

北京市朝阳区高三年级第二学期质量检测一

数 学

2021. 3

(考试时间 120 分钟 满分 150 分)

本试卷分为选择题 (共 40 分) 和非选择题 (共 110 分) 两部分

考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效。考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | x - 1 \geq 0\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $\{0, 1, 2, 3\}$ (B) $\{1, 2, 3\}$ (C) $\{2, 3\}$ (D) $\{3\}$

(2) 如果复数 $\frac{2+bi}{i}$ ($b \in \mathbf{R}$) 的实部与虚部相等, 那么 $b =$

- (A) -2 (B) 1 (C) 2 (D) 4

(3) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3 = 1$, $S_9 = 18$, 则 $a_1 =$

- (A) 0 (B) -1 (C) -2 (D) -3

(4) 已知圆 $x^2 + y^2 = 4$ 截直线 $y = kx + 2$ 所得弦的长度为 $2\sqrt{3}$, 则实数 $k =$

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $-\sqrt{3}$ (C) $\pm\sqrt{2}$ (D) $\pm\sqrt{3}$

(5) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 的离心率为 2, 则双曲线 C 的渐近线方程为

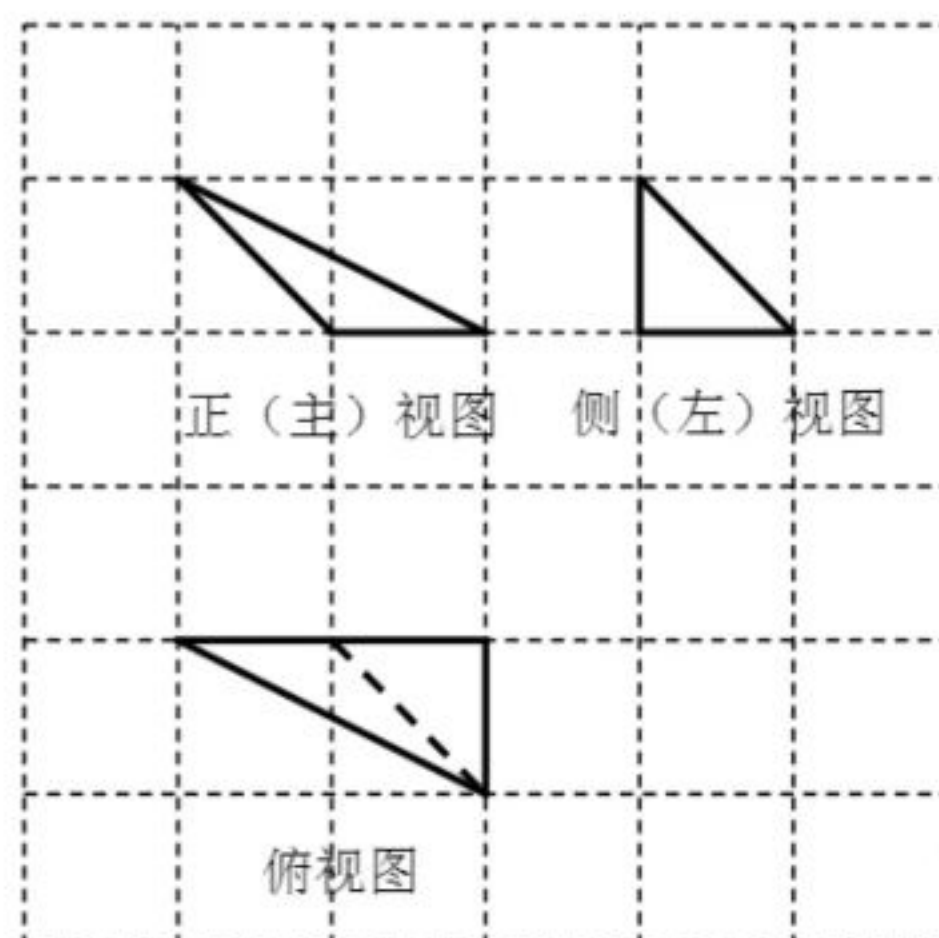
- (A) $y = \pm\sqrt{3}x$ (B) $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ (C) $y = \pm\frac{1}{2}x$ (D) $y = \pm 2x$

(6) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a^2 - b^2 + c^2 + ac = 0$, 则 $B =$

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

(7) 某三棱锥的三视图如图所示，已知网格纸上小正方形的边长为 1，则该三棱锥最长的棱长为

- (A) 2
(B) $\sqrt{5}$
(C) $\sqrt{6}$
(D) $2\sqrt{2}$



(8) 在 $\triangle ABC$ 中，“ $\tan A \tan B < 1$ ”是“ $\triangle ABC$ 为钝角三角形”的

- (A) 充分而不必要条件
(B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件
(D) 既不充分也不必要条件

(9) 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，准线为 l ，点 P 是直线 l 上的动点. 若点 A 在抛物线 C 上，且 $|AF| = 5$ ，则 $|PA| + |PO|$ (O 为坐标原点) 的最小值为

- (A) 8
(B) $2\sqrt{13}$
(C) $\sqrt{41}$
(D) 6

(10) 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， P 是线段 BC_1 上的点，过 A_1 的平面 α 与直线 PD 垂直. 当 P 在线段 BC_1 上运动时，平面 α 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面面积的最小值是

- (A) 1
(B) $\frac{5}{4}$
(C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
(D) $\sqrt{2}$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 在 $(x + \frac{1}{x})^8$ 的展开式中, x^4 的系数为_____。(用数字作答)

(12) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 1, \\ -\log_2 x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(0) =$ _____; $f(x)$ 的值域为_____.

(13) 已知向量 $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\mathbf{b} = (x, y)$ ($xy \neq 0$), 且 $|\mathbf{b}| = 1$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$, 则向量 $\mathbf{b}$ 的坐标可以是_____。(写出一个即可)

(14) 李明自主创业, 经营一家网店, 每售出一件 A 商品获利 8 元. 现计划在“五一”期间对 A 商品进行广告促销, 假设售出 A 商品的件数 m (单位: 万件) 与广告费用 x (单位: 万元) 符合函数模型

$m = 3 - \frac{2}{x+1}$. 若要使这次促销活动获利最多, 则广告费用 x 应投入_____万元.

(15) 华人数学家李天岩和美国数学家约克给出了“混沌”的数学定义, 由此发展的混沌理论在生物学、经济学和社会学领域都有重要作用. 在混沌理论中, 函数的周期点是一个关键概念, 定义如下: 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 对于 $x_0 \in \mathbf{R}$, 令 $x_n = f(x_{n-1})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 若存在正整数 k 使得 $x_k = x_0$, 且当 $0 < j < k$ 时, $x_j \neq x_0$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个周期为 k 的周期点. 给出下列四个结论:

① 若 $f(x) = e^{x-1}$, 则 $f(x)$ 存在唯一一个周期为 1 的周期点;

② 若 $f(x) = 2(1-x)$, 则 $f(x)$ 存在周期为 2 的周期点;

③ 若 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < \frac{1}{2}, \\ 2(1-x), & x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 不存在周期为 3 的周期点;

④ 若 $f(x) = x(1-x)$, 则对任意正整数 n , $\frac{1}{2}$ 都不是 $f(x)$ 的周期为 n 的周期点.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 由下列四个条件中的三个来确定：

①最小正周期为 π ；②最大值为 2；③ $f(-\frac{\pi}{6}) = 0$ ；④ $f(0) = -2$ 。

(I) 写出能确定 $f(x)$ 的三个条件，并求 $f(x)$ 的解析式；

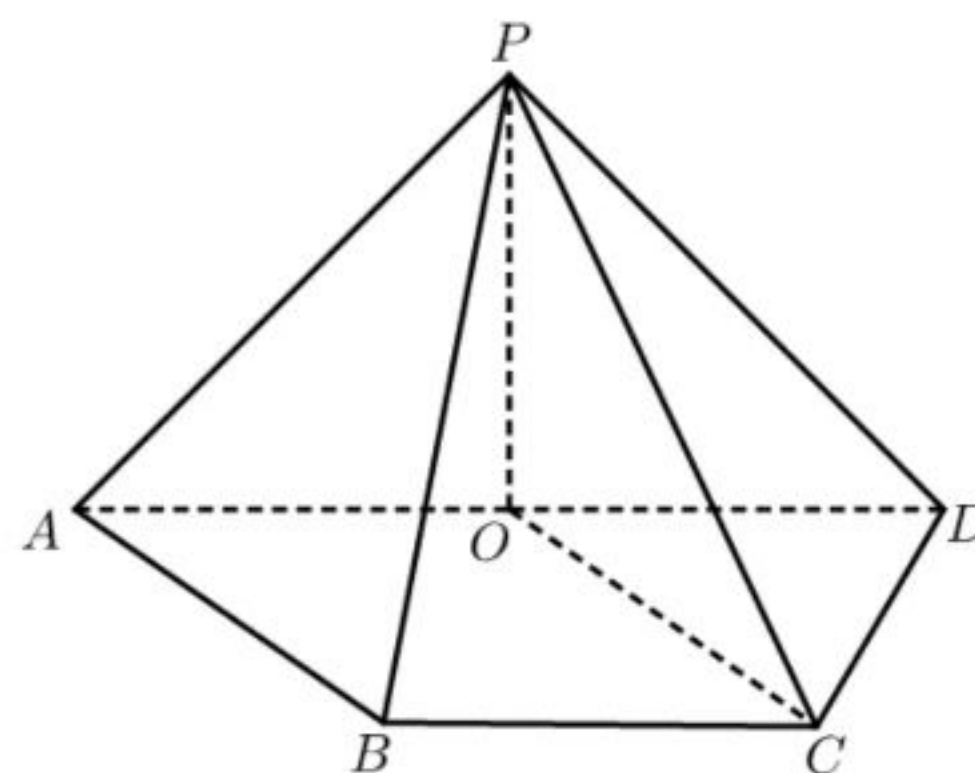
(II) 求 $f(x)$ 的单调递增区间。

(17) (本小题 13 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， O 是 AD 边的中点， $PO \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PO = 1$ 。在底面 $ABCD$ 中， $BC \parallel AD$ ， $CD \perp AD$ ， $BC = CD = 1$ ， $AD = 2$ 。

(I) 求证： $AB \parallel$ 平面 POC ；

(II) 求二面角 $B-AP-D$ 的余弦值。



(18) (本小题 14 分)

我国脱贫攻坚战取得全面胜利，现行标准下农村贫困人口全部脱贫，消除了绝对贫困．为了解脱贫家庭人均年纯收入情况，某扶贫工作组对 A，B 两个地区 2019 年脱贫家庭进行简单随机抽样，共抽取 500 户家庭作为样本，获得数据如下表：

	A 地区	B 地区
2019 年人均年纯收入超过 10000 元	100 户	150 户
2019 年人均年纯收入未超过 10000 元	200 户	50 户

假设所有脱贫家庭的人均年纯收入是否超过 10000 元相互独立．

- (I) 从 A 地区 2019 年脱贫家庭中随机抽取 1 户，估计该家庭 2019 年人均年纯收入超过 10000 元的概率；
- (II) 在样本中，分别从 A 地区和 B 地区 2019 年脱贫家庭中各随机抽取 1 户，记 X 为这 2 户家庭中 2019 年人均年纯收入超过 10000 元的户数，求 X 的分布列和数学期望；
- (III) 从样本中 A 地区的 300 户脱贫家庭中随机抽取 4 户，发现这 4 户家庭 2020 年人均年纯收入都超过 10000 元．根据这个结果，能否认为样本中 A 地区 2020 年人均年纯收入超过 10000 元的户数相比 2019 年有变化？请说明理由．

(19) (本小题 15 分)

已知椭圆 C 的短轴的两个端点分别为 $A(0,1)$ ， $B(0,-1)$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ．

- (I) 求椭圆 C 的方程及焦点的坐标；
- (II) 若点 M 为椭圆 C 上异于 A, B 的任意一点，过原点且与直线 MA 平行的直线与直线 $y=3$ 交于点 P ，直线 MB 与直线 $y=3$ 交于点 Q ，试判断以线段 PQ 为直径的圆是否过定点？若过定点，求出定点的坐标；若不过定点，请说明理由．

(20) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = (ax - 1)e^x$ ($a \in \mathbf{R}$).

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若直线 $y = ax + a$ 与曲线 $y = f(x)$ 相切, 求证: $a \in (-1, -\frac{2}{3})$.

(21) (本小题 15 分)

设数列 $A_m: a_1, a_2, \dots, a_m$ ($m \geq 2$), 若存在公比为 q 的等比数列 $B_{m+1}: b_1, b_2, \dots, b_{m+1}$, 使得 $b_k < a_k < b_{k+1}$, 其中 $k = 1, 2, \dots, m$, 则称数列 B_{m+1} 为数列 A_m 的“等比分割数列”.

(I) 写出数列 $A_4: 3, 6, 12, 24$ 的一个“等比分割数列” B_5 ;

(II) 若数列 A_{10} 的通项公式为 $a_n = 2^n$ ($n = 1, 2, \dots, 10$), 其“等比分割数列” B_{11} 的首项为 1, 求数列 B_{11} 的公比 q 的取值范围;

(III) 若数列 A_m 的通项公式为 $a_n = n^2$ ($n = 1, 2, \dots, m$), 且数列 A_m 存在“等比分割数列”, 求 m 的最大值.

北京市朝阳区高三年级第二学期质量检测一

数学 参考答案

2021. 3

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) B (2) A (3) A (4) D (5) A
(6) D (7) C (8) C (9) B (10) C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

- (11) 28 (12) 1; $(-\infty, 2)$
(13) $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ (答案不唯一) (14) 3 (15) ①④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16) (共 13 分)

解：(I) 确定 $f(x)$ 的三个条件是①，②，③.

当 $A > 0$ 且 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ 时， $A \sin \varphi > 0$.

若函数 $f(x)$ 满足条件④，则 $f(0) = A \sin \varphi = -2$,

与 $A \sin \varphi > 0$ 矛盾，所以 $f(x)$ 不能满足条件④.

所以能确定 $f(x)$ 的三个条件是①，②，③.

由条件①，得 $\frac{2\pi}{|\omega|} = \pi$ ，又 $\omega > 0$ ，所以 $\omega = 2$.

由条件②，得 $|A| = 2$ ，又 $A > 0$ ，所以 $A = 2$.

由条件③，得 $f(-\frac{\pi}{6}) = 2 \sin(-\frac{\pi}{3} + \varphi) = 0$ ，又 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$.

经验证， $f(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 符合题意. 7 分

(II) 函数 $y = \sin x$ 的单调递增区间为 $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$ ($k \in \mathbf{Z}$).

由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$),

得 $k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}$ ($k \in \mathbf{Z}$).

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}]$ ($k \in \mathbf{Z}$). 13 分

(17) (共 13 分)

解: (I) 在四边形 $ABCD$ 中,

因为 $BC \parallel AD, BC = \frac{1}{2}AD$, O 是 AD 的中点, 则 $BC \parallel AO, BC = AO$.

所以四边形 $ABCO$ 是平行四边形.

所以 $AB \parallel OC$.

又因为 $AB \not\subset$ 平面 $POC, OC \subset$ 平面 POC ,

所以 $AB \parallel$ 平面 POC5 分

(II) 连结 OB .

因为 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $PO \perp OB, PO \perp OD$.

又因为点 O 是 AD 的中点, 且 $BC = \frac{1}{2}AD$,

所以 $BC = OD$.

因为 $BC \parallel AD, CD \perp AD, BC = CD$,

所以四边形 $OBCD$ 是正方形. 所以 $BO \perp AD$.

如图, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$,

则 $A(0, -1, 0), B(1, 0, 0), C(1, 1, 0), D(0, 1, 0), P(0, 0, 1)$.

所以 $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0), \overrightarrow{AP} = (0, 1, 1)$.

设 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ 是平面 BAP 的一个法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x + y = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

令 $y = 1$, 则 $\mathbf{m} = (-1, 1, -1)$.

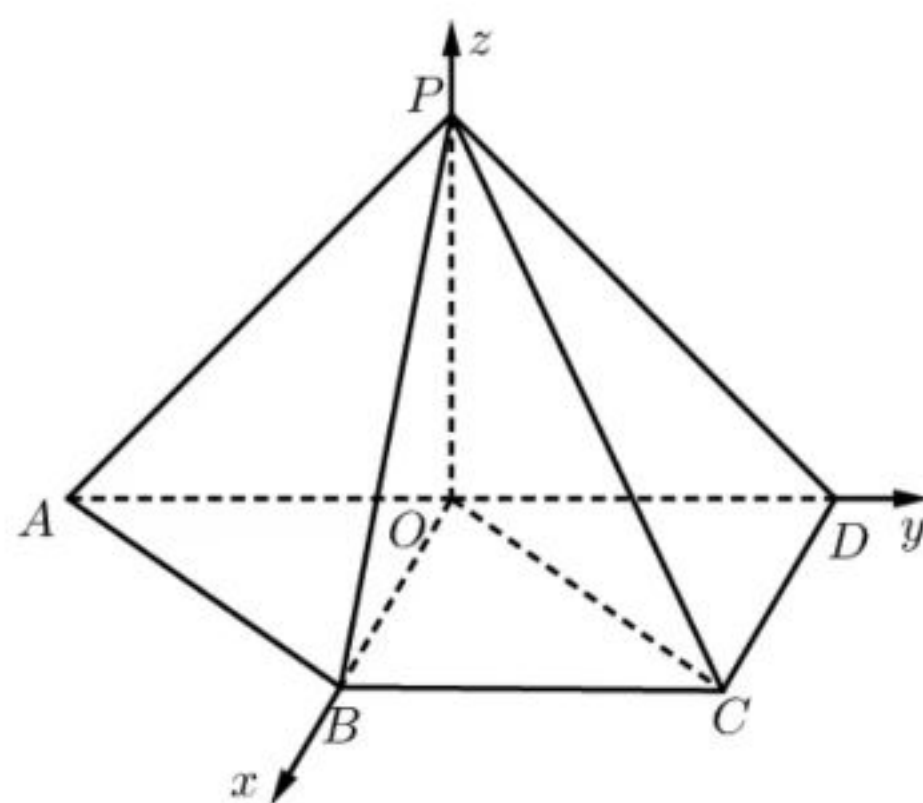
因为 $OB \perp$ 平面 PAD ,

所以 $\overrightarrow{OB} = (1, 0, 0)$ 是平面 PAD 的一个法向量.

$$\text{所以 } \left| \cos \langle \mathbf{m}, \overrightarrow{OB} \rangle \right| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{OB}|}{\|\mathbf{m}\| \|\overrightarrow{OB}\|} = \frac{|-1|}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

由图可知, 二面角 $B-AP-D$ 为锐角,

所以二面角 $B-AP-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$13 分



(18) (共 14 分)

解: (I) 设事件 C : 从 A 地区 2019 年脱贫家庭中随机抽取 1 户, 该家庭 2019 年人均年纯收入超过 10000 元.

从表格数据可知, A 地区抽出的 300 户家庭中 2019 年人均年收入超过 10000 元的有 100 户,

因此 $P(C)$ 可以估计为 $\frac{100}{300} = \frac{1}{3}$ 3 分

(II) 设事件 A : 从样本中 A 地区 2019 年脱贫家庭中随机抽取 1 户, 该家庭 2019 年人均年纯收入超过 10000 元, 则 $P(A) = \frac{1}{3}$.

设事件 B : 从样本中 B 地区 2019 年脱贫家庭中随机抽取 1 户, 该家庭 2019 年人均年纯收入

超过 10000 元, 则 $P(B) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$.

由题可知 X 的可能取值为 0, 1, 2.

$$P(X=0) = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{6};$$

$$P(X=1) = P(\bar{A}B \cup A\bar{B}) = P(\bar{A})P(B) + P(A)P(\bar{B}) = (1 - \frac{1}{3}) \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times (1 - \frac{3}{4}) = \frac{7}{12};$$

$$P(X=2) = P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

所以 X 的数学期望 $EX = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{7}{12} + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$ 10 分

(III) 设事件 E 为“从样本中 A 地区的 300 户脱贫家庭中随机抽取 4 户, 这 4 户家庭 2020 年人均年纯收入都超过 10000 元”.

假设样本中 A 地区 2020 年人均年纯收入超过 10000 元的户数相比 2019 年没有变化,

则由 2019 年的样本数据得 $P(E) = \frac{C_{100}^4}{C_{300}^4} \approx 0.012$.

答案示例 1: 可以认为有变化. 理由如下:

$P(E)$ 比较小, 概率比较小的事件一般不容易发生. 一旦发生, 就有理由认为样本中 A 地区 2020 年人均年纯收入超过 10000 元的户数相比 2019 年发生了变化.

所以可以认为有变化.

答案示例 2：无法确定有没有变化．理由如下：

事件 E 是随机事件， $P(E)$ 比较小，一般不容易发生，但还是有可能发生的，

所以无法确定有没有变化． 14 分

(19) (共 15 分)

解：(I) 由题意可设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，则

$$\begin{cases} b=1, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \\ a^2 = b^2 + c^2. \end{cases}$$

解得 $a = \sqrt{3}$ ， $c = \sqrt{2}$ ．

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ ，焦点坐标为 $(-\sqrt{2}, 0)$ 和 $(\sqrt{2}, 0)$ ． 5 分

(II) 方法 1：

设点 M 的坐标为 (x_0, y_0) ($x_0 \neq 0, y_0 \neq \pm 1$)，则 $\frac{x_0^2}{3} + y_0^2 = 1$ ．

过原点且与直线 MA 平行的直线方程为 $y = \frac{y_0 - 1}{x_0}x$ ．

令 $y = 3$ ，得 $P(\frac{3x_0}{y_0 - 1}, 3)$ ．

直线 MB 的方程为 $y = \frac{y_0 + 1}{x_0}x - 1$ ，

令 $y = 3$ ，得 $Q(\frac{4x_0}{y_0 + 1}, 3)$ ．

假设以线段 PQ 为直径的圆过定点，由椭圆的对称性可设定点为 $N(0, m)$ ．

则 $\overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{NQ} = 0$ ．

因为 $\overrightarrow{NP} = (\frac{3x_0}{y_0 - 1}, 3 - m)$ ， $\overrightarrow{NQ} = (\frac{4x_0}{y_0 + 1}, 3 - m)$ ，

所以 $\frac{12x_0^2}{y_0^2 - 1} + (3 - m)^2 = 0$ ．

因为 $\frac{x_0^2}{3} + y_0^2 = 1$ ，所以 $m^2 - 6m - 27 = 0$ ．

则 $m = -3$ 或 $m = 9$ ．

所以以线段 PQ 为直径的圆过定点, 且定点坐标为 $(0, -3)$ 和 $(0, 9)$ 15 分

方法 2:

设点 M 的坐标为 (x_0, y_0) ($x_0 \neq 0, y_0 \neq \pm 1$), 则 $\frac{x_0^2}{3} + y_0^2 = 1$.

过原点且与直线 MA 平行的直线方程为 $y = \frac{y_0 - 1}{x_0}x$.

令 $y = 3$, 得 $x_P = \frac{3x_0}{y_0 - 1}$.

直线 MB 的方程为 $y = \frac{y_0 + 1}{x_0}x - 1$,

令 $y = 3$, 得 $x_Q = \frac{4x_0}{y_0 + 1}$.

所以以 PQ 为直径的圆的半径为

$$r = \frac{1}{2}|x_Q - x_P| = \frac{1}{2} \left| \frac{4x_0}{y_0 + 1} - \frac{3x_0}{y_0 - 1} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{x_0 y_0 - 7x_0}{(y_0 + 1)(y_0 - 1)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{3(7 - y_0)}{x_0} \right|.$$

圆心的横坐标为 $\frac{x_Q + x_P}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{3x_0}{y_0 - 1} + \frac{4x_0}{y_0 + 1} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{7x_0 y_0 - x_0}{y_0^2 - 1} = -\frac{3(7y_0 - 1)}{2x_0}$.

所以以线段 PQ 为直径的圆的方程为 $\left[x + \frac{3(7y_0 - 1)}{2x_0} \right]^2 + (y - 3)^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{3(7 - y_0)}{x_0} \right]^2$.

因为 $\frac{x_0^2}{3} + y_0^2 = 1$, 所以 $x^2 + \frac{3(7y_0 - 1)}{x_0}x + (y - 3)^2 - 36 = 0$.

以线段 PQ 为直径的圆过定点等价于对任意的点 $M(x_0, y_0)$,

方程 $x^2 + \frac{3(7y_0 - 1)}{x_0}x + (y - 3)^2 - 36 = 0$ 恒成立.

所以 $\begin{cases} x^2 + (y - 3)^2 - 36 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = 0, \\ y = 9 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 0, \\ y = -3. \end{cases}$

所以以线段 PQ 为直径的圆过定点, 且定点坐标为 $(0, -3)$ 和 $(0, 9)$ 15 分

(20) (共 15 分)

解: (I) $f'(x) = (ax + a - 1)e^x$. 令 $f'(x) = 0$, 得 $ax = 1 - a$.

当 $a = 0$ 时, $f'(x) = -e^x < 0$, $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, $f'(x)$ 和 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的变化情况如下:

x	$(-\infty, \frac{1-a}{a})$	$\frac{1-a}{a}$	$(\frac{1-a}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

当 $a < 0$ 时, $f'(x)$ 和 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的变化情况如下:

x	$(-\infty, \frac{1-a}{a})$	$\frac{1-a}{a}$	$(\frac{1-a}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

综上, 当 $a = 0$ 时, $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减,

当 $a > 0$ 时, $y = f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, \frac{1-a}{a})$, 单调递增区间为 $(\frac{1-a}{a}, +\infty)$,

当 $a < 0$ 时, $y = f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, \frac{1-a}{a})$, 单调递减区间为 $(\frac{1-a}{a}, +\infty)$.

.....6 分

(II) 由题得 $f'(x) = (ax + a - 1)e^x$.

设直线 $y = ax + a$ 与曲线 $y = f(x)$ 相切于点 (x_0, y_0) ,

$$\text{则} \begin{cases} (ax_0 - 1)e^{x_0} = a(x_0 + 1), & \text{①} \\ (ax_0 + a - 1)e^{x_0} = a. & \text{②} \end{cases}$$

由①-②得 $-ae^{x_0} = ax_0$, 即 $a(e^{x_0} + x_0) = 0$.

若 $a = 0$, 则 $f(x) = -e^x$, $ax + a = 0$,

直线 $y = 0$ 与曲线 $y = f(x)$ 不相切, 不符合题意, 所以 $a \neq 0$.

所以 $e^{x_0} + x_0 = 0$. ③

令 $\varphi(x) = e^x + x$, 则 $\varphi'(x) = e^x + 1 > 0$, 所以 $\varphi(x)$ 单调递增.

因为 $\varphi(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2} > 0$, $\varphi(-1) = e^{-1} - 1 < 0$,

所以存在唯一 $x_0 \in (-1, -\frac{1}{2})$ 使得 $e^{x_0} + x_0 = 0$.

将③代入①得 $ax_0^2 + ax_0 - x_0 + a = 0$.

$$\text{所以 } a = \frac{x_0}{x_0^2 + x_0 + 1} = \frac{1}{x_0 + \frac{1}{x_0} + 1}.$$

易知在 $(-1, -\frac{1}{2})$ 内 $y = x + \frac{1}{x} + 1$ 单调递减, 且 $x + \frac{1}{x} + 1 < 0$,

所以 $y = \frac{1}{x + \frac{1}{x} + 1}$ 在 $(-1, -\frac{1}{2})$ 内单调递增.

因为 $x_0 \in (-1, -\frac{1}{2})$, 所以 $-1 < a < -\frac{2}{3}$, 所以 $a \in (-1, -\frac{2}{3})$ 15 分

(21) (共 15 分)

解: (I) $B_5: 2, 4, 8, 16, 32$. (答案不唯一) 3 分

(II) 由 $b_k < a_k < b_{k+1}$, 得 $q^{k-1} < 2^k < q^k, k=1, 2, \dots, 10$,

所以 $2 < q < 2^{\frac{k}{k-1}}, k=2, 3, \dots, 10$.

令 $f(k) = \frac{k}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1}, k=2, 3, \dots, 10$,

则 $f(k)$ 单调递减.

所以 $2^{\frac{k}{k-1}} (k=2, 3, \dots, 10)$ 的最小值为 $2^{\frac{10}{9}}$.

所以 $2 < q < 2^{\frac{10}{9}}$, 即公比 q 的取值范围是 $(2, 2^{\frac{10}{9}})$ 8 分

(III) 首先证明当 $m \geq 6$ 时, 数列 A_m 不存在“等比分割数列”.

假设当 $m \geq 6$ 时, 数列 A_m 存在“等比分割数列” B_{m+1} ,

则 $b_1 < 1 < b_2 = b_1 q < 4 < b_1 q^2 < 9 < b_1 q^3 < 16 < b_1 q^4 < 25 < \dots < m^2 < b_1 q^m$.

易知 $b_1 > 0, q > 0$.

因为 $0 < b_1 < 1$, 且 $4 < b_1 q^2$, 所以 $q^2 > 4$. 因为 $q > 0$, 所以 $q > 2$.

又因为 $9 < b_1 q^3$, 所以 $b_6 = b_1 q^5 = b_1 q^3 \cdot q^2 > 36 = 6^2$,

与 $b_6 < a_6 = 36$ 矛盾.

所以当 $m \geq 6$ 时, 数列 A_m 不存在“等比分割数列”.

所以 $m \leq 5$.

当 $m=5$ 时, 数列 $A_5: 1, 4, 9, 16, 25$, 存在首项为 $\frac{4}{5}$ 公比为 $\frac{9}{4}$ 的数列 B_6 满足:

$$\frac{4}{5} < 1 < \frac{9}{5} < 4 < \frac{81}{20} < 9 < \frac{729}{80} < 16 < \frac{6561}{320} < 25 < \frac{59049}{1280}.$$

所以 $m=5$ 时, 数列 A_m 存在“等比分割数列”.

所以 m 的最大值为 5. 15 分