

2021 届天府名校 4 月高三诊断性考试

理数参考答案及评分细则

一、选择题

1. C 【解析】因为 $M = (-\infty, 2)$, $N = (1, 2]$, 所以 $M \cap N = (1, 2)$. 故选 C.

2. A 【解析】由题得 $z - i = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i(1+i) = -1 + i$, 所以 $z = -1 + 2i$, 所以 $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. 故选 A.

3. D 【解析】 $\cos \beta = \frac{8}{\sqrt{8^2 + (-m)^2}} = \frac{24}{5m}$, 可知 $m > 0$, 化简可得 $(5m)^2 = 9(64 + m^2)$, 解得 $m = 6$, $\tan \beta = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$, $\tan \beta = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$, 所以 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$. 故选 D.

4. A 【解析】要想组成一个矩形, 需要找出两条横边, 两条纵边, 再根据分步计数原理即可, 依题意, 所有矩形的个数为 $C_{11}^2 \cdot C_{11}^2 = 3\,025$. 故选 A.

5. D 【解析】法一: 由抛物线的定义知, 圆 M 经过焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 点 M 的横坐标为 5, 由题意, 当 E, F 不重合时, M 是线段 EF 垂直平分线上的点, $\therefore 5 = \frac{\frac{p}{2} + 9}{2}$, $\therefore p = 2$, 所以抛物线的方程为 $y^2 = 4x$; 当 E, F 重合时, $\therefore \frac{p}{2} = 9$, $\therefore p = 18$, 所以抛物线的方程为 $y^2 = 36x$. 故选 D.

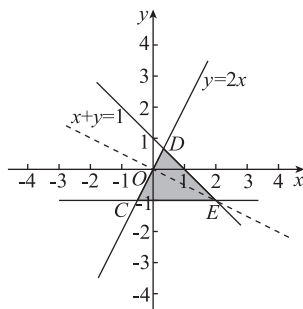
法二: 由抛物线定义知 $\sqrt{(5-9)^2 + y_0^2} = 5 + \frac{p}{2}$, 又 M 在抛物线上, $\therefore y_0^2 = 2px = 10p$, 代入上式得 $p^2 - 20p + 36 = 0$, 解得 $p = 2$ 或 18 , 所以抛物线的方程为 $y^2 = 4x$ 或 $y^2 = 36x$. 故选 D.

6. D 【解析】A 选项, 因为 $b \parallel \alpha$, 所以过 b 作平面 γ 同 α 交于直线 c , 则 $b \parallel c$. 若 $a \perp \alpha$, 则 $a \perp$ 平面 α 内所有直线, 所以 $a \perp c$. 又因为 $b \parallel c$, 所以 $b \perp a$, A 正确; B 选项, 若 $a \subset \alpha, \alpha \parallel \beta$, 根据平面与平面平行的定义可知直线 a 与平面 β 无公共点, 故 B 正确; C 选项, 因为 $a \parallel \alpha$, 过 a 作平面 γ 同 α 交于直线 c , 则 $a \parallel c$, 若 $a \parallel b$, 则 $c \parallel b$. 又 $b \perp \beta$, 所以 $c \perp \beta$. 根据面面垂直的判定定理,

可得 $\alpha \perp \beta$, 故 C 正确; D 选项, 若 $\alpha \cap \beta = b, a \subset \alpha, a \perp b$, 垂直于交线, 并不能推出垂直于另一平面, 因此不能得出 $a \perp \beta$, 即不能推出 $\alpha \perp \beta$. 故 D 错误. 故选 D.

7. C 【解析】因为 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数, 且 $\frac{2}{3} > 0$, 所以 $2^{\frac{2}{3}} > 2^0 = 1$, 所以 $c > 1$, 因为 $y = \log_7 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $1 < 4 < 7$, 所以 $0 = \log_7 1 < \log_7 4 < \log_7 7 = 1$, 即 $0 < a = \log_7 4 < 1$, 故 $c > a$, 又因为 $b = \log_{\frac{1}{7}} \frac{2}{3} < \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{3} = \log_7 3 < \log_7 4 = a$, 所以 $c > a > b$. 故选 C.

8. A 【解析】将 $z = x + 2y$ 化为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$, 作出可行域和直线 $y = -\frac{1}{2}x, D\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 显然 $a < \frac{2}{3}$, 如图所示,



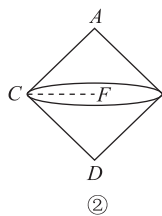
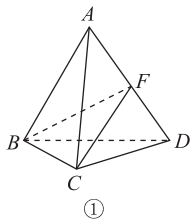
由图象得当直线 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$ 过点 C 时, z 取得最小值, 而 $C\left(\frac{a}{2}, a\right)$, 即 $z_{\min} = \frac{a}{2} + 2 \times a = \frac{5a}{2} = -2$, 得 $a = -\frac{4}{5}$. 故选 A.

9. D 【解析】 $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$, 设 $t = 2x - \frac{\pi}{6}$, 因为 $x \in [0, m)$, 所以 $t \in \left[-\frac{\pi}{6}, 2m - \frac{\pi}{6}\right)$, 函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$ 的图象在 $[0, m)$ 上恰有两个极大值点, 则 $2m - \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$, $\therefore m \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$, 所以 $\sin m \in$

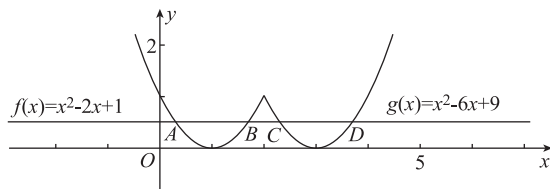
$\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. 故选 D.

10. B 【解析】因为 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的面积之和, 所以 $\frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \angle BAC = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \frac{\angle BAC}{2} + \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin \frac{\angle BAC}{2}$, 又因为 $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, $AD = 2$, 代入得 $AB \cdot AC = 2(AB + AC)$, 又因为 $AB + AC \geq 2\sqrt{AB \cdot AC}$, 所以 $AB \cdot AC = 2(AB + AC) \geq 4\sqrt{AB \cdot AC}$, 得 $AB \cdot AC \geq 16$, 当且仅当 $AB = AC = 4$ 时取等号. 所以 $\triangle ABC$ 的面积的最小值为 $\frac{1}{2} \times 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. 故选 B.

11. B 【解析】如图①, 在三棱锥 $D-ABC$ 中, F 是 AD 的中点, 在 $\triangle FBC$ 中, $FC = FB = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 由 $AD \perp FB$, $AD \perp FC$ 得 $AD \perp$ 平面 FBC . 将 $D-ABC$ 绕着 AD 旋转所经过的区域构成的几何体是以 AD 为轴, FC 为底面半径的两个圆锥, 如图②, 圆锥的底面半径 $R = FC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 高 $h = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}$, 故所构成的几何体的体积为 $2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{2\pi}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$. 故选 B.



12. A 【解析】由 $F(x) = F(4-x)$ 可得 $F(x)$ 关于 $x=2$ 对称, 因为 $f(x) = x^2 - 2x + 1$, 则 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 所以 $g(x) = x^2 - ax + b$ 关于 $x=3$ 对称, 且 $f(1) = g(3)$, 得 $a=6, b=9$. 则 $F(x)$ 图象如下图所示,



则 $m \in (0, 1)$, $x_B = 1 + \sqrt{m}$, $x_C = 3 - \sqrt{m}$, 所以 $|BC| \cdot m = 2m - 2m\sqrt{m}$, 令 $t = \sqrt{m} \in (0, 1)$, 则 $|BC| \cdot m = 2t^2 - 2t^3$, 令 $g(t) = 2t^2 - 2t^3$, 则 $g'(t) =$

$4t - 6t^2 = 2t(2 - 3t)$, 由 $g'(t) > 0$ 得 $0 < t < \frac{2}{3}$; 由 $g'(t) < 0$ 得 $\frac{2}{3} < t < 1$, 所以 $g(t)$ 在 $(0, \frac{2}{3})$ 上单调递增, 在 $(\frac{2}{3}, 1)$ 上单调递减, 所以 $g(t)_{\max} = g(\frac{2}{3}) = \frac{8}{27}$, 所以 $g(t) \in (0, \frac{8}{27}]$. 故选 A.

二、填空题

13. 1 【解析】根据二项式的展开式得到 a_3 所对应的应该是 x^3 的系数, 由展开式的公式可得到含有 x^3 的展开项为 $C_5^3(2)^2(-m)^3x^3 = -40x^3$, 解得 $m=1$.

14. -3 【解析】设 AC 中点为 G , 由题意可得 $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BG}$, 所以 $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF}) = 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(4 - 4\cos \frac{\pi}{3} - 8) = -3$.

15. 7π 【解析】由题意知 $\triangle A'CD$ 中 $A'D = CD = 1$, $\angle A'DC = \frac{2\pi}{3}$, 由余弦定理可得 $A'C = \sqrt{3}$, 所以

$\triangle A'CD$ 外接圆半径 $r = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{2\pi}{3}} = 1$. 由题意可知

$BD \perp$ 平面 $A'CD$, 将三棱锥 $B-A'CD$ 补成一个三棱柱, 则易得三棱锥的外接球的球心即三棱柱的上下底面外接圆圆心连线的中点, 设圆心到底面的距离为 d , 则 $d = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 根据球的性质可得球的半径 R 满足 $R^2 = r^2 + d^2 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$, 所以该球的表面积为 $4\pi R^2 = 7\pi$.

16. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 【解析】由题意, 记 $|MF_1| = m$, $|MF_2| = n$, 不妨设 $|F_1F_2| = 2$, 即 $c=1$, 因为 $\frac{c}{a_1} = e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $a_1 =$

$\sqrt{2}$, 所以 $m+n = 2\sqrt{2}$, $(m+n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn = 8$ ①, 在 $\triangle MF_1F_2$ 中, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{m^2 + n^2 - 4}{2mn}$, 所以 $m^2 + n^2 = 4 + mn$ ②, ①-②得 $mn = \frac{4}{3}$, 所以 $(m-n)^2 = (m+n)^2 - 4mn = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$, 所以 $2a_2 =$

$\frac{2\sqrt{6}}{3}$, $e_2 = \frac{c}{a_2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

三、解答题

17. 解: (1) 因为 $\begin{cases} 2a_5 = 2a_3 + 3a_4, \\ a_1 = 1 \end{cases}$,

所以 $\begin{cases} 2a_1 q^4 = 2a_1 q^2 + 3a_1 q^3, \\ a_1 = 1 \end{cases}$,

所以 $q=2$ 或 $q=-\frac{1}{2}$,

因为 $a_n > 0$, 所以 $q=2$,

所以 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$; (3分)

因为 $\{b_n\}$ 的前三项分别是 8, 16, 24, 所以 $b_n = 8n$.

(4分)

(2) 因为 $c_n = \frac{b_{2n-1}}{a_{2n}} = \frac{8(2n-1)}{2^{2n-1}} = \frac{32n-16}{4^n}$,

所以 $T_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 + 48 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + (32n-16) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ①

$\frac{1}{4} T_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 48 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + (32n-16) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ ②

①-②得 $\frac{3}{4} T_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 + 32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + 32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n - (32n-16) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

$= 32 \cdot \left[\left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \right]$

$- 4 - (32n-16) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

$= \frac{32}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] - 4 - (8n-4) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$= \frac{20}{3} - \left(8n + \frac{20}{3}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^n$,

所以 $T_n = \frac{80}{9} - \left(\frac{32}{3}n + \frac{80}{9}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^n$. (12分)

18. 解: (1) 由频率分布直方图的性质可得: $0.1(1+1+a+5)=1$,

得 $a=3$. (3分)

(2) 由题意可知 X 的取值可以是 0, 1, 2, 3.

$P(X=0) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{12}$,

$P(X=1) = \frac{C_5^2 C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{5}{12}$,

$P(X=2) = \frac{C_5^1 C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{5}{12}$,

$P(X=3) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{12}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

则 $E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{5}{12} + 3 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{2}$.

(8分)

(3) 要使对任意 $x \in [4, 8]$ (千元) 时, 该合作社不亏损, 即有 $y \geq 0$, 变形得 $25\lambda \geq \frac{(x+10)(x+2)}{x}$ 在 $x \in [4, 8]$ 上恒成立,

而 $\frac{(x+10)(x+2)}{x} = \frac{x^2 + 12x + 20}{x} = x + \frac{20}{x} + 12$,

设 $f(x) = x + \frac{20}{x} + 12$,

$f'(x) = 1 - \frac{20}{x^2} = \frac{(x-2\sqrt{5})(x+2\sqrt{5})}{x^2}$,

令 $f'(x) = 0$ 解得 $x = \pm 2\sqrt{5}$,

所以函数 $f(x)$ 在 $[4, 2\sqrt{5}]$ 单调递减, 在 $[2\sqrt{5}, 8]$ 单调递增,

$f(x)_{\max} = \max\{f(4), f(8)\}$,

因为 $f(4) = 21 < f(8) = 22.5$,

所以有 $25\lambda \geq 22.5$, 解得 $\lambda \geq 0.9$,

即当 $\lambda \in [0.9, 1]$ 时, 该合作社都不亏损. (12分)

19. 解: (1) 连接 AC 与 BD 交于点 O .

由条件可知 $GC \parallel FA$,

所以四边形 $FACG$ 为平行四边形, 所以 $AC \parallel FG$,

因为 $FG \subset$ 平面 BFG ,

所以 $AC \parallel$ 平面 BFG .

因为平面 $BFG \cap$ 平面 $ABC = l$,

所以 $AC \parallel l$.

因为 $ED \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $ED \perp AC$,

又因为四边形 $ABCD$ 为菱形,

所以 $AC \perp BD$,

又因为 $BD \cap DE = D$,

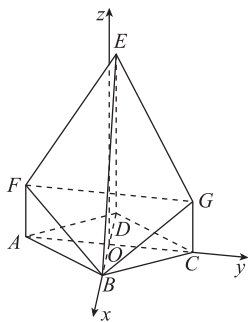
所以 $AC \perp$ 平面 BDE ,

所以 $l \perp$ 平面 BDE . (4分)

(2) 由(1)得 OB, OC, DE 两两垂直,

所以以 O 为坐标原点, 以 OB, OC 分别为 x 轴、 y 轴,

过点 O 与 DE 平行的直线为 z 轴建立空间直角坐标系, 如图,



设 $BD=2a, DE=\sqrt{16-4a^2}$,

则 $CG=\frac{2}{3}\sqrt{4-a^2}>0$, 得 $0<a^2<4$.

则 $B(a,0,0), G(0,1,\frac{2}{3}\sqrt{4-a^2})$.

$\overrightarrow{BG}=(-a,1,\frac{2}{3}\sqrt{4-a^2})$,

由(1)可知平面 BDE 的一个法向量为 $\overrightarrow{OC}=(0,1,0)$,

所以直线 BG 与平面 BDE 所成角 θ 满足 $\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{BG}| |\overrightarrow{OC}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1^2+\frac{4}{9}(4-a^2)}} = \frac{3}{\sqrt{5a^2+25}} \in$

$(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3}{5})$. (12分)

20. 解: (1) 由题意可得 $A(-a,0), B(a,0), F_1(-c,0)$

因为 $\overrightarrow{AF_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$,

所以 $(a-c,0) = \frac{1}{4}(2a,0)$, 得 $c = \frac{1}{2}a$.

又因为 $MF_1 \perp x$ 轴, 且 M 在第二象限,

所以可得 $M(-c, \frac{b^2}{a})$,

所以 $\triangle MAB$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{b^2}{a} \times 2a = b^2 = 3$,

所以 $a^2 = 3 + \frac{1}{4}a^2$, 解得 $a^2 = 4$,

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. (4分)

(2) $M(-1, \frac{3}{2})$, 直线 MB 的方程为 $y = -\frac{1}{2}(x -$

$2)$, 与 y 轴的交点为 $N(0,1)$.

当 PQ 与 x 轴垂直时, $P(0, \sqrt{3}), Q(0, -\sqrt{3}), \overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NP} = 6 \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NQ}$ 不成立;

当 PQ 与 x 轴不垂直时, 设其方程为 $y = kx + 1$.

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$\overrightarrow{NB} = (2, -1), \overrightarrow{NP} = (x_1, y_1 - 1), \overrightarrow{NM} = (-1,$

$\frac{1}{2}), \overrightarrow{NQ} = (x_2, y_2 - 1)$,

由 $\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NP} = 6 \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NQ}$ 得 $x_1 = -3x_2$.

联立方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = kx + 1 \end{cases}$, 消 y 得 $(4k^2 + 3)x^2 + 8kx - 8$

$= 0$,

$\Delta > 0 \Rightarrow k \in \mathbf{R}$.

则 $x_1 + x_2 = \frac{-8k}{4k^2 + 3}, x_1 x_2 = \frac{-8}{4k^2 + 3}$,

所以 $-2x_2 = \frac{-8k}{4k^2 + 3}, -3x_2^2 = \frac{-8}{4k^2 + 3}$,

解得 $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以直线 PQ 的方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}x + 1$. (12分)

21. 解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}$.

① 当 $a < 0$ 时, $1-ax > 0$,

所以 $f'(x) > 0$ 恒成立,

又因为 $f(1) = 0$,

所以函数 $f(x)$ 只有一个零点; (2分)

② 当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{a}$,

由 $f'(x) < 0$ 得 $x > \frac{1}{a}$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{a})$ 单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 单调递减. 且 $f(1) = 0$;

当 $0 < a < 1$ 时, 因为 $\frac{1}{a} > 1$, 函数 $f(x)$ 在区间

$(0, \frac{1}{a})$ 单调递增,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{a})$ 只有一个零点, 且

$f(\frac{1}{a}) > 0$; 根据对数函数与幂函数的增长速度可知, $y = ax$ 比 $y = \ln x$ 变化的快,

所以当 $x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow -\infty$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上也一定有一个零点,

所以当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 有两个零点. (4分)

当 $a = 1$ 时, $\frac{1}{a} = 1$, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. 且 $f(1) = 0$ 此时函数只有

一个零点;

(6分)

当 $a > 1$ 时, 因为 $0 < \frac{1}{a} < 1$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{a})$ 单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 单调递减. 且 $f(1) = 0$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 只有一个零点, 且

$$f\left(\frac{1}{a}\right) > 0,$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{a})$ 上也一定有一个零点,

所以当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有两个零点.

綜上当 $a < 0$ 或 $a = 1$ 时, $f(x)$ 只有一个零点;

当 $0 < a < 1$ 或 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有两个零点. (8分)

(2) 由(1)可知欲使 $f(x) \leq b + 2a$ 恒成立,

只需 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{a}\right) \leq b + 2a$ 即可,

$$\text{即 } \ln \frac{1}{a} - 1 - a \leq b,$$

$$\text{所以 } \frac{b}{a} \geq \frac{1}{a} \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a} - 1, \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{令 } g(t) = t \ln t - t - 1 (t > 0),$$

$$\text{则 } g'(t) = \ln t,$$

由 $g'(t) > 0$ 得 $t > 1$, 由 $g'(t) < 0$, 得 $0 < t < 1$,

所以 $g(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } g(t)_{\min} = g(1) = -2,$$

$$\text{所以 } g(t) \geq -2, \text{ 即 } \frac{b}{a} \geq -2. \quad (12 \text{ 分})$$

$$22. \text{ 解: (1) 由 } \begin{cases} x = m + \frac{1}{m} + \sqrt{2}, \\ y = m - \frac{1}{m}, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x - \sqrt{2} = m + \frac{1}{m}, \\ y = m - \frac{1}{m}, \end{cases}$$

$$\text{平方相减得 } (x - \sqrt{2})^2 - y^2 = 4.$$

所以曲线 C 的普通方程为 $(x - \sqrt{2})^2 - y^2 = 4$. (4分)

$$(2) \text{ 将过 } A \text{ 的直线的参数方程 } \begin{cases} x = 3\sqrt{2} + \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \text{ 代入}$$

C 的普通方程,

$$\text{得 } t^2 - 4\sqrt{2}t - 8 = 0,$$

设点 M, N 对应的参数分别为 t_1, t_2 ,

$$\text{所以 } t_1 + t_2 = 4\sqrt{2}, t_1 t_2 = -8. \quad (7 \text{ 分})$$

所以 t_1 与 t_2 异号,

$$\text{所以 } |t_1| + |t_2| = |t_1 - t_2|.$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{1}{|AM|} + \frac{1}{|AN|} &= \frac{|AM| + |AN|}{|AM| \cdot |AN|} = \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1 t_2|} \\ &= \frac{|t_1 - t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{\sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2}}{|t_1 t_2|} = 1. \end{aligned} \quad (10 \text{ 分})$$

$$23. \text{ 解: (1) } f(x) = |x - 2| + |x - 4| = \begin{cases} 6 - 2x, & x \leq 2, \\ 2, & 2 < x < 4, \\ 2x - 6, & x \geq 4, \end{cases}$$

$$\text{由 } f(x) \leq 2x + 2, \text{ 得 } \begin{cases} x \leq 2, \\ 6 - 2x \leq 2x + 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2 < x < 4, \\ 2 \leq 2x + 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x \geq 4, \\ 2x - 6 \leq 2x + 2, \end{cases}$$

$$\text{解得 } 1 \leq x \leq 2 \text{ 或 } 2 < x < 4 \text{ 或 } x \geq 4,$$

故不等式 $f(x) \leq 2x + 2$ 的解集为 $[1, +\infty)$. (5分)

(2) 由绝对值三角不等式的性质, 可知 $|x - 2| + |x - 4| \geq |(x - 2) - (x - 4)| = 2$, 当且仅当 $(x - 2)(x - 4) \leq 0$ 时取等号,

$$\text{所以 } a + b = 2, \frac{1}{a} + \frac{a}{b} = \frac{a+b}{2a} + \frac{a}{b} = \frac{1}{2} + \frac{b}{2a} + \frac{a}{b}$$

$$\geq \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{b}{2a} \cdot \frac{a}{b}} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{b}{2a} = \frac{a}{b}, \text{ 即}$$

$a = 2\sqrt{2} - 2$ 时取等号,

$$\text{故 } \frac{1}{a} + \frac{a}{b} \text{ 的最小值为 } \frac{1}{2} + \sqrt{2}. \quad (10 \text{ 分})$$