. 直线 BE 的斜率为 $\frac{k}{2}$ D. $\angle PAB > 90^\circ$

10. 已知定义在 R 上的奇函数，满足 $f(2-x) + f(x) = 0$ ，当 $x \in (0, 1]$ 时， $f(x) = -\log_2 x$ ，若函数 $F(x) = f(x) - \tan(n\pi x)$ ，在区间 $[-1, m]$ 上有 10 个零点，则 m 的取值可以是

- A. 3.8 B. 3.9 C. 4 D. 4.1

11. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) (\omega > 0)$ ，则下述结论中正确的是

- A. 若 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 4 个零点，则 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 2 个极小值点

- B. 若 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 4 个零点, 则 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{2\pi}{15}\right)$ 上单调递增
- C. 若 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 4 个零点, 则 ω 的范围是 $\left[\frac{15}{8}, \frac{19}{8}\right)$
- D. 若 $f(x)$ 图像关于 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称, 且在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}\right)$ 单调, 则 ω 的最大值为 9
12. 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则下列说法正确的是
- A. $f(2) > f(3)$
- B. $\ln \pi > \sqrt{\frac{\pi}{e}}$
- C. 若 $f(x) = m$ 有两个不相等的实根 x_1, x_2 , 则 $x_1 x_2 < e^2$
- D. 若 $2^x = 5^y$, x, y 均为正数, 则 $2x < 5y$

第 II 卷 非选择题

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $\mathbf{a} = (2, 2)$, $\mathbf{b} = (8, -6)$, 则 $\tan \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle =$ _____.
14. 国家发展改革委、住房城乡建设部于 2017 年发布了《生活垃圾分类制度实施方案》, 规定 46 个城市在 2020 年底实施生活垃圾强制分类, 垃圾回收、利用率要达 35% 以上. 某市在实施垃圾分类之前, 从本市人口数量在两万人左右的 240 个社区中随机抽取 50 个社区, 对这 50 个社区某天产生的垃圾量(单位: 吨)进行了调查, 得到如下频数分布表, 并将人口数量在两万人左右的社区垃圾数量超过 28 吨/天的确定为“超标”社区:

垃圾量 x	$[12.5, 15.5)$	$[15.5, 18.5)$	$[18.5, 21.5)$	$[21.5, 24.5)$	$[24.5, 27.5)$	$[27.5, 30.5)$	$[30.5, 33.5]$
频数	5	6	9	12	8	6	4

通过频数分布表估算出这 50 个社区这一天垃圾量的平均值 $\bar{x} =$ _____ (精确到 0.1); 假设该市人口数量在两万人左右的社区这一天的垃圾量大致服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 近似为样本平均值 $\bar{x}$, σ^2 近似为样本方差 s^2 , 经计算得 $s = 5.2$. 请利用正态分布知识估计这 240 个社区中“超标”社区的个数 _____.

(参考数据: $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$; $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$;

$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9974$)

15. 写一个焦点在 y 轴上且离心率为 $\sqrt{3}$ 的双曲线方程 _____.
16. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, $\triangle SAB$ 是以 AB 为斜边的直角三角形, 二面角 $S-AB-C$ 的大小为 60° , 则该三棱锥外接球的表面积为 _____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，给出条件：

① $S_n = \frac{3^n}{2} + m, (m \in \mathbb{R})$; ② $S_n = \frac{1}{2}a_{n+1} + m, (m \in \mathbb{R})$, 且 $a_1 = 1$. 若 _____,

请在这两个条件中选一个填入上面的横线上并解答. (注：若选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分).

(1) 求 m 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

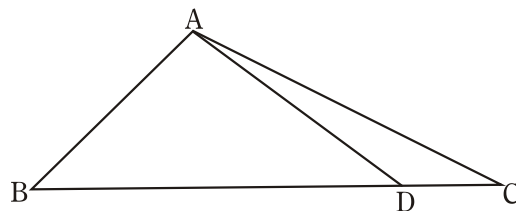
18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,

已知： $b = \sqrt{5}$ ， $c = \sqrt{2}$ ， $\angle B = 45^\circ$.

(1) 求边 BC 的长和三角形 ABC 的面积；

(2) 在边 BC 上取一点 D ，使得 $\cos \angle ADB = \frac{4}{5}$ ，求 $\tan \angle DAC$ 的值.

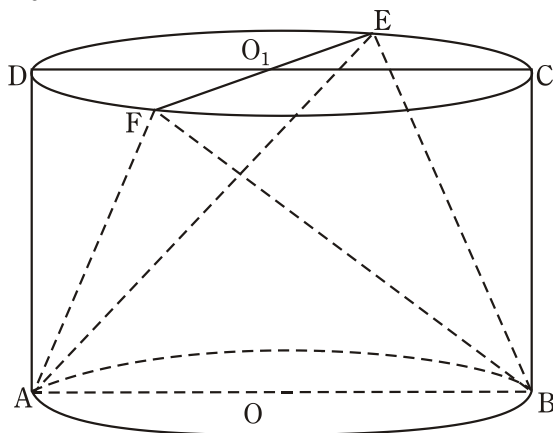


19. (本小题满分 12 分)

如图，在圆柱 OO_1 中，四边形 $ABCD$ 是其轴截面， EF 为 $\odot O_1$ 的直径，且 $EF \perp CD$ ， $AB = 2$ ， $BC = a(a > 0)$.

(1) 求证： $BE = BF$ ；

(2) 若直线 AE 与平面 BEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ，求二面角 $A-BE-F$ 平面角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

为确保我国如期全面建成小康社会，实现第一个百年奋斗目标打下了坚实的基础. 在产业扶贫政策的大力支持下，某玩具厂对原有的生产线进行技术升级，为了更好地对比升级前和升级后的效果，其中甲生产线继续使用旧的生产模式，乙生产线采用新的生产模式. 质检部门随机抽检了甲、乙两条生产线的各 100 件玩具，在抽取的 200 件玩具中，根据检测结果将它们分为“ A ”、“ B ”、“ C ”三个等级， A 、 B 等级都是合格品， C 等级是次品，统计结果如表所示：

等 级	A	B	C
频 数	100	75	25

(表一)

	合格品	次 品	合计
甲	80		
乙		5	
合计			

(表二)

在相关政策扶持下，确保每件合格品都有对口销售渠道，但从安全起见，所有的次品必须由厂家自行销毁.

(1)请根据所提供的数据，完成上面的 2×2 列联表(表二)，并判断是否有 99.5% 的把握认为产品的合格率与技术升级有关？

(2)每件玩具的生产成本为 20 元， A 、 B 等级产品的出厂单价分别为 m 元、40 元. 若甲生产线抽检的玩具中有 35 件为 A 等级，用样本的频率估计概率，若进行技术升级后，平均生产一件玩具比技术升级前多盈利 12 元，则 A 等级产品的出产单价为多少元？

附： $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x - \ln x - a$ 有两个相异零点 x_1 ， x_2 ($x_1 < x_2$).

(1)求 a 的取值范围.

(2)求证： $x_1 + x_2 < \frac{4a + 2}{3}$.

22. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, O 为坐标原点, $M(\sqrt{3}, 0)$, 已知平行四边形 $OMNP$ 两条对角线的长度之和等于 4.

(1) 求动点 P 的轨迹方程;

(2) 过 $M(\sqrt{3}, 0)$ 作互相垂直的两条直线 l_1 、 l_2 , l_1 与动点 P 的轨迹交于 A 、 B , l_2 与动点 P 的轨迹交于点 C 、 D , AB 、 CD 的中点分别为 E 、 F ,

① 证明: 直线 EF 恒过定点, 并求出定点坐标.

② 求四边形 $ACBD$ 面积的最小值.

