

高三数学试题

2021. 3

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,第 I 卷 1—3 页,第 II 卷 3—6 页,共 150 分,测试时间 120 分钟.

注意事项:

选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案,不能答在测试卷上.

第 I 卷(共 60 分)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{16 - x^2}\}$, $B = \{x | \lg(x - 2) \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$
A. $(2, 3]$ B. $[-4, 4]$ C. $[2, 4]$ D. $(2, 4]$

2. 复数 $z = \frac{1 - 2i}{1 + i^3}$ 的共轭复数的虚部为

A. $-\frac{1}{2}i$ B. $\frac{1}{2}i$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

3. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $a < b$ 是 $a^2(e^a - e^b) < 0$ 的

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 《史记》卷六十五《孙子吴起列传第五》中有这样一道题:齐王与田忌赛马,田忌的上等马劣于齐王的上等马,优于齐王的中等马,田忌的中等马劣于齐王的中等马,优于齐王的下等马,田忌的下等马劣于齐王的下等马,现两人进行赛马比赛,比赛规则为:每匹马只能用一次,每场比赛双方各出一匹马,共比赛三场.每场比赛中胜者得 1 分,否则得 0 分.若每场比赛之前彼此都不知道对方所用之马,则比赛结束时,田忌得 2 分的概率为

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

5. 已知 $\sin \alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{3}$, 则 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{6})$ 的值为

A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

6. 已知向量 a, b 满足 $|a| = 4, |b| = 5, a \cdot b = 4$, 则 $\cos \langle a, a + b \rangle =$

A. $\frac{5}{7}$ B. $\frac{3}{7}$ C. $-\frac{2}{7}$ D. $-\frac{5}{7}$

7. 设函数 $f(x) = xe^x - a(x - 1)$, 其中 $a < 1$, 若存在唯一整数 x_0 , 使得 $f(x_0) < a$, 则 a 的取值范围是

A. $[-\frac{1}{e^2}, 1)$ B. $[-\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e})$ C. $[\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e})$ D. $[\frac{1}{e^2}, 1)$

8. 英国著名物理学家牛顿用“作切线”的方法求函数零点时,给出的“牛顿数列”在航空航天中应用广泛,若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列.如果函数

$f(x) = x^2 - x - 2$, 数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列, 设 $a_n = \ln \frac{x_n - 2}{x_n + 1}$ 且 $a_1 = 1, x_n > 2$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_{2021} =$

A. $2^{2021} - 1$ B. $2^{2021} - 2$ C. $(\frac{1}{2})^{2021} - \frac{1}{2}$ D. $(\frac{1}{2})^{2021} - 2$

二、多选题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 3 分)

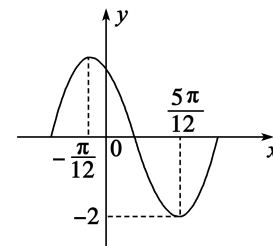
9. 2020 年是全面实现小康社会目标的一年,也是全面打赢脱贫攻坚战的一年,某研究性学习小组调查了某脱贫县的甲、乙两个家庭,对他们过去 6 年(2014 年到 2019 年)的家庭收入情况分别进行统计,得到这两个家庭的年人均纯收入(单位:百元/人)茎叶图.对甲、乙两个家庭的年人均纯收入(以下分别简称“甲”“乙”)情况的判断,正确的是

A. 过去的 6 年,“甲”的极差小于“乙”的极差
B. 过去的 6 年,“甲”的平均值小于“乙”的平均值
C. 过去的 6 年,“甲”的中位数小于“乙”的中位数
D. 过去的 6 年,“甲”的平均增长率小于“乙”的平均增长率

		甲			乙	
8	7	7	6	3	4	6
		2	0	4	0	1
						8
						9

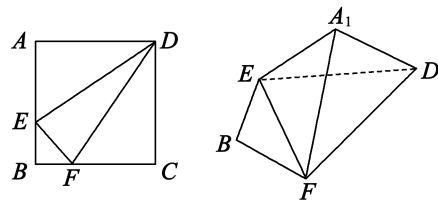
10. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的部分图像如图所示,将函数 $f(x)$ 的图像上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{2}{3}$, 纵坐标不变,再将所得函数图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,得到函数 $g(x)$ 的图像,则下列关于函数 $g(x)$ 的说法正确的是

A. $g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$
B. $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增
C. $g(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{4\pi}{9}$ 对称
D. $g(x)$ 的图像关于点 $(\frac{\pi}{9}, 0)$ 成中心对称



11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, A, B 分别为双曲线的左、右顶点, F_1, F_2 为左、右焦点, $|F_1F_2| = 2c$, 且 a, b, c 成等比数列, 点 P 是双曲线 C 的右支上异于点 B 的任意一点, 记 PA, PB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则下列说法正确的是
- A. 当 $PF_2 \perp x$ 轴时, $\angle PF_1F_2 = 30^\circ$
- B. 双曲线的离心率 $e = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- C. k_1k_2 为定值 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- D. 若 I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心, 满足 $S_{\triangle IPF_1} = S_{\triangle IPF_2} + xS_{\triangle IF_1F_2} (x \in \mathbf{R})$, 则 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

12. 如图, 在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在边 AB, BC 上 (不含端点) 且 $BE = BF$, 将 $\triangle AED, \triangle DCF$ 分别沿 DE, DF 折起, 使 A, C 两点重合于点 A_1 , 则下列结论正确的有



- A. $A_1D \perp EF$
- B. 当 $BE = BF = \frac{1}{2}BC$ 时, 三棱锥 A_1-DEF 的外接球体积为 $\sqrt{6}\pi$
- C. 当 $BE = BF = \frac{1}{4}BC$ 时, 三棱锥 A_1-DEF 的体积为 $\frac{2\sqrt{17}}{3}$
- D. 当 $BE = BF = \frac{1}{4}BC$ 时, 点 A_1 到平面 DEF 的距离为 $\frac{4\sqrt{17}}{7}$

第 II 卷 (共 90 分)

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 若二项式 $(1+2x)^n (n \in \mathbf{N}_+)$ 的展开式中所有项的二项式系数和为 32, 则该二项式展开式中含有 x^3 项的系数为_____.
14. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 点 A, B 在抛物线上, 且分别位于 x 轴的上、下两侧, 若 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 5$, 则直线 AB 过定点_____.

15. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中, AP, AB, AC 三条棱两两垂直, 且长度均为 $2\sqrt{3}$, 以顶点 P 为球心, 4 为半径作一个球, 则该球面被三棱锥四个表面截得的所有弧长之和为_____.
16. 设定义在 D 上的函数 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $l: y = g(x)$, 当 $x \neq x_0$ 时, 若 $\frac{g(x) - f(x)}{x - x_0} < 0$ 在 D 内恒成立, 则称 P 点为函数 $y = f(x)$ 的“类对称中心点”, 则函数 $h(x) = \frac{x^2}{2e} + \ln x$ 的“类对称中心点”的坐标为_____.

四、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

$$\text{在 } \textcircled{1} a \sin C = c \sin(A + \frac{\pi}{3}) \quad \textcircled{2} b = a \cos C + \frac{\sqrt{3}}{3} c \sin A$$

$$\textcircled{3} a \cos B + b \cos A = 2c \cos A$$

这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 并给出解答.

问题: 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\triangle ABC$ 外接圆面积为 $\frac{4}{3}\pi$,

$\sin B = 2 \sin C$, 且_____, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

(注: 如果选择多个条件分别解答, 则按第一个解答计分)

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = (n-1)2^{n+1} + 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{\frac{1}{\log_2 a_n \log_2 a_{n+2}}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_n < \frac{3}{4}$.

19. (本小题满分 12 分)

2021 年春晚首次采用“云”传播,“云”互动形式,实现隔空连线心意相通,全球华人心连心“云团圆”,共享新春氛围,“云课堂”亦是一种真正完全突破时空限制的全方位互动性学习模式.某市随机抽取 200 人对“云课堂”倡议的了解情况进行了问卷调查,记 Y 表示了解,N 表示不了解,统计结果如下表所示:

了解情况	Y	N
人数	140	60

(表一)

	男	女	合计
Y	80		
N		40	
合计			

(表二)

- (1)请根据所提供的数据,完成上面的 2×2 列联表(表二),并判断是否有 99% 的把握认为对“云课堂”倡议的了解情况与性别有关系;
- (2)用样本估计总体,将频率视为概率,在男性市民和女性市民中各随机抽取 4 人,记“4 名男性中恰有 3 人了解云课堂倡议”的概率为 P_1 ,”4 名女性中恰有 3 人了解云课堂倡议”的概率为 P_2 .试求出 P_1 与 P_2 ,并比较 P_1 与 P_2 的大小.

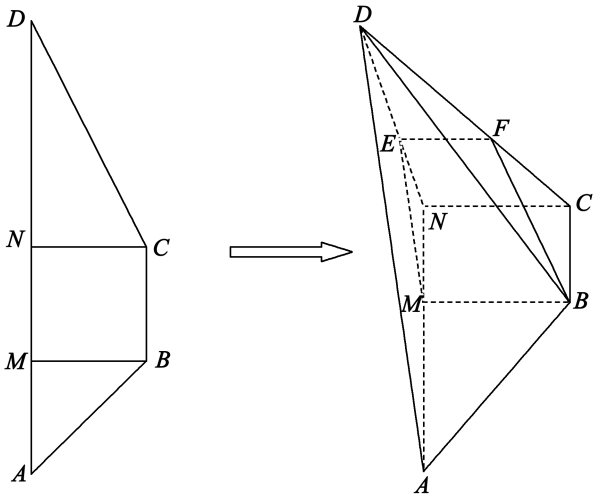
附:临界值参考表的参考公式

$p(K^2 \geq K_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
K_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$(K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}), \text{其中 } n=a+b+c+d)$$

20. (本小题满分 12 分)

如图,四边形 ABCD 为梯形, $AD \parallel BC$, $BM \perp AD$ 于 M, $CN \perp AD$ 于 N, $\angle A = 45^\circ$, $AD = 4BC = 4$, $AB = \sqrt{2}$,现沿 CN 将 $\triangle CDN$ 折起,使 $\triangle ADN$ 为正三角形,且平面 $ADN \perp$ 平面 $ABCN$,过 BM 的平面与线段 DN、DC 分别交于 E、F.



- (1)求证: $EF \perp DA$;
- (2)在棱 DN 上(不含端点)是否存在点 E,使得直线 DB 与平面 BMEF 所成角的正弦值为 $\frac{3}{4}$,若存在,请确定 E 点的位置;若不存在,说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ,椭圆上的点到焦点 F_1 的距离的最小值为 $\sqrt{5} - 1$,以椭圆 E 的短轴为直径的圆过点 $(2, 0)$.

- (1)求椭圆 E 的标准方程;
- (2)若过 F_2 的直线交椭圆 E 于 A、B 两点,过 F_1 的直线交椭圆 E 于 C、D 两点,且 $AB \perp CD$,求四边形 ACBD 面积的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = xe^{3x} - (a+1)\ln x + \frac{2}{x} - 1, g(x) = -a\ln x + (a+2)x + \frac{2}{x}$.

定义新函数 $d(f, g) = |f(x) - g(x)|_{\min}$.

- (1)当 $a \leq -2$ 时,讨论函数 $g(x)$ 的单调性;
- (2)若新函数 $d(f, g)$ 的值域为 $[0, +\infty)$,求 a 的取值范围.

高三数学试题参考答案

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. D 2. D 3. B 4. C 5. B 6. A 7. C 8. A

二、多选题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 3 分)

9. ACD 10. AC 11. BCD 12. ACD

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 80 14. (5, 0) 15. 3π 16. $(\sqrt{e}, 1)$

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 解:若选①:因为 $a \sin C = c \sin(A + \frac{\pi}{3})$

在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理得 $\sin A \sin C = \sin C \sin(A + \frac{\pi}{3})$ 1 分

因为 $0 < C < \pi$,所以 $\sin C \neq 0$,所以 $\sin A = \sin(A + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A$ 3 分

即 $\frac{1}{2} \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A$,所以 $\tan A = \sqrt{3}$ 4 分

因为 $0 < A < \pi$,所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 5 分

因为 $\triangle ABC$ 外接圆面积为 $\frac{4}{3}\pi$,所以半径 $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,由 $\frac{a}{\sin A} = 2r$ 得: $a = 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin A = 2$
..... 6 分

又 $\sin B = 2 \sin C$ 所以 $b = 2c$ 7 分

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 得 $4 = 4c^2 + c^2 - 2c^2$

解得 $c^2 = \frac{4}{3}$,即 $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 9 分

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 10 分

若选②:由正弦定理得: $\sin B = \sin A \cos C + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin A$ 1 分

$\sin(A + C) = \sin A \cos C + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin A$

$\sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin A \cos C + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin A$

化简得: $\cos A \sin C = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin C \sin A$ 3 分

因为 $0 < C < \pi$,所以 $\sin C \neq 0$,所以 $\tan A = \sqrt{3}$ 4 分

因为 $0 < A < \pi$,所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 5 分

其余步骤同①

若选③:由正弦定理得: $\sin A \cos B + \sin B \cos A = 2 \sin C \cos A$ 1 分

所以 $\sin(A + B) = 2 \sin C \cos A$,所以 $\sin C = 2 \sin C \cos A$ 3 分

因为 $0 < C < \pi$,所以 $\sin C \neq 0$,所以 $\cos A = \frac{1}{2}$ 4 分

因为 $0 < A < \pi$,所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 5 分

其余步骤同①

18. (1)由题意: $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = (n-1)2^{n+1} + 2$ ①

当 $n \geq 2$ 时, $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1} = (n-2)2^n + 2$ ② 2 分

①-②得 $na_n = (n-1)2^{n+1} - (n-2)2^n$ 即 $a_n = 2^n$ 3 分

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 2$ 满足上式 4 分

所以 $a_n = 2^n$ 5 分

(2)因为 $\log_2 a_n = \log_2 2^n = n$ 6 分

所以 $\frac{1}{\log_2 a_n \cdot \log_2 a_{n+2}} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$ 8 分

所以 $T_n = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$ 9 分

$= \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$ 11 分

又 $\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} > 0$,所以 $T_n < \frac{3}{4}$ 12 分

19. (1)

	男	女	合计
Y	80	60	140
N	20	40	60
合计	100	100	200

..... 2 分

$$K^2 = \frac{200(80 \times 40 - 60 \times 20)^2}{100 \times 100 \times 140 \times 60} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= \frac{200}{21} \approx 9.524 > 6.635 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

对照临界值表知,有 99%的把握认为对“云课堂”倡议了解情况与性别有关系 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}

(2)用样本估计总体,将频率视为概率,根据 2×2 列联表得出

$$\text{男性了解“云课堂”倡议的概率为 } \frac{80}{100} = \frac{4}{5} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{女性了解“云课堂”倡议的概率为 } \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{故 } P_1 = C_4^3 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{256}{625} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$P_2 = C_4^3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{216}{625} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{显然 } P_1 > P_2 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. (1)证明:因为 $BM \perp AD, CN \perp AD$,所以 $BM \parallel CN$ \dots\dots\dots 1 \text{ 分}

在四棱锥 $D-ABCN$ 中, $CN \subset$ 平面 CDN

$BM \not\subset$ 平面 CDN ,所以 $BM \parallel$ 平面 CDN \dots\dots\dots 2 \text{ 分}

又平面 $BMEF \cap$ 平面 $CDN = EF$

所以 $BM \parallel EF$ \dots\dots\dots 3 \text{ 分}

因为平面 $ADN \perp$ 平面 $ABCN$ 且交于 $AN, BM \perp AN$

所以 $BM \perp$ 平面 ADN ,即 $EF \perp$ 平面 ADN \dots\dots\dots 4 \text{ 分}

又 $DA \subset$ 平面 ADN ,所以 $EF \perp DA$ \dots\dots\dots 5 \text{ 分}

(2)解:存在, E 为棱 DN 上靠近 N 点的四等分点.

因为 $DA = DN, AM = MN = 1$

连接 DM ,所以 $DM \perp AN$,又平面 $ADN \perp$ 平面 $ABCN$ 且交于 AN

故 $DM \perp$ 平面 $ABCN$ \dots\dots\dots 6 \text{ 分}

如图建立空间直角坐标系 $\{M; \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}\}$

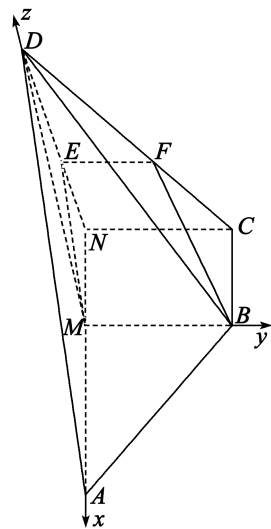
$$D(0,0,\sqrt{3}), B(0,1,0), M(0,0,0), N(-1,0,0)$$

$$\overrightarrow{DB} = (0,1,-\sqrt{3}), \overrightarrow{BM} = (0,-1,0), \overrightarrow{ND} = (1,0,\sqrt{3})$$

$$\text{设 } \overrightarrow{NE} = \lambda \overrightarrow{ND}, (0 < \lambda < 1) \text{ 则 } E(\lambda-1,0,\sqrt{3}\lambda), \overrightarrow{ME} = (\lambda-1,0,\sqrt{3}\lambda) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

设平面 $BMEF$ 的一个法向量 $\mathbf{n} = (x,y,z)$,则

$$\begin{cases} \overrightarrow{BM} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \overrightarrow{ME} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -y = 0 \\ (\lambda-1)x + \sqrt{3}\lambda z = 0 \end{cases}$$



$$\text{不妨令 } x = \sqrt{3}\lambda, \text{ 则 } z = 1 - \lambda, \mathbf{n} = (\sqrt{3}\lambda, 0, 1 - \lambda) \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

设直线 DB 与平面 $BMEF$ 所成的角为 α ,则有

$$\sin \alpha = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{DB} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{DB}|} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}(\lambda-1)}{2\sqrt{3\lambda^2 + (1-\lambda)^2}} \right| = \frac{3}{4}$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{4} \text{ 或 } -\frac{1}{2} \text{ (舍)} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以 $\overrightarrow{NE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{ND}$,即在棱 DN 上存在点 E ,使得直线 DB 与平面 $BMEF$ 所成角的正弦

值为 $\frac{3}{4}$, E 为棱 DN 上靠近 N 点的四等分点. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}

21. 解:(1)由题意知, $b = 2, a - c = \sqrt{5} - 1$ \dots\dots\dots 1 \text{ 分}

$$\text{又 } a^2 = b^2 + c^2, \text{ 解得 } a = \sqrt{5}, c = 1$$

$$\text{所以椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 设四边形 } ACBD \text{ 面积为 } S, \text{ 则 } S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|$$

$$\text{① 当 } AB \perp x \text{ 轴时}, |\overrightarrow{AB}| = \frac{2b^2}{a}, |\overrightarrow{CD}| = 2a, \text{ 所以 } S = \frac{1}{2} \times \frac{2b^2}{a} \times 2a = 2b^2 = 8 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{② 当 } CD \perp x \text{ 轴时}, |\overrightarrow{CD}| = \frac{2b^2}{a}, |\overrightarrow{AB}| = 2a, \text{ 所以 } S = \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{2b^2}{a} = 2b^2 = 8 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

③ 当 AB 和 CD 都不与 x 轴垂直时,直线 AB 斜率存在且不为 0,设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 AB 斜率为 k ,则直线 CD 斜率为 $-\frac{1}{k}$,

$$l_{AB}: y = k(x-1), \text{ 联立方程 } \begin{cases} y = k(x-1) \\ \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得:}$$

$$(5k^2 + 4)x^2 - 10k^2x + 5k^2 - 20 = 0 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\Delta = (-10k^2)^2 - 4(5k^2 + 4)(5k^2 - 20) = 320(k^2 + 1) > 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{10k^2}{5k^2 + 4}, x_1 x_2 = \frac{5k^2 - 20}{5k^2 + 4} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{320(k^2+1)}}{5k^2+4} = \frac{8\sqrt{5}(k^2+1)}{5k^2+4} \quad (*) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

过 F_2 做直线 CD 的平行线和椭圆 E 交于点 C_1, D_1 ,由对称性知 $|C_1 D_1| = |CD|$

$$\text{在 } (*) \text{ 中把 } k \text{ 换成 } -\frac{1}{k}, \text{ 得 } |C_1 D_1| = \frac{8\sqrt{5}(\frac{1}{k^2}+1)}{\frac{5}{k^2}+4} = \frac{8\sqrt{5}(k^2+1)}{4k^2+5}$$

所以 $|CD| = \frac{8\sqrt{5}(k^2+1)}{4k^2+5}$ 8 分

所以 $S = \frac{1}{2} |AB| |CD| = \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{5}(k^2+1)}{5k^2+4} \times \frac{8\sqrt{5}(k^2+1)}{4k^2+5} = \frac{160(k^2+1)^2}{(5k^2+4)(4k^2+5)}$ 9 分

令 $k^2+1=t$, 则 $t>1$, 所以 $S = \frac{160t^2}{(5t-1)(4t+1)} = \frac{160t^2}{20t^2+t-1} = \frac{160}{-(\frac{1}{t})^2 + \frac{1}{t} + 20}$ 10 分

令 $\frac{1}{t}=u$, 则 $u \in (0,1)$, 所以 $S = \frac{160}{-u^2+u+20} = \frac{160}{-(u-\frac{1}{2})^2 + \frac{81}{4}}$ 11 分

因为 $-(u-\frac{1}{2})^2 + \frac{81}{4} \in (20, \frac{81}{4}]$, 所以 $S \in [\frac{640}{81}, 8)$

综上所述: 四边形 ACBD 面积取值范围是 $[\frac{640}{81}, 8]$ 12 分

22. (1) $g'(x) = -\frac{a}{x} + (a-2) - \frac{2}{x^2}$
 $= \frac{(a+2)x^2 - ax - 2}{x^2} (x>0)$ 1 分

当 $a+2=0$ 即 $a=-2$ 时, $g'(x) = \frac{2x-2}{x^2}$

令 $g'(x)>0$ 得 $x>1$, 令 $g'(x)<0$ 得 $0<x<1$

$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, $(1,+\infty)$ 上单调递增 2 分

当 $a<-2$ 时 $g'(x) = \frac{(a+2)(x-1)(x+\frac{2}{a+2})}{x^2}$

① 当 $-\frac{2}{a+2}>1$ 即 $-4<a<-2$ 时, 令 $g'(x)>0$ 得 $1<x<-\frac{2}{a+2}$, 令 $g'(x)<0$ 得 $0<x<1$,

或 $x>-\frac{2}{a+2}$. $g(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(-\frac{2}{a+2}, +\infty)$ 上单调递减

在 $(1, -\frac{2}{a+2})$ 上单调递增 3 分

② 当 $-\frac{2}{a+2}=1$ 即 $a=-4$ 时, $g'(x) = \frac{-2(x-1)^2}{x^2} < 0$

$g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减 4 分

③ 当 $a<-4$ 时, 令 $g'(x)>0$ 得 $-\frac{2}{a+1}<x<1$, 令 $g'(x)<0$ 得 $0<x<-\frac{2}{a+1}$ 或 $x>1$.

所以 $g(x)$ 在 $(0, -\frac{2}{a+1})$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $(-\frac{2}{a+1}, 1)$ 上单调递增 5 分

综上所述: $a=-2$ 时, $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, $(1, +\infty)$ 上单调递增

$-4<a<-2$ 时, $g(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(-\frac{2}{a+2}, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(1, -\frac{2}{a+2})$ 上单调递增

$a=-4$ 时, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减

$a<-4$ 时, $g(x)$ 在 $(0, -\frac{2}{a+1})$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $(-\frac{2}{a+1}, 1)$ 上单调递增 6 分

(2) 因为 $|f(x)-g(x)|_{\min} \in [0, +\infty)$

所以 $f(x)-g(x)=0$ 有解

即 $a+2=e^{3x}-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解 7 分

令 $h(x) = e^{3x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{3x^2 e^{3x} + \ln x}{x^2}$

令 $u(x) = 3x^2 e^{3x} + \ln x$, 则 $u'(x) = 6x e^{3x} + 9x^2 e^{3x} + \frac{1}{x} > 0$

显然 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

又 $u(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} e - \ln 3 < 0$, $u(1) = 3e^3 > 0$

$\exists x_0 \in (\frac{1}{3}, 1)$, 使 $u(x_0) = 3x_0^2 e^{3x_0} + \ln x_0 = 0$ 8 分

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $u(x) < 0$, 即 $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $u(x) > 0$, 即 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增

故 $h(x)_{\min} = h(x_0) = e^{3x_0} - \frac{\ln x_0}{x_0} - \frac{1}{x_0}$ 9 分

且 $x \rightarrow +\infty$, $h(x) \rightarrow +\infty$

由 $h'(x_0) = 3x_0^2 e^{3x_0} + \ln x_0 = 0$, 得 $3x_0^2 e^{3x_0} = -\ln x_0$

即 $e^{3x_0} \ln e^{3x_0} = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0}$

令 $V(x) = x \ln x (x>1)$

$V'(x) = 1 + \ln x > 0$, 所以 $V(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

又 $e^{3x_0} > 1$, $\frac{1}{x_0} > 1$

故 $e^{3x_0} = \frac{1}{x_0}$, 即 $3x_0 = -\ln x_0$ 10 分

所以 $-\frac{\ln x_0}{x_0} = 3$

$h(x)_{\min} = h(x_0) = e^{3x_0} - \frac{\ln x_0}{x_0} - \frac{1}{x_0} = 3$ 11 分

即 $a+2 \geq 3 \quad \therefore a \geq 1$ 12 分