绝密★启用并使用完毕前

# 2021年济南市高三模拟考试

# 数学试题

本试卷共4页,22题,全卷满分150分。考试用时120分钟。

**注意事项:**

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

**一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。**

1.已知 $\alpha \in (0,\pi)$,若 $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$,则 $\tan\alpha$ 的值为

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

2.设集合 $A=\{x \mid \frac{x-1}{x}<0\}$,$B=\{x \mid x+1>0\}$,则“$x \in A$”是“$x \in B$”的

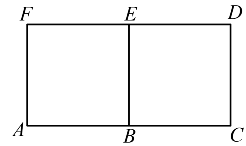
A.充要条件　　B.充分不必要条件

C.必要不充分条件　　D.既不充分也不必要条件

3.已知单位向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

4.环保部门为降低某社区在改造过程中产生的扬尘污染,决定对全部街道采取洒水降尘作业.该社区街道的平面结构如图所示(线段代表街道),洒水车随机选择 $A,B,C,D,E,F$ 中的一点驶入进行作业,则选择的驶入点使洒水车能够不重复地走遍全部街道的概率为

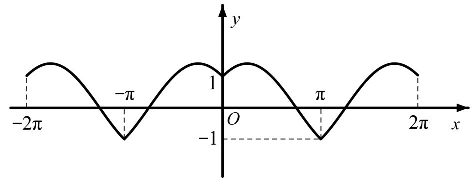



A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

5.已知双曲线 $\frac{x^2}{m+1}-\frac{y^2}{m}=1(m>0)$ 的渐近线方程为 $x \pm \sqrt{3}y=0$,则 $m=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\sqrt{3}-1$　　C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　D.2

6.函数 $y=f(x)$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 上的图象如图所示,则 $f(x)$ 的解析式可能是




A.$f(x)=\sin x+\cos x$

B.$f(x)=|\sin x|+\cos x$

C.$f(x)=\sin|x|+\cos x$

D.$f(x)=\sin|x|+|\cos x|$

7.已知菱形 $ABCD$ ,$AB=BD=2$,将 $\triangle ABD$ 沿 $BD$ 折起,使二面角 $A-BD-C$ 的大小为 $60^{\circ}$,则三棱锥 $A-BCD$ 的体积为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

8.设 $a=2\ 022\ln 2\ 020$, $b=2\ 021\ln 2\ 021$, $c=2\ 020\ln 2\ 022$,则

A. $a>c>b$　　B. $c>b>a$　　C. $b>a>c$　　D. $a>b>c$

**二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。**

9.在 $(\dfrac{2}{x}-x)^{6}$ 的展开式中,下列说法正确的是

A.常数项为 160　　B.第 4 项的二项式系数最大

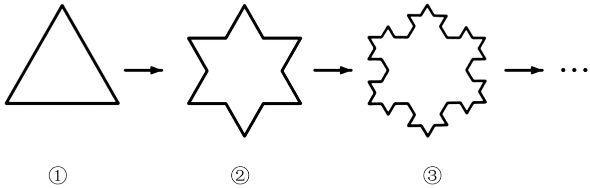
C.第 3 项的系数最大　　D.所有项的系数和为 64

10.已知函数 $f(x)=x^{3}-ax+1$ 的图象在 $x=2$ 处切线的斜率为 9,则下列说法正确的是

A. $a=3$　　B. $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值

C.当 $x\in(-2,1]$ 时, $f(x)\in(-1,3]$　　D. $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 中心对称

11.1904 年,瑞典数学家科赫构造了一种曲线.如图,取一个边长为 1 的正三角形,在每个边上以中间的 $\dfrac{1}{3}$ 为一边,向外侧凸出作一个正三角形,再把原来边上中间的 $\dfrac{1}{3}$ 擦掉,得到第 2 个图形,重复上面的步骤,得到第 3 个图形.这样无限地作下去,得到的图形的轮廓线称为科赫曲线.云层的边缘,山脉的轮廓,海岸线等自然界里的不规则曲线都可用“科赫曲线”的方式来研究,这门学科叫“分形几何学”.下列说法正确的是




A.第 4 个图形的边长为 $\dfrac{1}{81}$

B.记第 $n$ 个图形的边数为 $a_n$ ,则 $a_{n+1}=4a_n$

C.记第 $n$ 个图形的周长为 $b_n$ ,则 $b_n=3\cdot(\dfrac{4}{3})^{n-1}$

D.记第 $n$ 个图形的面积为 $S_n$ ,则对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$ ,存在正实数 $M$ ,使得 $S_n<M$

12.画法几何的创始人—法国数学家加斯帕尔·蒙日发现:与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是以椭圆中心为圆心的圆,我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,$F_1$,$F_2$ 分别为椭圆的左、右焦点,$A$,$B$ 为椭圆上两个动点.直线 $l$ 的方程为 $bx+ay-a^2-b^2=0$.下列说法正确的是

A. $C$ 的蒙日圆的方程为 $x^2+y^2=3b^2$

B.对直线 $l$ 上任意点 $P$ ,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}>0$

C.记点 $A$ 到直线 $l$ 的距离为 $d$ ,则 $d-|AF_2|$ 的最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}b$

D.若矩形 $MNGH$ 的四条边均与 $C$ 相切,则矩形 $MNGH$ 面积的最大值为 $6b^2$

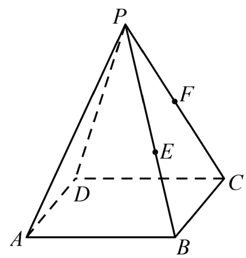
**三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。**

13.已知复数 $z=\frac{2+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}$(其中 i 为虚数单位),则 $|z|$ 的值为________.

14.设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$,若 $S_7=28$,则 $a_2+a_3+a_7$ 的值为________.

15.能够说明“若 $a>b$ ,则 $\frac{1}{a+\sqrt[3]{a}}<\frac{1}{b+\sqrt[3]{b}}$ ”是假命题的一组非零实数 $a$,$b$ 的值依次为________,________.

16.在通用技术课上,老师给同学们提供了一个如图所示的木质正四棱锥模型 $P-ABCD$ ,并要求同学们将该四棱锥切割成三个小四棱锥.某小组经讨论后给出如下方案:第一步,过点 $A$ 作一个平面分别交 $PB$,$PC$,$PD$ 于点 $E$,$F$,$G$ ,得到四棱锥 $P-AEFG$ ;第二步,将剩下的几何体沿平面 $ACF$ 切开,得到另外两个小四棱锥.在实施第一步的过程中,为方便切割,需先在模型表面画出截面四边形 $AEFG$ ,若 $\frac{PE}{PB}=\frac{3}{5}$ ,$\frac{PF}{PC}=\frac{1}{2}$ ,则 $\frac{PG}{PD}$ 的值为________.




**四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

17.(10 分)

在 $\triangle ABC$ 中,已知角 $A$,$B$,$C$ 所对的边分别是 $a$,$b$,$c$ ,$a=\sqrt{5}$ ,$b=3$ ,$\sin A+\sqrt{5}\sin B=2\sqrt{2}$.

(1)求角 $A$ 的值;(2)求 $\triangle ABC$ 的面积.

18.(12 分)

已知函数 $f(x)=\begin{cases}a(x+1)\mathrm{e}^x,x\leqslant 0,\\ x^2-ax+\frac{1}{2},x>0.\end{cases}$

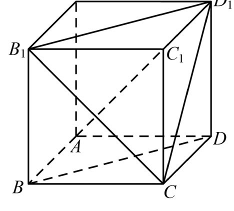
(1)若 $a=2$,求 $f(x)$ 的最小值;(2)若 $f(x)$ 恰好有三个零点,求实数 $a$ 的取值范围.

19.(12 分)

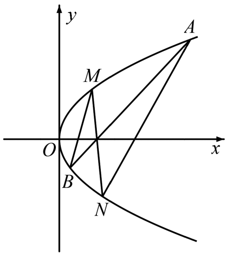
已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 和平面 $\alpha$ ,直线 $AC_1$ // 平面 $\alpha$ ,直线 $BD$ // 平面 $\alpha$ .

(1)证明:平面 $\alpha\perp$ 平面 $B_1CD_1$;

(2)点 $P$ 为线段 $AC_1$ 上的动点,求直线 $BP$ 与平面 $\alpha$ 所成角的最大值.



20.(12 分)




如图，$A,B,M,N$ 为抛物线 $y^2=2x$ 上四个不同的点，直线 $AB$ 与直线 $MN$ 相交于点 $(1,0)$，直线 $AN$ 过点 $(2,0)$.

(1)记 $A,B$ 的纵坐标分别为 $y_A,y_B$，求 $y_A\cdot y_B$ 的值；

(2)记直线 $AN,BM$ 的斜率分别为 $k_1,k_2$，是否存在实数 $\lambda$，使得 $k_2=\lambda k_1$？若存在，求出 $\lambda$ 的值；若不存在，说明理由.

21.(12 分)

某机构为研究考生物理成绩与数学成绩之间的关系，从一次考试中随机抽取 11 名考生的数据，统计如下表：

| 数学成绩 $x$ | 46 | 65 | 79 | 89 | 99 | 109 | 110 | 116 | 123 | 134 | 140 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 物理成绩 $y$ | 50 | 54 | 60 | 63 | 66 | 68 | 0 | 70 | 73 | 76 | 80 |

(1)由表中数据可知，有一位考生因物理缺考导致数据出现异常，剔除该组数据后发现，考生物理成绩 $y$ 与数学成绩 $x$ 之间具有线性相关关系，请根据这 10 组数据建立 $y$ 关于 $x$ 的回归直线方程，并估计缺考考生如果参加物理考试可能取得的成绩；

(2)已知参加该次考试的 10 000 名考生的物理成绩服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，用剔除异常数据后的样本平均值作为 $\mu$ 的估计值，用剔除异常数据后的样本标准差作为 $\sigma$ 的估计值，估计物理成绩不低于 75 分的人数 $Y$ 的期望.

附：参考数据：

| $\sum\limits_{i=1}^{11}x_i$ | $\sum\limits_{i=1}^{11}y_i$ | $\sum\limits_{i=1}^{11}x_iy_i$ | $\sum\limits_{i=1}^{11}x_i^2$ | $\sum\limits_{i=1}^{11}(y_i-\bar{y})^2$ | $\dfrac{2\ 586}{8\ 326}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 110 | 660 | 68 586 | 120 426 | 4 770 | 0.31 |

上表中的 $x_i$ 表示样本中第 $i$ 名考生的数学成绩，$y_i$ 表示样本中第 $i$ 名考生的物理成绩，$\bar{y}=\dfrac{1}{11}\sum\limits_{i=1}^{11}y_i$.

参考公式：①对于一组数据：$u_1,u_2,\cdots,u_n$，其方差：$s^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2-\bar{u}^2$.

②对于一组数据 $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$，其回归直线 $\hat{v}=\hat{a}+\hat{b}u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}$，$\hat{a}=\bar{v}-\hat{b}\bar{u}$.

③若随机变量 $\xi$ 服从 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)\approx 0.683$，$P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)\approx 0.955$，$P(\mu-3\sigma<\xi<\mu+3\sigma)\approx 0.997$.

22.(12 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\ln(a_n+1)$，$n\in\mathbf{N}_+$.

证明：(1) $a_{n+1}<a_n$；(2) $a_n-2a_{n+1}<a_n\cdot a_{n+1}$；(3) $\dfrac{1}{2^n}<a_n\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}$.