秘密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

2021年广州市普通高中毕业班综合测试（一）

数　学

2021.03.16

本试卷共6页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项： 1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、试室号和座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上，并在答题卡相应位置上填涂考生号。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．复数$z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$在复平面内对应的点在

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．已知集合$A=\{x|(x-1)(x+2)<0\}$，则$\complement_{\mathbf{R}}A=$

A．$\{x|-2<x<1\}$　　B．$\{x|-1<x<2\}$

C．$\{x|x\leqslant-2$ 或 $x\geqslant1\}$　　D．$\{x|x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant2\}$

3．2020年11月10日，我国“奋斗者”号载人深潜器在马里亚纳海沟成功坐底，下潜深度达到惊人的10909m，创造了我国载人深潜的新记录．当“奋斗者”号下潜至某一深度时，处于其正上方海面处的科考船用声呐装置向“奋斗者”号发射声波．已知声波在海水中传播的平均速度约为1450m/s，若从发出至回收到声波所用时间为6s，则“奋斗者”号的实际下潜深度约为

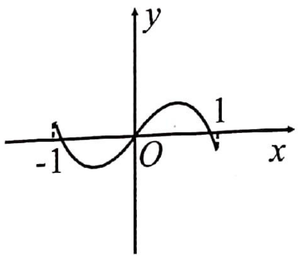
A．2900m　　B．4350m　　C．5800m　　D．8700m

4. $a>b+1$是$2^a>2^b$的

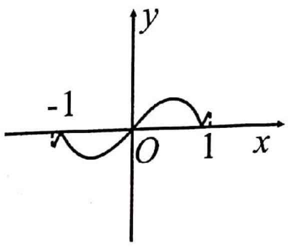
A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

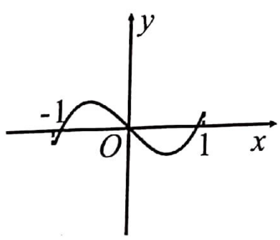
5. 函数$f(x)=x^3-\sin x$在$[-1,\ 1]$上的图像大致为



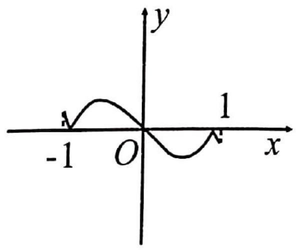
A.



B.

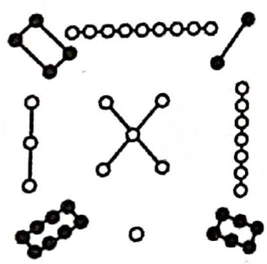


C.



D.

6. 如图，洛书（古称龟书），是阴阳五行术数之源．在古代传说中有神龟出于洛水，其甲壳上有此图像，结构是戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足，以五居中，五方白圈皆阳数，四角黑点为阴数．若从四个阴数和五个阳数中随机选取3个数，则选取的3个数之和为奇数的方法数为



A. 30　　B. 40　　C. 44　　D. 70

7. 已知$A(-1,0)$，$B(0,2)$，直线$l:2x-2ay+3+a=0$上存在点P，满足$|PA|+|PB|=\sqrt{5}$，则l的倾斜角的取值范围是

A. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$　　　　B. $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$

C. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$　　　　D. $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

8. 已知 $\mathrm{e}\approx 2.71828$ 是自然对数的底数，设 $a=\sqrt{3}-\frac{3}{\mathrm{e}}$，$b=\sqrt{2}-\frac{2}{\mathrm{e}}$，$c=\mathrm{e}^{\sqrt{2}-1}-\ln 2$，则

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．已知点 O 为坐标原点，直线 $y=x-1$ 与抛物线 $C:y^2=4x$ 相交于 A，B 两点，则

A．$|AB|=8$

B．$OA\perp OB$

C．$\triangle AOB$ 的面积为 $2\sqrt{2}$

D．线段 AB 的中点到直线 $x=0$ 的距离为 2

10．已知函数 $f(x)=\sin 2x+2\cos^2 x$，则

A．$f(x)$ 的最大值为 3

B．$f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称

C．$f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\frac{\pi}{8},1\right)$ 对称

D．$f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增

11．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，EF 是棱 AB 上的一条线段，且 $EF=1$，点 Q 是棱 A_1D_1 的中点，点 P 是棱 C_1D_1 上的动点，则下面结论中正确的是

A．PQ 与 EF 一定不垂直

B．二面角 $P-EF-Q$ 的正弦值是 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C．$\triangle PEF$ 的面积是 $2\sqrt{2}$

D．点 P 到平面 QEF 的距离是常量

12．在数学课堂上，教师引导学生构造新数列：在数列的每相邻两项之间插入此两项的和，形成新的数列，再把所得数列按照同样的方法不断构造出新的数列．将数列 1，2 进行构造，第 1 次得到数列 1，3，2；第 2 次得到数列 1，4，3，5，2；…；第 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次得到数列 1，x_1，x_2，x_3，…，x_k，2；…．记 $a_n=1+x_1+x_2+\cdots+x_k+2$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项为 S_n，则

A．$k+1=2^n$

B．$a_{n+1}=3a_n-3$

C．$a_n=\frac{3}{2}\left(n^2+3n\right)$

D．$S_n=\frac{3}{4}\left(3^{n+1}+2n-3\right)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．设向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(2,1)$，且 $\boldsymbol{b}\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=7$，则 $m=$__________．

14．某车间为了提高工作效率，需要测试加工零件所花费的时间，为此进行了 5 次试验，这 5 次试验的数据如下表：

零件数 x（个）	10	20	30	40	50
加工时间 y（min）	62	a	75	81	89

若用最小二乘法求得回归直线方程为 $\hat{y}=0.67x+54.9$，则 a 的值为__________．

15．已知圆 $(x-1)^2+y^2=4$ 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两条渐近线相交于四个点，按顺时针排列依次记为 M，N，P，Q，且 $|MN|=2|PQ|$，则 C 的离心率为__________．

16．已知三棱锥 $P-ABC$ 的底面 ABC 是边长为 6 的等边三角形，$PA=PB=PC=\sqrt{21}$，先在三棱锥 $P-ABC$ 内放入一个内切球 O_1，然后再放入一个球 O_2，使得球 O_2 与球 O_1 及三棱锥 $P-ABC$ 的三个侧面都相切，则球 O_1 的体积为__________，球 O_2 的表面积为__________．（第一空 2 分，第二空 3 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(10 分)

已知△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $b=3$，$\cos 2B=\cos(A+C)$，$a\sin A+c\sin C=6\sin B$．

（1）求 B；

（2）求△ABC 的周长．

18．(12 分)

已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公差$d\neq 0$，a_2是a_1，a_5的等比中项，$S_5=25$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_n+b_{n+1}=S_n$，求b_2-b_{20}．

19．(12 分)

在边长为2的菱形$ABCD$中，$\angle BAD=60^\circ$，点E是边AB的中点(如图1)，将$\triangle ADE$沿DE折起到$\triangle A_1DE$的位置，连接A_1B，A_1C，得到四棱锥A_1-BCDE（如图2）．

（1）证明：平面$A_1BE\perp$平面$BCDE$；

（2）若$A_1E\perp BE$，连接CE，求直线CE与平面A_1CD所成角的正弦值．

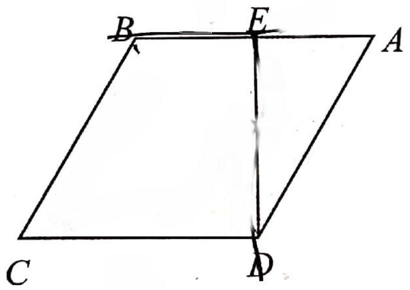


图1

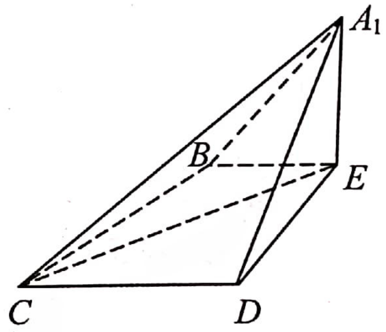


图2

20．(12 分)

某中学举行篮球趣味投篮比赛，比赛规则如下：每位选手各投5个球，每一个球可以选择在A区投篮也可以选择在B区投篮，在A区每投进一球得2分，投不进球得0分；在B区每投进一球得3分，投不进球得0分，得分高的选手胜出．已知参赛选手甲在A区和B区每次投篮进球的概率分别为$\frac{2}{3}$和$\frac{1}{2}$，且各次投篮的结果互不影响．

（1）若甲投篮得分的期望值不低于7分，则甲选择在A区投篮的球数最多是多少个？

（2）若甲在A区投3个球且在B区投2个球，求甲在A区投篮得分高于在B区投篮得分的概率．

21. （12 分）

已知点 $A(1,0)$， 点 B 是圆 O_1：$(x+1)^2+y^2=16$ 上的动点，线段 AB 的垂直平分线与 BO_1 相交于点 C，点 C 的轨迹为曲线 E．

（1）求 E 的方程；

（2）过点 O_1 作倾斜角互补的两条直线 l_1，l_2，若直线 l_1 与曲线 E 交于 M，N 两点，直线 l_2 与圆 O_1 交于 P，Q 两点，当 M，N，P，Q 四点构成四边形，且四边形 $MPNQ$ 的面积为 $8\sqrt{3}$ 时，求直线 l_1 的方程．

22. （12 分）

已知函数 $f(x)=x\ln x-ax^2+x\ (a\in\mathbf{R})$．

（1）证明：曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线 l 恒过定点；

（2）若 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，且 $x_2>2x_1$，证明：$\sqrt{x_1^2+x_2^2}>\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.