

2021 届 T8 第一次联考数学试题参考答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	C	C	D	C	C	D	BC	ABC	BCD	ACD

二、填空题：

13. 6 14. 12 15. 3 16. $(e, +\infty)$

部分选填题解答：

8. 解：对于选项 A： $y = \sinh x \cosh x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}$ 是奇函数，所以 A 错误；

对于选项 B： $\cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$
 $= \frac{e^{x+y} + e^{-x-y} + e^{x-y} + e^{y-x}}{4} - \frac{e^{x+y} + e^{-x-y} - e^{x-y} - e^{y-x}}{4} = \frac{e^{x-y} + e^{y-x}}{2} = \cosh(x-y)$ ，

所以 B 错误；

对于选项 C、D： 设 $A(m, \frac{e^m + e^{-m}}{2})$ ， $B(m, \frac{e^m - e^{-m}}{2})$ ，

则曲线 C_1 在点 A 处的切线方程为： $y - \frac{e^m + e^{-m}}{2} = \frac{e^m - e^{-m}}{2}(x - m)$ ，

曲线 C_2 在点 B 处的切线方程为： $y - \frac{e^m - e^{-m}}{2} = \frac{e^m + e^{-m}}{2}(x - m)$ ，

联立求得点 P 的坐标为 $(m+1, e^m)$ ， 则 $|BP|^2 = 1 + (e^m - \frac{e^m - e^{-m}}{2})^2 = 1 + \frac{(e^m + e^{-m})^2}{4}$ ，

$S_{\Delta PAB} = \frac{1}{2} |AB| = \frac{1}{2} e^{-m}$ ， 所以 $|BP|$ 随 m 的增大而先减小后增大， ΔPAB 的面积随 m 的增大而减小， 所以 C 错误， D 正确。

11. 解： 令 $g(x) = (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_7)$ ， 则 $f(x) = xg(x)$ ，

$\therefore f'(x) = g(x) + xg'(x)$ ， $\therefore f'(0) = g(0) = a_1 a_2 \cdots a_7 = 1$ ， 因为 $\{a_n\}$ 是等比数列， 所以 $a_1 a_2 \cdots a_7 = a_4^7 = 1$ ， 即 $a_4 = 1 = a_1 q^3$ ， $\therefore a_1 > 1$ ， $\therefore 0 < q < 1$ ， B 正确；

$\therefore \lg a_n = \lg a_1 q^{n-1} = \lg a_1 + (n-1) \lg q$ ， $\therefore \{\lg a_n\}$ 是公差为 $\lg q$ 的递减等差数列， A 错误；

$\therefore S_n - \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} (1 - q^n - 1) = \frac{a_1 q}{q-1} \cdot q^{n-1}$ ， $\therefore \{S_n - \frac{a_1}{1-q}\}$ 是首项为 $\frac{a_1 q}{q-1} < 0$ ， 公比为 q

的递增等比数列， C 正确；

$\therefore a_1 > 1$ ， $0 < q < 1$ ， $a_4 = 1$ ， $\therefore n \leq 3$ 时， $a_n > 1$ ， $n \geq 5$ 时， $0 < a_n < 1$ ， $\therefore n \leq 4$ 时， $T_n > 1$ ，

$\therefore T_7 = a_1 a_2 \cdots a_7 = a_4^7 = 1$ ， $\therefore n \geq 8$ 时， $T_n = T_7 a_8 a_9 \cdots a_n < T_7 = 1$ ， 又 $T_5 = \frac{T_7}{a_6 a_7} > 1$ ，

$T_6 = \frac{T_7}{a_7} > 1$ ， 所以使得 $T_n > 1$ 成立的 n 的最大值为 6， D 正确。

12. 解: 对于选项 A: 连接交 NS 交 AC 于 G 点, 连接 BG ,

则由 $AB = BC$, $AQ = \frac{2}{3}AM$, 可得 BG 必过点 Q , 且 $BQ = \frac{2}{3}BG$, 因为 $PS \subset$ 面 BB_1NG ,

$PS \parallel$ 面 AMB_1 , 面 $AMB_1 \cap$ 面 $BB_1NG = B_1Q$, 所以 $PS \parallel B_1Q$, A 正确;

对于选项 B: $\because PS \parallel B_1Q$, $\therefore \angle NPS = \angle NBQ = \angle B_1QB$, $\therefore Rt\triangle PNS \sim Rt\triangle QBB_1$,

$$\therefore \frac{PN}{BQ} = \frac{NS}{BB_1} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } PN = \frac{1}{2}BQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BG = \frac{1}{3}B_1N,$$

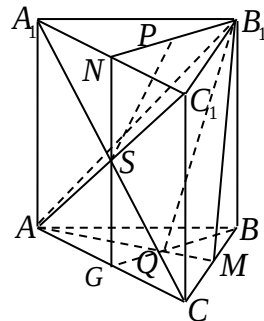
$\therefore P$ 为靠近 N 的三等分点, B 错误;

对于选项 C: $\because AC \perp NG$, $AC \perp BG$,

$\therefore AC \perp$ 面 BB_1NG , $\therefore AC \perp PS$, C 正确;

对于选项 D: $\because B_1P \parallel BQ$, 且 $B_1P = BQ$, $\therefore BB_1PQ$ 是矩形,

$$\therefore V_{P-AB_1M} = V_{B-AB_1M} = V_{B_1-ABM} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{2}{3}, \text{ D 正确.}$$



15. 解: $\because a = c(\cos B + \sqrt{3}\cos C)$, $\therefore \sin A = \sin C(\cos B + \sqrt{3}\cos C)$,

$$\therefore \sin A = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C,$$

化简得 $\cos C \sin B = \sqrt{3} \sin C \cos C$, $\because \triangle ABC$ 非直角三角形, $\therefore \cos C \neq 0$,

$$\therefore \sin B = \sqrt{3} \sin C, \text{ 即 } b = \sqrt{3}c,$$

$$\therefore S = \sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2 - (\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-4c^4+72c^2-81}{4}}, \text{ 当且仅当 } c^2 = 9, \text{ 即 } c = 3$$

时, S 有最大值.

16. 解: $\because f(x) = ae^x + \ln \frac{a}{x+2} - 2 > 0$, 则 $e^{x+\ln a} + \ln a > \ln(x+2) + 2$,

两边加上 x 得到 $e^{x+\ln x} + x + \ln a > x + 2 + \ln(x+2) = e^{\ln(x+2)} + \ln(x+2)$, $\because y = e^x + x$ 单调递增, $\therefore x + \ln a > \ln(x+2)$, 即 $\ln a > \ln(x+2) - x$,

令 $g(x) = \ln(x+2) - x$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x+2} - 1 = \frac{-x-1}{x+1}$, $\therefore x \in (-2, -1)$ 时, $g'(x) > 0$,

$g(x)$ 单调递增, $x \in (-1, +\infty)$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

$$\therefore \ln a > g(x)_{\max} = g(-1) = 1, \therefore a > e.$$

四、解答题:

17. 解: (1) 设等差数列的公差为 d , 等比数列的公比为 q , $\because a_2 = a_3 - b_3$, $a_3 = S_3 + b_2$,

$$\therefore \begin{cases} d = q^2 \\ 1+2d = 1+q+q^2+q \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} q = 2 \\ d = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} q = 0 \\ d = 0 \end{cases} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore a_n = 4n - 3, b_n = 2^{n-1}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) $\because \{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$, 又由 (1) 知: $b_{n+2} = 2b_{n+1}$,

$$\therefore c_n = \frac{a_n b_{n+1}}{a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{(2a_{n+1} - a_{n+2})b_{n+1}}{a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{2b_{n+1}}{a_{n+2}} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{b_{n+2}}{a_{n+2}} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore T_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \frac{b_{n+2}}{a_{n+2}} - \frac{b_2}{a_2} = \frac{2^{n+1}}{4n+5} - \frac{2}{5}, \therefore \frac{5}{5T_n+2} = \frac{4n+5}{2^{n+1}}, \quad \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$\text{则 } S'_n = 9\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 13\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (4n+5)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{①}$$

$$\frac{1}{2}S'_n = 9\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 13\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + (4n+5)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \quad \text{②}$$

由①-②得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S'_n &= 9\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - (4n+5)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \\ &= 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} - (4n+5)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = \frac{5}{4} + 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - (4n+5)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \\ &= \frac{13}{4} - (4n+13)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}, \end{aligned}$$

$$\therefore S'_n = \frac{13}{2} - (4n+13)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \quad \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

18. 解: (1) 因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π , $\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, $\therefore \omega = 2$, $\cdots \cdots 2 \text{ 分}$

$\therefore f(x)$ 的图像是由 $y = \sqrt{2}\sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到,

$$\therefore f(x) = \sqrt{2}\sin\left[\omega\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right], \text{ 即 } f(x) = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

令 $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 得 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$, $\cdots 5 \text{ 分}$

要使直线 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$ 与 y 轴距离最近, 则须 $\left|\frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}\right|$ 最小,

$$\therefore k = -1, \text{ 此时对称轴方程为 } x = -\frac{\pi}{12}, \text{ 即所求对称轴方程为 } x = -\frac{\pi}{12}. \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

(2) 由已知得: $f(x) = \sqrt{2}\sin\left[\omega\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right],$

令 $f(x) = 0$ 得: $\omega x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\omega = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 即 $x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{3}}{\omega}, k \in \mathbb{Z}, \cdots \cdots 8 \text{ 分}$

$$\because f(x) \text{ 在 } [\frac{\pi}{2}, \pi] \text{ 上仅有一个零点, } \therefore \begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq \frac{k\pi + \frac{\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{3}}{\omega} \leq \pi \\ \frac{(k-1)\pi + \frac{\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{3}}{\omega} < \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \because \omega > 0, \\ \frac{(k+1)\pi + \frac{\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{3}}{\omega} > \pi \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{3k-1}{2} \leq \omega \leq 6k-2 \\ \omega > 6k-8 \\ \omega < \frac{3k+2}{2} \end{cases}, \because \omega > 0, \therefore \begin{cases} 6k-2 > 0 \\ \frac{3k-1}{2} \leq 6k-2, \text{ 解得: } \frac{1}{3} \leq k < 2, \\ 6k-8 < \frac{3k+2}{2} \end{cases}$$

$$\because k \in \mathbb{Z}, \therefore k=1, \therefore 1 \leq \omega < \frac{5}{2}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (1) 在平面 EDC 内作 $EF \perp CD$ 于点 F , 因为平面 $ABCD \perp$ 平面 EDC , 平面 $ABCD \cap$ 平面 $EDC = DC$, 所以 $EF \perp$ 平面 $ABCD$,2 分

因为 E 为半圆弧 CD 上一点, 所以 $CE \perp ED$,

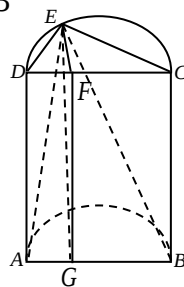
$$\text{所以 } V_{E-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot EF = \frac{1}{3} \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} \times \frac{CE \cdot ED}{CD} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \cdot CE \cdot ED, \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } CE^2 + ED^2 = CD^2 = 5,$$

$$\therefore V_{E-ABCD} \leq \frac{2\sqrt{5}}{3} \times \frac{CE^2 + ED^2}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{3},$$

$$\text{当且仅当 } CE = ED = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ 时等号成立,}$$

$$\text{所以四棱锥 } E-ABCD \text{ 的体积的最大值为 } \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$



.....6 分

(2) 由条件①得: $4|\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{DC}| \cos \angle CDE = |\overrightarrow{CE} \parallel \overrightarrow{DC}| \cos \angle DCE$, 即 $4DE^2 = CE^2$, 所以 $2DE = CE$, 又因为 $DE^2 + CE^2 = 5$, 所以 $DE = 1$, $CE = 2$,

由条件②得: 因为 $AD \parallel BC$, $BC \perp$ 平面 DCE , 所以 $\angle CBE$ 为直线 AD 与 BE 所成角, 且 $\sin \angle CBE = \frac{2}{3} = \frac{CE}{BE}$, $\frac{CE}{BC} = \tan \angle CBE = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$$\text{由条件③得: } \frac{\sin \angle EAB}{\sin \angle EBA} = \frac{EB}{EA} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 设 } AD = x, \text{ 则 } \frac{x^2 + CE^2}{x^2 + DE^2} = \frac{3}{2},$$

若选条件①②, 则 $DE=1$, $CE=2$, 且 $\frac{CE}{BC} = \tan \angle CBE = \frac{2}{\sqrt{5}}$, 所以 $AD=BC=\sqrt{5}$,

若选条件①③, 则 $DE=1$, $CE=2$, 且 $\frac{x^2+CE^2}{x^2+DE^2} = \frac{3}{2}$, 所以 $AD=BC=x=\sqrt{5}$,

若选条件②③, 则 $\frac{CE}{x} = \tan \angle CBE = \frac{2}{\sqrt{5}}$, 且 $\frac{x^2+CE^2}{x^2+DE^2} = \frac{3}{2}$, $DE^2+CE^2=5$,

所以 $AD=BC=x=\sqrt{5}$,

即从①②③任选两个作为条件, 都可以得到 $AD=BC=\sqrt{5}$,9 分

下面求 AD 与平面 EAB 所成角的正弦值:

方法一: 设点 D 到平面 EAB 的距离为 h , AD 与平面 EAB 所成角为 θ , 则由

$$V_{D-EAB} = V_{E-DAB} \text{ 得: } h \cdot S_{\triangle EAB} = EF \cdot S_{\triangle DAB} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}, \text{ 所以 } h = \frac{\sqrt{5}}{S_{\triangle EAB}},$$

作 $FG \perp AB$ 于点 G , 连接 EG , 则由 $EF \perp$ 平面 $ABCD$ 知 FG 是 EG 在平面 $ABCD$ 内的射影, 所以 $EG \perp AB$,

$$\therefore S_{\triangle EAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot EG = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{EF^2 + FG^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{29}}{2},$$

$$\therefore h = \frac{\sqrt{5}}{S_{\triangle EAB}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{29}}, \therefore \sin \theta = \frac{h}{AD} = \frac{2}{\sqrt{29}},$$

所以 AD 与平面 EAB 所成角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{29}}{29}$12 分

方法二: 以 A 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $B(\sqrt{5}, 0, 0)$, $D(0, 0, \sqrt{5})$, $E(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sqrt{5})$,

$$\therefore \overrightarrow{AE} = (\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sqrt{5}), \overrightarrow{AB} = (\sqrt{5}, 0, 0),$$

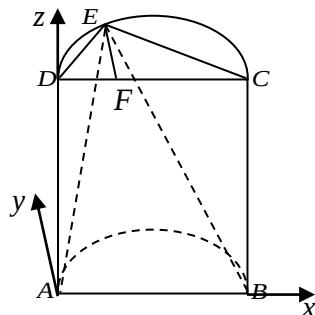
设平面 EAB 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}y + \sqrt{5}z = 0, \\ \sqrt{5}x = 0 \end{cases},$$

$$\text{令 } z=1, \text{ 则 } \vec{m} = (0, -\frac{5}{2}, 1), \therefore \cos \langle \overrightarrow{AD}, \vec{m} \rangle = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{1 + \frac{25}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{29}},$$

$$\therefore AD \text{ 与平面 } EAB \text{ 所成角} = \frac{\pi}{2} - \langle \overrightarrow{AD}, \vec{m} \rangle,$$

所以 AD 与平面 EAB 所成角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{29}}{29}$.



20. 解: (1) 由频数分布表得:

$$\bar{x} = \frac{14 \times 5 + 17 \times 6 + 20 \times 9 + 23 \times 12 + 26 \times 8 + 29 \times 6 + 32 \times 4}{50} = 22.76 \approx 22.8,$$

所以这 50 个社区这一天垃圾量的平均值为 22.8 吨.3 分

(2) 由 (1) 知 $\mu = 22.8$, $\therefore s = 5.2$, $\therefore \sigma = s = 5.2$,

$$\therefore P(X > 28) = P(X > \mu + \sigma) = \frac{1 - 0.6827}{2} = 0.15865, \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\therefore 320 \times 0.15865 = 50.768 \approx 51,$$

所以这 320 个社区中“超标”社区的个数为 51.7 分

(3) 由频数分布表知: 8 个“超标”社区中这一天的垃圾量至少为 30.5 吨的社区有 4 个,

$$\text{所以 } Y \text{ 的可能取值为 } 1, 2, 3, 4, \text{ 且 } P(Y=1) = \frac{C_4^1 C_4^4}{C_8^5} = \frac{1}{14}, \quad P(Y=2) = \frac{C_4^2 C_4^3}{C_8^5} = \frac{3}{7},$$

$$P(Y=3) = \frac{C_4^3 C_4^2}{C_8^5} = \frac{3}{7}, \quad P(Y=4) = \frac{C_4^4 C_4^1}{C_8^5} = \frac{1}{14}, \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

所以 Y 的分布列为:

Y	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

$$\therefore E(Y) = 1 \times \frac{1}{14} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{3}{7} + 4 \times \frac{1}{14} = \frac{5}{2}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与 $y^2 = 4x$ 有相同的焦点, 所以 $a^2 - b^2 = 1$ ①,

又 $\therefore$ 抛物线的准线被椭圆截得的弦长为 3, $\therefore \frac{2b^2}{a} = 3$ ②,

解①②得 $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, 所以曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$4 分

(2) 设直线 $AB: y = k(x-1)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立直线与椭圆方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x-1) \end{cases}$, 消去 y 得: $(3+4k^2)x - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{4k^2 - 12}{3+4k^2}$,6 分

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4k^2}{3+4k^2}, \quad \therefore \frac{y_1 + y_2}{2} = k\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - 1\right) = \frac{-3k}{3+4k^2},$$

$$\therefore P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{4k^2}{3+4k^2}, \frac{-3k}{3+4k^2}\right), \text{ 直线 } OP: y = -\frac{3}{4k}x \quad \text{③}, \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

直线 AB 方程 $y = k(x-1)$ 中令 $x = 0$ 得 $y = -k$, $\therefore E$ 的坐标为 $(0, -k)$,

因为直线 $EQ \perp OP$, $\therefore EQ$ 的直线方程为 $y = \frac{4k}{3}x - k$ ④,8 分

将③④联立相乘得到 $y^2 = -x^2 + \frac{3}{4}x$, 即 $(x - \frac{3}{8})^2 + y^2 = \frac{9}{64}$,

所以点 Q 的轨迹为以 $(\frac{3}{8}, 0)$ 为圆心, $\frac{3}{8}$ 为半径的圆,10 分

所以存在定点 $H(\frac{3}{8}, 0)$, 使得 QH 的长为定值 $\frac{3}{8}$12 分

22. 解: (1) 当 $m=1$ 时, $f(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2}$, $\therefore f'(x) = -\frac{2\ln x + 1}{x^3}$,1 分

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = e^{-\frac{1}{2}}$, $\therefore 0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, $x > e^{-\frac{1}{2}}$ 时,

$f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, $\therefore f(x)_{\max} = f(e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{e}{2}$4 分

(2) 由 $f(x) = m - \ln x$ 得 $\ln x - \frac{m(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = 0$, 令 $g(x) = \ln x - \frac{m(x^2 - 1)}{x^2 + 1}$,

所以方程 $f(x) = m - \ln x$ 的实根的个数即为函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点的个数,

$\because g(1) = 0$, $\therefore x=1$ 是函数 $g(x)$ 的一个零点,5 分

又 $\because g(\frac{1}{x}) = \ln \frac{1}{x} - \frac{m(\frac{1}{x^2} - 1)}{\frac{1}{x^2} + 1} = -\ln x + \frac{m(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = -g(x)$, $\therefore g(x)$ 在 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ 上

的零点互为倒数, 下面先研究 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的零点的个数:

$\because g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4mx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1)^2 - 4mx^2}{x(x^2 + 1)^2} (x > 1)$,6 分

(i) 若 $m \leq 0$, 则 $x > 1$ 时, $g(x) = \ln x - \frac{m(x^2 - 1)}{x^2 + 1} > 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的没有零点;7 分

(ii) 若 $m > 0$, 则 $g'(x) = \frac{(x^2 + 1)^2 - 4mx^2}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 2\sqrt{mx} + 1)(x^2 - 2\sqrt{mx} + 1)}{x(x^2 + 1)^2} (x > 1)$,

令 $h(x) = x^2 - 2\sqrt{mx} + 1 (x > 1)$,

① $\Delta = 4m - 4 \leq 0$, 即 $0 < m \leq 1$ 时, $h(x) \geq 0$, $\therefore g'(x) \geq 0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增, $\therefore g(x) > g(1) = 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的没有零点;9 分

② $\Delta = 4m - 4 > 0$, 即 $m > 1$ 时, $h(x) = 0$ 有两个不等实根 x_1, x_2 , 且 $x_1 x_2 = 1$, $\therefore$ 大根 $x_2 = \sqrt{m} + \sqrt{m-1} > 1$, 小根 $0 < x_1 < 1$, $\therefore x \in (1, x_2)$ 时, $h(x) < 0$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, $\therefore g(x_2) < g(1) = 0$,

又 $\because g(e^m) = m - \frac{m(e^{2m}-1)}{e^{2m}+1} = \frac{2m}{e^{2m}+1} > 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(1, x_2)$ 上恒小于 0, 在 $(x_2, +\infty)$ 上

存在唯一 $x_0 \in (x_2, e^m)$ 使得 $g(x_0) = 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上仅有一个零点 x_0 ,11 分

因为 $g(x)$ 在 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ 上的零点互为倒数, 且 $g(1) = 0$, 所以 $m \leq 1$ 时, $g(x)$ 仅有一个零点; $m > 1$ 时, $g(x)$ 有三个零点.

综上: $m \leq 1$ 时, 方程 $f(x) = m - \ln x$ 仅有一个实根;

$m > 1$ 时, 方程 $f(x) = m - \ln x$ 有三个实根.12 分

参考解法二: 由 $f(x) = m - \ln x$ 得 $\ln x - \frac{m(x^2-1)}{x^2+1} = 0$, $x=1$ 显然是该方程的一个根;

.....5 分

$x \neq 1$ 时, 方程等价于 $m = \frac{(x^2+1)\ln x}{x^2-1}$, 令 $h(x) = \frac{(x^2+1)\ln x}{x^2-1} (x > 0, x \neq 1)$,

则 $h'(x) = \frac{x^4-1-4x^2\ln x}{x(x^2-1)^2} = -\frac{x}{(x^2-1)^2} (4\ln x - x^2 + \frac{1}{x^2})$,6 分

令 $\varphi(x) = 4\ln x - x^2 + \frac{1}{x^2}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{4}{x} - 2x - \frac{2}{x^3} = -\frac{2(x^2-1)^2}{x^3} < 0$,

$\therefore x > 0$ 时, $\varphi(x)$ 单调递减,7 分

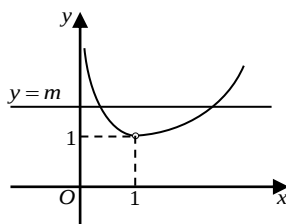
$\therefore 0 < x < 1$ 时, $\varphi(x) > \varphi(1) = 0$, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, $x > 1$ 时, $\varphi(x) < \varphi(1) = 0$, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,8 分

由 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$,

$x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow 1$ 时, $h(x) \rightarrow 1$,

可画出 $h(x)$ 的大致图像如图所示:



(注: 此处用到了高中教材中没有涉及到的函数极限知识, 可酌情扣 2—3 分)

结合图像得: $m > 1$ 时, 方程 $m = h(x)$ 有两个实根; $m \leq 1$ 时, 方程 $m = h(x)$ 没有实根;

综合得: $m \leq 1$ 时, 方程 $f(x) = m - \ln x$ 仅有一个实根;

$m > 1$ 时, 方程 $f(x) = m - \ln x$ 有三个实根.12 分