

数学试题 (理科)

(考试时间: 120 分钟 满分: 150 分)

注意事项:

1. 答题前, 务必在答题卡和答题卷规定的地方填写自己的姓名、准考证号和座位号后两位。
2. 答第 I 卷时, 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。
3. 答第 II 卷时, 必须使用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卷上书写, 要求字体工整、笔迹清晰。作图题可先用铅笔在答题卷规定的位置画出, 确认后再用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔描清楚。必须在题号所指示的答题区域作答, 超出答题区域书写的答案无效, 在试题卷、草稿纸上答题无效。
4. 考试结束, 务必将答题卡和答题卷一并上交。

第 I 卷 (满分 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 满分 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$ 与 $B = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$ 关系的 Venn 图如图所示, 则阴影部分表示集合的元素共有

- A. 1 个 B. 2 个
C. 3 个 D. 4 个

2. 设 $z = \frac{1+i}{2i} + i$ (i 是虚数单位), 则 $|z| =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

3. 如图, 网格纸中小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是一个几何体的三视图, 则该几何体最长棱的长度为

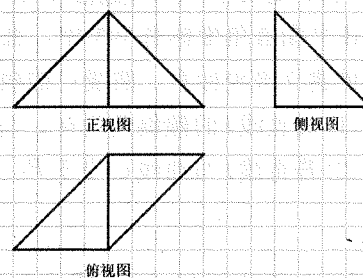
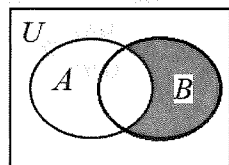
- A. $4\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{2}$
C. $8\sqrt{2}$ D. 8

4. 在平面直角坐标系中, 已知点 $P(\cos t, \sin t)$, $A(2, 0)$,

当 t 由 $\frac{\pi}{3}$ 变化到 $\frac{2\pi}{3}$ 时, 线段 AP 扫过形成图形的面积等于

- A. 2 B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{12}$

5. 已知曲线 $C: y = \cos 2x$, 曲线 $E: y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 则下面结论正确的是



- A. 把 C 上各点横坐标伸长到原来 2 倍 (纵坐标不变) 后, 再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到曲线 E
B. 把 C 上各点横坐标伸长到原来 2 倍 (纵坐标不变) 后, 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到曲线 E
C. 把 C 上各点横坐标缩短到原来 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变) 后, 再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到曲线 E
D. 把 C 上各点横坐标缩短到原来 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变) 后, 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到曲线 E

6. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & 0 < x < 2 \\ 4-x, & x \geq 2 \end{cases}$ 满足 $f(a) = f(2^a)$, 则 $f(2a)$ 的值等于

- A. 2 B. 0 C. -2 D. -4

7. 右图上半部分为一个油桃园。每年油桃成熟时, 园主都要雇佣人工采摘, 然后沿两条路径将采摘好的油桃迅速地运送到水果集散地 C 处销售。路径 1: 先将油桃集中到 A 处, 再沿公路 AC 运送; 路径 2: 先将油桃集中到 B 处, 再沿公路 BC 运送。已知 $AC = 3\text{km}$, $BC = 4\text{km}$ 。为了减少运送时间, 园主在油桃园中画定了一条界线, 使得位于界线一侧的采摘工按路径 1 运送路程较近, 另一侧的采摘工按路径 2 运送路程较近。若这条界线是曲线 E 的一部分, 则曲线 E 为

- A. 圆 B. 椭圆 C. 双曲线 D. 抛物线

8. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数, 公比为 q , 则下列结论错误的是

- A. 若 $a_1 a_2 > 0$, 则 $a_2 a_3 > 0$ B. 若 $a_1 + a_2 < 0$, 且 $a_1 + a_3 < 0$, 则 $q > -1$
C. 若 $a_{n+1} > a_n > 0$, 则 $a_n + a_{n+2} > 2a_{n+1}$ D. 若 $a_n a_{n+1} < 0$, 则 $(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} - a_{n+2}) < 0$

9. 某市抗洪指挥部接到最新雨情通报, 未来 24h 城区拦洪坝外洪水将超过警戒水位, 因此需要紧急抽调工程机械加高加固拦洪坝。经测算, 加高加固拦洪坝工程需要调用 20 台某型号翻斗车, 每辆翻斗车需要平均工作 24h。而抗洪指挥部目前只有一辆翻斗车可立即投入施工, 其余翻斗车需要从其他施工现场抽调。若抽调的翻斗车每隔 20min 才有一辆到达施工现场投入工作, 要在 24h 内完成拦洪坝加高加固工程, 指挥部至少还需要抽调这种型号翻斗车

- A. 25 辆 B. 24 辆 C. 23 辆 D. 22 辆

10. 已知圆 $C: x^2 + y^2 + 4x + 1 = 0$, 过圆外一点 P 作圆 C 的切线, 切点为 A 。若 $|PA| = \sqrt{2}|PO|$ (O 为坐标原点), 则 $|PC|$ 的最小值为

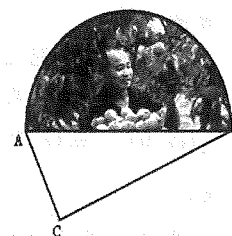
- A. 4 B. $4 - \sqrt{2}$ C. $4 - \sqrt{3}$ D. $4 - \sqrt{5}$

11. 已知函数 $f(x) = x \ln \frac{a}{x} + ae^x$, $g(x) = -x^2 + x$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是

- A. $\left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ C. $[1, +\infty)$ D. $[e, +\infty)$

12. 几何中常用 $|L|$ 表示 L 的测度, 当 L 为曲线、平面图形和空间几何体时, $|L|$ 分别对应其长度、面积和体积。在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$, P 为 $\triangle ABC$ 内部一动点 (含边界), 在空间中, 到点 P 的距离为 1 的点的轨迹为 L , 则 $|L|$ 等于

- A. $6\pi + 12$ B. $\frac{22\pi}{3} + 6$ C. $\frac{20}{3}\pi + 12$ D. $\frac{22\pi}{3} + 12$



第II卷 (90分)

本卷包括必考题和选考题两部分.第13题—第21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22题、第23题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,满分20分.把答案填在答题卡上的相应位置.

- 13.已知 $\triangle ABC$ 的重心为 G ,若 $\overrightarrow{BG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$,则 $x - y =$ _____.
- 14.已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ,直线 $y = 4$ 与 y 轴的交点为 P ,与抛物线 C 的交点为 Q ,且 $|QF| = 2|PQ|$,则抛物线 C 的方程为_____.
- 15.为庆祝中国共产党成立100周年,某校以班级为单位组织开展“走进革命老区,学习党史文化”研学游活动.该校高一年级部10个班级分别去3个革命老区开展研学游,每个班级只去1个革命老区,每个革命老区至少安排3个班级,则不同的安排方法共有_____种(用数字作答).
- 16.天文学家卡西尼在研究土星及其卫星的运行规律时发现:平面内到两个定点的距离之积为常数的点的轨迹是卡西尼卵形线(Cassini Oval).在平面直角坐标系中,设定点为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$,点 O 为坐标原点,动点 $P(x, y)$ 满足 $|PF_1| \cdot |PF_2| = a^2 (a \geq 0 \text{ 且为常数})$,化简得曲线 $E: x^2 + y^2 + c^2 = \sqrt{4x^2c^2 + a^4}$.下列四个命题中,正确命题的序号是_____.

(将你认为正确的命题的序号都填上)

①曲线 E 既是中心对称又是轴对称图形;

②当 $a = c$ 时, $|PO|$ 的最大值为 $\sqrt{2}a$;

③ $|PF_1| + |PF_2|$ 的最小值为 $2a$;

④ $\triangle F_1PF_2$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}a^2$.

三、解答题:本大题共6小题,满分70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本小题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\frac{a}{b} = \sqrt{2} \sin\left(C + \frac{\pi}{4}\right)$.

(1)求 B ;

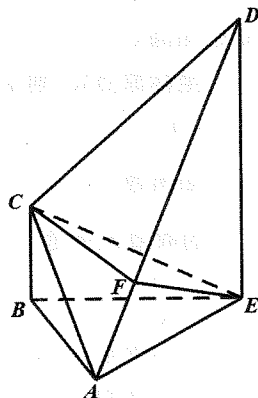
(2)若 $b^2 = (2 - \sqrt{2})ac$, $c = 2$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

18.(本小题满分12分)

如图,在四棱锥 $A-BCDE$ 中, $BC \perp$ 平面 ABE ,且 $DE \parallel BC$,
 $DE = 3BC = 6$, $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle DAE = \angle ABE = 60^\circ$.

(1)求证: $AE \perp AC$;

(2)设 F 为棱 AD 上一点,且 $AB \parallel$ 平面 CEF ,求二面角 $D-CF-E$ 的大小.



19.(本小题满分12分)

某中学组织学生前往电子科技产业园,学习加工制造电子产品.该电子产品由 A, B 两个系统组成,其中 A 系统由3个电子元件组成, B 系统由5个电子元件组成.各个电子元件能够正常工作的概率均为 $p (0 < p < 1)$,且每个电子元件能否正常工作相互独立.每个系统中有超过一半的电子元件正常工作,则该系统可以正常工作,否则就需要维修.

(1)当 $p = \frac{1}{2}$ 时,每个系统维修费用均为200元.设 ξ 为该电子产品需要维修的总费用,求 ξ 的分布列与数学期望;

(2)当该电子产品出现故障时,需要对该电子产品 A, B 两个系统进行检测.从 A, B 两个系统能够正常工作概率的大小判断,应优先检测哪个系统?

20.(本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = 2\ln x - a(x-1)$.

(1)若 $f(x) \leq 0$,求实数 a 的值;

(2)求证: $\frac{[1+(n+1)^2] \cdot [2+(n+1)^2] \cdots [n+(n+1)^2]}{(n+1)^{2^n}} < \sqrt{e} (n \in \mathbb{N}^*)$.

21.(本小题满分12分)

已知点 D 是圆 $Q: (x+4)^2 + y^2 = 72$ 上一动点,点 $A(4, 0)$,线段 AD 的中垂线交 DQ 于点 B .

(1)求动点 B 的轨迹方程 C ;

(2)定义:两个离心率相等的圆锥曲线为“相似”曲线.若关于坐标轴对称的曲线 T 与曲线 C 相似,且焦点在同一条直线上,曲线 T 经过点 $E(-3, 0)$, $F(3, 0)$.过曲线 C 上任一点 P 向曲线 T 作切线,切点分别为 M, N ,这两条切线 PM, PN 分别与曲线 C 交于点 G, H (异于点 P).

证明: $\frac{|MN|}{|GH|}$ 是一个定值,并求出这个定值.

请考生在第22、23题中任选一题作答.注意:只能做所选定的题目,如果多做,则按所做的第一个题目计分,作答时,请用2B铅笔在答题卡上,将所选题号对应的方框涂黑.

22.(本小题满分10分)选修4-4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 过点 $M(1, 2)$.以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho \cos^2 \theta = 4 \sin \theta$.

(1)设直线 l 的倾斜角为 α ,写出其参数方程,并求曲线 C 的直角坐标方程;

(2)若直线 l 与曲线 C 交于 P, Q 两点,且线段 PQ 的中点为 M ,求直线 l 的方程.

23.(本小题满分10分)选修4-5:不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+a| + 2|x-1|$.

(1)当 $a = 2$ 时,解不等式 $f(x) \leq 4$;

(2)若存在 $x \in [1, 2]$,使得不等式 $f(x) > x^2$ 成立,求实数 a 的取值范围.

合肥市2021年高三第三次教学质量检测理科数学答题卡

姓名	
准考证号	

填涂样例	正确填涂 ☒
缺考标记	
缺考考生，由监考员贴条形码，并用2B铅笔填涂右面的缺考标记。 ☐	

注意事项

1. 答题前，考生务必先用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、准考证号填写清楚，并认真核对条形码上的姓名、准考证号及科目，如无误请将条形码横贴在答题卷“条形码粘贴处”位置上。
2. 选择题用2B铅笔填涂；非选择题用0.5毫米黑色签字笔作答，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目对应的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在试题卷、草稿纸上答题无效。
4. 保持卷面清洁，不折叠、不破损。

请注意粘贴范围

条形码粘贴处

请注意粘贴范围

第 I 卷 选择题 (用2B铅笔填涂)

1 [A] [B] [C] [D]	5 [A] [B] [C] [D]	9 [A] [B] [C] [D]
2 [A] [B] [C] [D]	6 [A] [B] [C] [D]	10 [A] [B] [C] [D]
3 [A] [B] [C] [D]	7 [A] [B] [C] [D]	11 [A] [B] [C] [D]
4 [A] [B] [C] [D]	8 [A] [B] [C] [D]	12 [A] [B] [C] [D]

第 II 卷 非选择题

二、填空题 (每小题5分，满分20分)

13 _____ 14 _____

15 _____ 16 _____

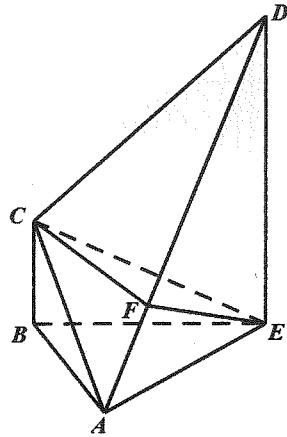
三、解答题

17. (12分)

请在各题目的答题区域内作答，超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

18. (12分)



请在各题目的答题区域内作答，超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

19. (12分)

请在各题目的答题区域内作答，超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

20.(12分)

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

21.(12分)

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效

【选考部分】(10分)

请考生在第22、23题中任意选择一题作答。注意：只能做所选定的题目，如果多做，则按所做第一个题目计分。作答时，请用2B铅笔在答题卡上将所选题号的方框涂黑。

22

23

请在各题目的答题区域内作答,超出黑色矩形边框限定区域的答案无效