合肥市2021年高三第一次教学质量检测

数学(文)试题参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	A	C	B	B	A	D	C	C	D	C

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 2　　14. π　　15. $\left(2+\sqrt{2}\right)\pi$　　16. $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

三、解答题：

17.(本小题满分12分)

解：(1)由已知$\begin{cases}a_3=5\\2a_5+a_7=31\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，$\therefore a_n=2n-1$. ……………………………5分

(2) $S_n=\left(a_1+2^{a_1}\right)+\left(a_2+2^{a_2}\right)+\cdots+\left(a_n+2^{a_n}\right)$

$=\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)+\left(2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}\right)$

$=\dfrac{n\left(1+2n-1\right)}{2}+\dfrac{2\left(1-4^n\right)}{1-4}$

$=n^2+\dfrac{2^{2n+1}-2}{3}$. ……………………………12分

18.(本小题满分12分)

解：(1)由样本统计数据可知，样本中男生180人，其中“握笔姿势正确”的有24人；女生120人，其中“握笔姿势正确”的有30人，从而估计该地区初中毕业生中男生、女生“握笔姿势正确”的概率分别为$\dfrac{2}{15}$和$\dfrac{1}{4}$.

……………………………4分

	男	女	总计
握笔姿势正确	24	30	54
握笔姿势不正确	156	90	246
总计	180	120	300

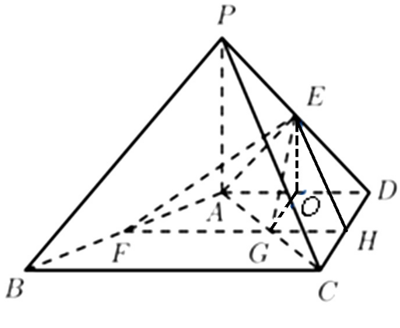
(2)由列联表计算得

$K^2=\dfrac{300\times\left(156\times30-24\times90\right)^2}{54\times246\times180\times120}\approx6.640>6.635$，

所以，有99%的把握认为该地区初中毕业生“握笔姿势是否正确”与性别有关. ……………………8分

(3)由(2)结论知，该地区初中毕业生“握笔姿势是否正确”与性别有关。此外，从样本数据能够看出，该地区初中毕业生中，男生与女生中握笔姿势正确的比例有明显差异，因此，在调查时，男生和女生应该分成两层，采用分层抽样的方法更好. ……………………………12分

19.(本小题满分12分)



解：(1)$\because$点F，G分别为AB，AC的中点，$\therefore FG\parallel BC$.

$\because FG\not\subset$平面PBC，$BC\subset$平面PBC，$\therefore FG\parallel$平面PBC.

延长FG交CD于点H，连接EH.

$\because GH\parallel BC$，$AD\parallel BC$，$\therefore GH\parallel AD$.

$\because G$是AC的中点，$\therefore H$是CD的中点.

$\because E$是PD的中点，$\therefore EH\parallel PC$.

$\because EH\not\subset$平面PBC，$PC\subset$平面PBC，$\therefore EH\parallel$平面PBC.

又$\because EH$，$FG\subset$平面EFG，且$EH\cap FG=H$，

$\therefore$平面$EFG\parallel$平面PBC. ……………………………6分

(2)设点F与平面AEG的距离为d，取AD的中点O，连接OE，OG，

则 $EO \parallel PA$，$GO \parallel CD$，且 $EO=\dfrac{1}{2}PA$，$GO=\dfrac{1}{2}CD$.

$\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore EO\perp$ 平面 $ABCD$.

由 $V_{三棱锥F-AEG}=V_{三棱锥E-AFG}$ 得 $\dfrac{1}{3}S_{\Delta AEG}\cdot d=\dfrac{1}{3}S_{\Delta AFG}\cdot EO$，即 $S_{\Delta AEG}\cdot d=S_{\Delta AFG}\cdot EO$.

在 ΔAEG 中，$AE=AG=GE=\sqrt{2}$，从而 $S_{\Delta AEG}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又$\because EO=1$，$S_{\Delta AFG}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta ABC}=1$，$\therefore d=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$点 F 与平面 AEG 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.　　……………………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

解:(1) 由条件，设直线 l 的方程为 $x=ty+1$，代入 $y^2=2x$ 得 $y^2-2ty-2=0$，

则 $|AB|=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{4t^2+8}=2\sqrt{\left(t^2+1\right)\left(t^2+2\right)}$.

由 $|AB|=2\sqrt{2}$，解得 $t=0$，$\therefore$交点 A,B 的坐标为 $\left(1,\sqrt{2}\right)$，$\left(1,\ -\sqrt{2}\right)$.

易知 ΔAOB 外接圆的圆心在 x 轴上，设圆心为（a，0）.

由 $a^2=\left(a-1\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$ 解得 $a=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore \Delta AOB$ 外接圆的方程为 $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$.　　……………………………6 分

(2) 设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），则 A'（$x_1,-y_1$）.

由(1)知，$y_1+y_2=2t$，$y_1y_2=-2$.

设直线 $A'B$ 的方程为 $x=my+n$，代入 $y^2=2x$ 得，$y^2-2my-2n=0$，

则 $\left(-y_1\right)\cdot y_2=-2n$，$\therefore 2n=-2$，即 $n=-1$，

$\therefore$直线 $A'B$ 经过定点(-1，0).　　……………………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：(1) $f'\left(x\right)=\ln x+\dfrac{x+a}{x}-\dfrac{b}{x^2}$，由条件 $f'\left(1\right)=a+1-b=a+1$，解得 $b=0$.

此时，切点为(1，0)，直线 $y=\left(a+1\right)x-a$ 不经过切点，符合题意，所以 $b=0$. ………………4 分

(2) 由(1)知，$f'\left(x\right)=\ln x+\dfrac{a}{x}+1$.

设 $g\left(x\right)=\ln x+\dfrac{a}{x}+1$，则 $g'\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x-a}{x^2}$（$x>0$）.

①当 $a=0$ 时，$g\left(x\right)=\ln x+1$，易知函数有唯一零点 e^{-1}，且 $x\in\left(0,\ e^{-1}\right)$，$g\left(x\right)<0$；$x\in\left(e^{-1},+\infty\right)$，$g\left(x\right)<0$. 此时，$f\left(x\right)$ 仅有一个极小值点，无极大值点;

②当 $a<0$ 时，$g'\left(x\right)>0$ 恒成立，$g\left(x\right)$ 在区间上单调递增.

又$\because g\left(e^{-1}\right)=ae<0$，$g\left(e-a\right)=\ln(e-a)+\dfrac{e}{e-a}>0$，

$\therefore g\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上存在唯一零点，从而 $f\left(x\right)$ 仅有一个极小值点，无极大值点;

③当 $a>0$ 时，$g'\left(a\right)=0$，且当 $x\in\left(0,\ a\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$；当 $x\in\left(a,+\infty\right)$ 时，$g'\left(x\right)>0$.

$\therefore g\left(x\right)$ 在 $\left(0,\ a\right)$ 上单调递减，在 $\left(a,+\infty\right)$ 上单调递增，且最小值为 $g\left(a\right)=\ln a+2$.

(i) 若 $g\left(a\right)\geq 0$，即 $a\geq e^{-2}$，此时 $g\left(x\right)\geq 0$ 恒成立，$f\left(x\right)$ 无极值点;

(ii) 若 $g\left(a\right)<0$，即 $0<a<e^{-2}$.

$\because a<1$，且 $g\left(a\right)<0$，$g\left(1\right)=a+1>0$，且 $g\left(x\right)$ 在 $\left(a,+\infty\right)$ 上单调递增，

根据零点存在性定理得，$g\left(x\right)$ 在 $\left(a,+\infty\right)$ 恰有一个零点，从而 $f\left(x\right)$ 在 $\left(a,+\infty\right)$ 恰有一个极小值点.

考虑$g\left(a^2\right)=2\ln a+\frac{1}{a}+1$. 令$h(x)=2\ln x+\frac{1}{x}+1$，$x\in\left(0,\ e^{-2}\right)$，则$h'(x)=\frac{2x-1}{x^2}<0$.

$\therefore h(x)$在$\left(0,\ e^{-2}\right)$上单调递减，$\therefore h(x)>h\left(e^{-2}\right)=e^2-3>0$，即$g\left(a^2\right)=2\ln a+\frac{1}{a}+1>0$.

$\because 0<a^2<a$，$\therefore g\left(a^2\right)>0$，$g(a)<0$，且$g(x)$在$(0,\ a)$上单调递减，

根据零点存在性定理得，$g(x)$在$(0,\ a)$恰有一个零点，从而$f(x)$在$(0,\ a)$恰有一个极大值点.

$\therefore$当$0<a<e^{-2}$时，$f(x)$有且仅有两个极值点.

综上，当$a\geq e^{-2}$时，$f(x)$极值点个数为0；

当$a\leq 0$时，$f(x)$极值点个数为1；

当$0<a<e^{-2}$时，$f(x)$极值点个数为2. ……………………………12 分

22.（本小题满分 10 分）

解：(1)化简曲线C参数方程得$\begin{cases}x=\cos 2\beta,\\ y=\frac{1}{2}\sin 2\beta\end{cases}$（$\beta$为参数，且$\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$），

消去参数β得曲线C的普通方程得$x^2+4y^2=1(x\neq -1)$，

化成极坐标方程为$(\rho\cos\theta)^2+4(\rho\sin\theta)^2=1$ $(\theta\neq\pi+2k\pi,\ k\in Z)$，

$\therefore \rho^2=\frac{1}{1+3\sin^2\theta}$（$\theta\neq\pi+2k\pi$，$k\in Z$）. ………………………………5 分

(2)不妨设M（ρ_1，θ），N（ρ_2，$\theta+\frac{\pi}{3}$），则$|OM|=\rho_1$，$|ON|=\rho_2$，

$\therefore \frac{1}{|OM|^2}-\frac{1}{|ON|^2}=1+3\sin^2\theta-\left[1+3\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\frac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2\theta-\frac{9}{4}\cos 2\theta=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$.

当且仅当$\theta=\frac{7\pi}{12}+k\pi(k\in Z)$时，$\frac{1}{|OM|^2}-\frac{1}{|ON|^2}$取最大值$\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………………………10 分

23.（本小题满分 10 分）

解：(1)由$f(1)\geq 1$得$|2a-1|-2|a+1|\geq 1$

$\therefore\begin{cases}a\leq -1,\\ 1-2a+2(a+1)\geq 1,\end{cases}$或$\begin{cases}-1<a\leq\frac{1}{2},\\ 1-2a-2(a+1)\geq 1,\end{cases}$或$\begin{cases}a>\frac{1}{2},\\ 2a-1-2(a+1)\geq 1.\end{cases}$

解得$a\leq -1$或$-1<a\leq -\frac{1}{2}$，

$\therefore a$的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$. ………………………………5 分

(2)设$x^2=t$（$t\geq 0$）.

由已知得，对任意$t\geq 0$，使得$f(t)\leq 0$成立.

$\because f(t)\leq 0\Leftrightarrow |t-2a|\leq 2|t+a|\Leftrightarrow (t-2a)^2\leq 4(t+a)^2\Leftrightarrow 3t^2+12at\geq 0$.

当$t=0$，$a\in\mathrm{R}$；当$t>0$，$t+4a\geq 0$恒成立，即$a\geq 0$.

$\therefore a\geq 0$，即a的最小值为0. ………………………………10 分