

潍坊市高考模拟考试

数 学

2021.5

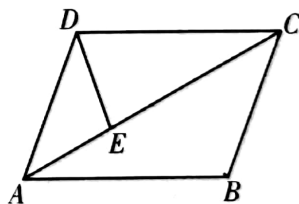
本试卷共4页，满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本大题共8个小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，集合 $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{3, 4\}$ ，则集合 $\{5\} =$
 A. $\complement_U(A \cup B)$ B. $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ C. $(\complement_U A) \cup B$ D. $(\complement_U B) \cup A$
2. 设复数 z_1, z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称， $z_1 = 2 + i$ ，则 $z_1 z_2 =$
 A. 5 B. -5 C. $-4 + i$ D. $-4 - i$
3. 某学校参加志愿服务社团的学生中，高一年级有50人，高二年级有30人，高三年级有20人，现用分层抽样的方法从这100名学生中抽取学生组成一个活动小组，已知从高二年级的学生中抽取了6人，则从高三年级的学生中应抽取的人数为
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
4. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ，若 $\overrightarrow{ED} = \lambda \overrightarrow{AD} + \mu \overrightarrow{AB}$ ，
 则 $\lambda + \mu =$
 A. $-\frac{1}{3}$ B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$
5. “ $\tan \alpha = 2$ ”是“ $\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = \frac{4}{5}$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 某地区为落实乡村振兴战略，帮助农民脱贫致富，引入一种特色农产品种植，该农产品上市时间仅能维持5个月，预测上市初期和后期会因产品供应不足使价格持续上涨，而中期又将出现供大于求使价格连续下跌。经研究其价格模拟函数为 $f(t) = t(t-3)^2 + n$ ，($0 \leq t \leq 5$ ，其中 $t=0$ 表示5月1日， $t=1$ 表示6月1日，以此类推)。若 $f(2) = 6$ ，为保护农户的经济效益，当地政府计划在价格下跌时积极拓宽外销，请你预测该农产品价格下跌的月份为
 A. 5月和6月 B. 6月和7月 C. 7月和8月 D. 8月和9月



7. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与双曲线 C 的右支在第一象限的交点为 A , 与 y 轴的交点为 B , 且 $\triangle ABF_2$ 为等边三角形, 则以下说法正确的是

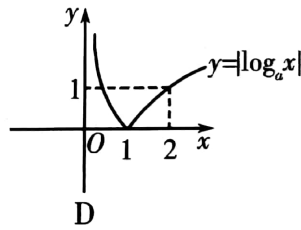
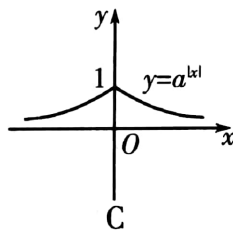
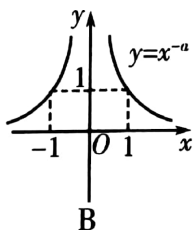
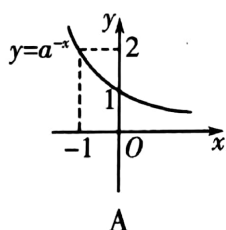
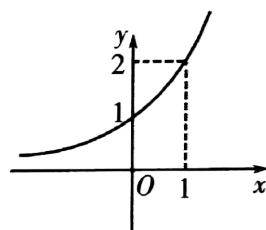
- A. 双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm x$
 B. 若双曲线 C 的实轴长为 2, 则 $S_{\triangle AF_1F_2} = \sqrt{3}$
 C. 若双曲线 C 的焦距为 $2\sqrt{3}$, 则点 A 的纵坐标为 $\sqrt{3}$
 D. 点 F_2 在以 AF_1 为直径的圆上

8. 定义: 两个正整数 a, b , 若它们除以正整数 m 所得的余数相等, 则称 a, b 对于模 m 同余, 记作 $a \equiv b \pmod{m}$, 比如: $26 \equiv 16 \pmod{10}$. 已知 $n = C_{10}^0 + C_{10}^1 \cdot 8 + C_{10}^2 \cdot 8^2 + \cdots + C_{10}^{10} \cdot 8^{10}$, 满足 $n \equiv p \pmod{10}$, 则 p 可以是

- A. 23 B. 21 C. 19 D. 17

二、多项选择题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图象如右图所示, 则下列四个函数图象与函数解析式对应正确的是



10. 已知 α, β 是两个平面, m, n 是两条直线, 则下列结论正确的是

- A. 如果 $m \perp \alpha, n \parallel \alpha$, 那么 $m \perp n$ B. 如果 $m \perp n, m \perp \alpha, n \parallel \beta$, 那么 $\alpha \perp \beta$
 C. 如果 $\alpha \parallel \beta, m \subset \alpha$, 那么 $m \parallel \beta$ D. 如果 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ 且 $\alpha \parallel \beta$, 那么 $m \parallel n$

11. 已知函数 $f(x) = 2\sin x - \sin 2x$, 则下列结论正确的是

- A. $f(x)$ 的周期为 2π B. $y = f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
 C. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $f(x)$ 在区间 $(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ 上单调递减

12. 如右图所示的数表中, 第 1 行是从 1 开始的正奇数, 从第 2 行开始每个数是它肩上两个数之和. 则下列说法正确的是

1	3	5	7	9	11	...
4	8	12	16	20	...	
	12	20	28	36	...	
		...				

- A. 第 6 行第 1 个数为 192
 B. 第 10 行的数从左到右构成公差为 2^{10} 的等差数列
 C. 第 10 行前 10 个数的和为 95×2^9
 D. 数表中第 2021 行第 2021 个数为 6061×2^{2020}

三、填空题:本大题共 4 个小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 在一次期中考试中某学校高三全部学生的数学成绩 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 若 $P(X \geq 90) = 0.5$, 且 $P(X \geq 110) = 0.2$, 则 $P(X \leq 70) =$ _____.

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-1)^2 + 1, & x > 1, \end{cases}$ 则不等式 $f(1 - |x|) + f(2) > 0$ 的解集为 _____.

15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 A, B 在椭圆上, 且满足 $\overrightarrow{AF_1} = 2\overrightarrow{F_1B}$, $\overrightarrow{AF_2} \cdot \overrightarrow{AF_1} = 0$, 则椭圆 C 的离心率为 _____.

16. 阿基米德在他的著作《论圆和圆柱》中, 证明了数学史上著名的圆柱容球定理: 圆柱的内切球(与圆柱的两底面及侧面都相切的球)的体积与圆柱的体积之比等于它们的表面积之比. 可证明该定理推广到圆锥容球也正确, 即圆锥的内切球(与圆锥的底面及侧面都相切的球)的体积与圆锥体积之比等于它们的表面积之比, 则该比值的最大值为 _____.

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知正项等比数列 $\{a_n\}$, 其中 a_1, a_2, a_3 分别是下表第一、二、三行中的某一个数, 令 $b_n = 2\log_2 a_n$.

	第一列	第二列	第三列
第一行	5	3	2
第二行	4	10	9
第三行	18	8	11

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{\frac{1}{b_n^2 - 1}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_n < \frac{1}{2}$.

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , M 是 AC 上的点, BM 平分 $\angle ABC$, $\triangle ABM$ 的面积是 $\triangle BCM$ 面积的 2 倍.

(1) 求 $\frac{\sin C}{\sin A}$;

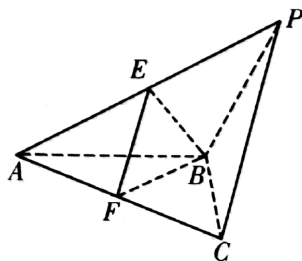
(2) 若 $\cos B = \frac{1}{4}$, $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (12 分)

如图, 已知 $\triangle ABC$ 是以 AC 为底边的等腰三角形, 将 $\triangle ABC$ 绕 AB 转动到 $\triangle PAB$ 位置, 使得平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , 连接 PC , E, F 分别是 PA, CA 的中点.

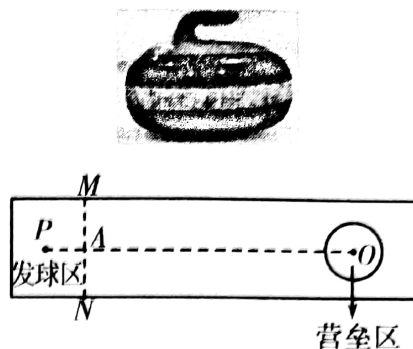
(1) 证明: $EF \perp AB$;

(2) 在① $S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{3}$, ② 点 P 到平面 ABC 的距离为 3, ③ 直线 PB 与平面 ABC 所成的角为 60° 这三个条件中选择两个作为已知条件, 求二面角 $E-BF-A$ 的余弦值.



20. (12 分)

第 24 届冬季奥运会将于 2022 年 2 月 4 日至 2 月 20 日在中国举行,其中冰壶比赛项目是本届奥运会的正式比赛项目之一,1998 年中国女子冰壶队第一次参加奥运会冰壶比赛就获得了铜牌.冰壶比赛的场地如右图所示,其中左端(投掷线 MN 的左侧)有一个发球区,运动员在发球区边沿的投掷线 MN 将冰壶掷出,使冰壶沿冰道滑行,冰道的右端有一圆形的营垒,以场上冰壶最终静止时距离营垒区圆心 O 的远近决定胜负.



某学校冰壶队举行冰壶投掷测试,规则为:

- ①每人至多投 3 次,先在点 M 处投第一次,冰壶进入营垒区得 3 分,未进营垒区不得分;
- ②自第二次投掷开始均在点 A 处投掷冰壶,冰壶进入营垒区得 2 分,未进营垒区不得分;
- ③测试者累计得分高于 3 分即通过测试,并立即终止投掷.

已知投掷一次冰壶,甲得 3 分和 2 分的概率分别为 0.1 和 0.5,乙得 3 分和 2 分的概率分别为 0.2 和 0.4,甲,乙每次投掷冰壶的结果互不影响.

- (1)求甲通过测试的概率;
- (2)设 Y 为本次测试中乙的得分,求 Y 的分布列;
- (3)请根据测试结果来分析,甲,乙两人谁的水平较高?

21. (12 分)

设抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F ,点 $P(m, 2) (m > 0)$ 在抛物线 C 上,且满足 $|PF| = 3$.

- (1)求抛物线 C 的标准方程;
- (2)过点 $G(0, 4)$ 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点,分别以 A, B 为切点的抛物线 C 的两条切线交于点 Q ,求三角形 PQG 周长的最小值.

22. (12 分)

设函数 $f(x) = x \ln x$.

- (1)求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e^{-2}, f(e^{-2}))$ 处的切线方程;
- (2)若关于 x 的方程 $f(x) = a$ 有两个实根,设为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,证明: $x_2 - x_1 < 1 + 2a + e^{-2}$.