2021届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（一）
文科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	A	C	A	B	D	C	B	C	D	B

【解析】

1．∵集合 $A=\{x\mid x(x-2)\leqslant 0\}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid x>1\}$，∴ $A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$，故选D.

2．$z=\dfrac{1}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{2^2-\mathrm{i}^2}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{5}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，虚部为$-\dfrac{1}{5}$，故选C.

3．依题意可得$a\times 1.1+1=3.2$，解得$a=2$，故选A.

4．取$y=3^{t-1}=10^8$，故$t-1=\log_3 10^8=8\log_3 10$，即$t=8\log_3 10+1=8\left(\dfrac{1}{\lg 3}\right)+1\approx 17.77$，故该种病毒细胞实验最多进行的天数为17，故选C.

5．∵ $\sqrt{3}\cdot\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}+\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha=\sqrt{3}$，∴ $\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

∵ $\alpha\in(0,\pi)$，∴ $2\alpha-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$或$2\alpha-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$，∴ $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{\pi}{2}$，当$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$时，∴ $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$；当$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时，∴ $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故选A.

6．设$P(x,y)$，$\overrightarrow{OM}=(1,1)$，$\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MN}=(-2,1)$，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=1$，∵ $\overrightarrow{OM}=t_1\overrightarrow{OP}+t_2(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON})(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})$，即$(1,1)=(t_1x,t_1y)+t_2(-2,1)$，∴ $\begin{cases}t_1x-2t_2=1,\\ t_1y+t_2=1,\end{cases}$ ∵ $2t_1-t_2=0$，∴ $t_2=2t_1$，∴ $\begin{cases}t_1x-4t_1=1,\\ t_1y+2t_1=1,\end{cases}$ ∴ $t_1x-4t_1=t_1y+2t_1$，∴ $x-y-6=0$，故选B.

7．因为两个曲线都是关于x轴对称，故A，B关于x轴对称，故$\angle AOx=\angle BOx=\dfrac{\pi}{6}$，设

$A\left(m,\ \frac{\sqrt{3}m}{3}\right)$，代入$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$，得$m=\sqrt{3}$，故$A(\sqrt{3},\ 1)$，代入$y^2=2px$，有$1=2\sqrt{3}p$，

解得 $p=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，故选 D.

8．由$\begin{cases}3x-y-1=0,\\x+2y-5=0,\end{cases}$可以得到$\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$故$A(1,\ 2)$，直线$l$的方程可整理为$x+2+b(y+1)=0$，故直线$l$过定点$(-2,\ -1)$，故$d_{\max}=\sqrt{(1+2)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{2}$，故选 C.

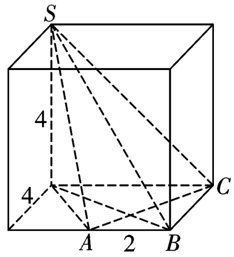

图 1

9．如图 1，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$，$V_{S-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\bullet h=\frac{1}{3}\times4\times4=\frac{16}{3}$，故选 B.

10．$c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}=\log_3 4>1$，$a=\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}=\log_2\frac{4}{3}<\frac{1}{2}$，$b=\log_3 2>\frac{1}{2}$，综上可得，故选 C.

11．因为$\cos A=\frac{1}{5}$，所以$\sin A=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，又$AC=5$，$\triangle ABC$的面积为$2\sqrt{6}$，所以有$2\sqrt{6}=\frac{1}{2}\times5\times AB\times\frac{2\sqrt{6}}{5}$，解得$AB=2$，由余弦定理可得$BC^2=2^2+5^2-2\times2\times5\times\frac{1}{5}=25$，所以$BC=5$，由$AC=BC$，所以$\cos B=\cos A=\frac{1}{5}$，所以$AM^2=2^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\times2\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{33}{4}$，即$AM=\frac{\sqrt{33}}{2}$，故选 D.

12．由正切函数图象特征可知①正确；$y=\left|\sin x+\frac{1}{2}\right|$的最小正周期为$2\pi$，故②不正确；$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的表达式可以改写为$f(x)=-\cos\left(\frac{7}{6}\pi-2x\right)$，故③不正确；由$A+B=\frac{\pi}{4}$，则$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=1$，$(1+\tan A)(1+\tan B)=1+\tan A+\tan B+\tan A\bullet\tan B=2$，④正确，故选 B.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	4	$\sqrt{5}$	$3x+ey-9e=0$	$\frac{3\sqrt{10}-\sqrt{15}}{15}$

【解析】

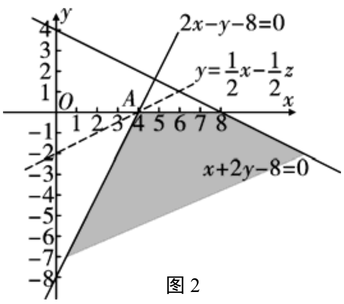

图 2

13．画出不等式组表示的可行域，如图 2 中阴影部分所示．由 $z=x-2y$，可得 $y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$．平移直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$，结合图形可得，当直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$ 经过可行域内的点 A 时，直线在 y 轴上的截距最大，此时 z 取得最小值．由题意得 A 点坐标为 $(4,0)$，$\therefore z_{\min}=4-0=4$，即 $z=x-2y$ 的最小值是 4．

14．用点到直线的距离公式可得双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 中焦点到渐近线的距离为 b．

15．因为 $f'(x)=[f'(\mathrm{e})+6x]\ln x+f'(\mathrm{e})+3x$，所以 $f'(\mathrm{e})=f'(\mathrm{e})+6\mathrm{e}+f'(\mathrm{e})+3\mathrm{e}$，即 $f'(\mathrm{e})=-9\mathrm{e}$，则 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=9-\frac{3}{\mathrm{e}^2}$，且 $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{3}{\mathrm{e}}$，所以所求切线方程为 $3x+\mathrm{e}y-9\mathrm{e}=0$．

16．设该正三棱锥为 $P-ABC$，其中 $\triangle ABC$ 是正三角形，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 2^2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，设 D 为 $\triangle ABC$ 的重心，则 $AD=\frac{2}{3}\times 2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$PD=\sqrt{3-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{3}$，$S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PAC}=S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{(\sqrt{3})^2-1}=\sqrt{2}$，设内切球半径为 r，则 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PD=\frac{1}{3}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB})r$，即 $\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{1}{3}(\sqrt{3}+3\sqrt{2})r$，解得 $r=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}(3\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{3\sqrt{10}-\sqrt{15}}{15}$．

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，根据题意，

有 $\begin{cases}a_1q+a_1q^2=5,\\ a_1q^3-a_1q=15,\end{cases}$ ……………………………………………（3 分）

解得 $\begin{cases}a_1=\frac{1}{4},\\ q=4,\end{cases}$ ……………………………………………（5 分）

所以 $a_n=4^{n-2}$． ……………………………………………（6 分）

（2）令 $b_n=\log_4 a_n=\log_4 4^{n-2}=n-2$，

所以 $S_n=\dfrac{n(-1+n-2)}{2}=\dfrac{n(n-3)}{2}$，

…………………………………………………………（8 分）

根据 $S_m+S_{m+1}=S_{m+2}$，可得 $\dfrac{m(m-3)}{2}+\dfrac{(m+1)(m-2)}{2}=\dfrac{(m+2)(m-1)}{2}$，

整理得 $m^2-5m=0$，因为 $m>0$，

所以 $m=5$．　　　　　　　　　　　　…………………………………………………（12 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）由调查数据，问卷得分不低于 60 分的频率为

$\dfrac{150+180+130+140+130+70}{1200}=\dfrac{2}{3}$，

……………………………………………………………（3 分）

故估计从该社区随机抽取一名居民其得分不低于 60 分的概率为 $\dfrac{2}{3}$．

……………………………………………………………（4 分）

（2）由题意得列联表如下：

	不太了解	比较了解	总计
男性	250	400	650
女性	150	400	550
总计	400	800	1200

…………………………………………………………（6 分）

K^2 的观测值 $k=\dfrac{1200\times(250\times400-150\times400)^2}{400\times800\times650\times550}\approx16.783$，

……………………………………………………………（9 分）

因为 $16.783>6.635$，

……………………………………………………………（10 分）

所以有 99%的把握认为居民对数字人民币的了解程度与性别有关.

……………………………………………………………（12 分）

19．（本小题满分 12 分）

（1）证明：如图 3，连接 B_1C，

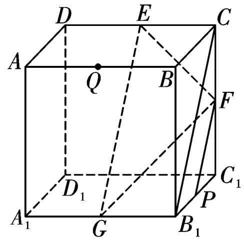

图 3

在 $\triangle C_1CB_1$ 中，P，F 分别是 B_1C_1，C_1C 的中点，

所以 PF 是 $\triangle C_1CB_1$ 的中位线，

则 $PF /\!/ B_1C$．

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$DC /\!/ A_1B_1$，G，E 分别是 A_1B_1，DC 的中点，

则 $EC /\!/ GB_1$，$EC = GB_1$，

所以四边形 GB_1CE 是平行四边形，则 $B_1C /\!/ GE$，

所以 $PF /\!/ GE$，

所以 $PF \subset$ 平面 GEF.　　……………………………………（6 分）

（2）解：如图 4，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 QE，QG，QF，

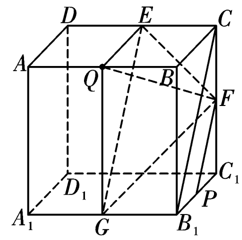

图 4

$\triangle QGE$ 是直角三角形，$QE = QG = 2$，$GE = \sqrt{QE^2 + QG^2} = 2\sqrt{2}$，

而且 $CC_1 /\!/ BB_1 /\!/ QG$，$CC_1 \not\subset$ 平面QGE，

所以 $CC_1 /\!/$ 平面QGE，所以点 F 到平面 QGE 的距离等于点 C 到平面 QGE 的距离，

易知 $CE \perp$ 平面 QGE，所以点 F 到平面 QGE 的距离为 $CE = 1$，

而 $EF = \sqrt{EC^2 + CF^2} = \sqrt{2}$，

$GF = \sqrt{GC_1^2 + C_1F^2} = \sqrt{GB_1^2 + B_1C_1^2 + C_1F^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$，

……………………………………………………………（9 分）

在 $\triangle FGE$ 中，$EF^2 + GF^2 = GE^2$，所以 $\triangle FGE$ 是直角三角形，

设求 Q 到平面 EFG 的距离为 d，在三棱锥 $Q-GEF$ 中，$V_{Q-GEF} = V_{F-QGE}$，

即 $\dfrac{1}{3}S_{\triangle QGE} \cdot CE = \dfrac{1}{3}S_{\triangle GEF} \cdot d$，

即 $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times QE \times QG \times CE = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times EF \times GF \cdot d$，

即 $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 1 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{6} \times d$，解得 $d = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以 Q 到平面 EFG 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.　　………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意可得 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{2b^2}{a}=1$，

$\therefore a=2$，$b=1$，

C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$． ……………………………………………………………（4 分）

（2）设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$Q(x_0,\ 0)$，

设直线 l：$x=my+1$，将其代入 $x^2+4y^2-4=0$，

得 $(4+m^2)y^2+2my-3=0$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{-2m}{4+m^2}$，$y_1y_2=\dfrac{-3}{4+m^2}$，

$\therefore x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=\dfrac{8}{4+m^2}$，

$x_1x_2=m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1=\dfrac{4-4m^2}{4+m^2}$，

……………………………………………………………（8 分）

$\overrightarrow{QA}\bullet\overrightarrow{QB}=t$，则 $t=(x_1-x_0,\ y_1)\bullet(x_2-x_0,\ y_2)=x_1x_2+x_0^2-(x_1+x_2)x_0+y_1y_2$

$=\dfrac{4-4m^2}{4+m^2}-\dfrac{8}{4+m^2}x_0-\dfrac{3}{4+m^2}+x_0^2$，

$=\dfrac{17-8x_0}{4+m^2}+x_0^2-4$，

这是一个与 m 无关的常数，

$\therefore x_0=\dfrac{17}{8}$，$t$ 为常数，此时存在定点 $Q\left(\dfrac{17}{8},\ 0\right)$，使 $\overrightarrow{QA}\bullet\overrightarrow{QB}$ 为定值．

……………………………………………………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）因为 $f(x)=x-\ln x$，故 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

……………………………………………………………（1 分）

令 $f'(x)>0$，得 $x>1$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$，

故 $f(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上单调递减，在 $(1,\ +\infty)$ 上单调递增， ……………………（3 分）

故函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$． ……………………………………………（4 分）

（2）由题意知 $\ln x \leqslant a\mathrm{e}^x+\ln a$，

两边同时加上 x，得 $a\mathrm{e}^x+x+\ln a \geqslant x+\ln x$，

即 $a\mathrm{e}^x+\ln(a\mathrm{e}^x) \geqslant x+\ln x$， ……………………………………………………（7 分）

设 $h(x)=x+\ln x(x>0)$，则 $h'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，故 $h(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，

$a\mathrm{e}^x+\ln(a\mathrm{e}^x) \geqslant x+\ln x$ 恒成立，即 $h(a\mathrm{e}^x) \geqslant h(x)$ 恒成立， ……………………（9 分）

即 $a\mathrm{e}^x \geqslant x$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上恒成立，即 $a \geqslant \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上恒成立，

设 $\varphi(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}(x>0)$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$，

则当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)>0$，故 $\varphi(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上单调递增；

当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)<0$，故 $\varphi(x)$ 在 $(1,\ +\infty)$ 上单调递减，

故 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$， ……………………………………………………（11 分）

故 $a \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$，故所求实数 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\ +\infty\right)$.

………………………………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

（1）解：由 $x^2+y^2=(2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta)^2+(2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta)^2=16$，

得曲线 C 为 $x^2+y^2=16$． ……………………………………………………（5 分）

（2）证明：直线 l 的极坐标方程展开为 $\rho\cos\alpha+\sqrt{3}\rho\sin\alpha=8$，

故 l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y=8$．

显然 M 的坐标为 $(8,\ 0)$，不妨设过点 M 的直线方程为 $\begin{cases} x=8+t\cos\beta, \\ y=t\sin\beta, \end{cases}$ (t 为参数)，

代入 C 得 $t^2+16\cos\beta t+48=0$，设 P，Q 对应的参数为 t_1，t_2，

所以 $|t_1t_2|=48$ 为定值. ……………………………………………………（10 分）

23．（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

（1）证明：当 $m=5$ 时，$f(x)=|x+5|+|3-x|\geqslant|(x+5)+(3-x)|=8>\mathrm{e}^2$，

则 $\ln f(x)\geqslant\ln 8>\ln\mathrm{e}^2=2$ 成立. ……………………………………………（5 分）

（2）解：关于 x 的不等式 $g(x)\geqslant f(x)+\dfrac{3}{2}m$ 可化为 $|2x-2m^2-7|-|x-3|\geqslant\dfrac{3}{2}m$，

令 $h(x)=|2x-2m^2-7|-|x-3|=\begin{cases}-x+2m^2+4，x\leqslant 3,\\ -3x+2m^2+10，3<x<m^2+\dfrac{7}{2},\\ x-2m^2-4，x\geqslant m^2+\dfrac{7}{2},\end{cases}$

则 $h(x)_{\min}=h\left(m^2+\dfrac{7}{2}\right)=-m^2-\dfrac{1}{2}$，即 $-m^2-\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{3}{2}m$，

则有 $m^2+\dfrac{3}{2}m+\dfrac{1}{2}\leqslant 0$，

解得 $-1\leqslant m\leqslant-\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………（10 分）

2021届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（一）
理科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	A	C	D	C	D	A	B	B	C	A

【解析】

1．由题意得 $A=\{x\mid x<1\}$，$B=\{x\mid x>-2\}$，故 $A\cap B=(-2,1)$，故选B．

2．$z=\dfrac{1}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{2^2-\mathrm{i}^2}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{5}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，虚部为 $-\dfrac{1}{5}$，故选C．

3．依题意得 $a\times1.1+b=3.2$，$a\times1.1=2.2$，解得 $a=2$，$b=1$，故选A．

4．取 $y=3^{t-1}=10^8$，故 $t-1=\log_3 10^8=8\log_3 10$，即 $t=8\log_3 10+1=8\left(\dfrac{1}{\lg 3}\right)+1\approx17.77$，故该种病毒细胞实验最多进行的天数为17，故选C．

5．$\because x^2=8y$，$\therefore p=4$，$F(0,2)$，设 $P(x_1,y_1)$，$\therefore|PF|=y_1+\dfrac{p}{2}=8$，$\therefore y_1=6$，$\therefore P(\pm4\sqrt{3},6)$，设 $M(x_0,-2)$，$\because\angle PFM=90^\circ$，$\overrightarrow{FP}=(\pm4\sqrt{3},4)$，$\overrightarrow{MF}=(-x_0,4)$，$\therefore\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{MF}=0$，$\therefore x_0=\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$\therefore M\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3},-2\right)$或$M\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3},-2\right)$，故选D．

6．设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 的投影为 $|\vec{a}|\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore\theta=120^\circ$，设 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 的夹角为 α，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$，$\cos\alpha=\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|}=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，故选C．

7．$AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos A=BC^2$，即 $25+AB^2-2\times5\times\dfrac{2}{5}AB=37$，即 $AB^2-4AB-12=0$，解得 $AB=6$，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\dfrac{1}{2}\times5\times6\times\dfrac{\sqrt{21}}{5}=3\sqrt{21}$，故选D．

8．$\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}\cdot A_3^3=90$，$C_6^3C_3^2C_1^1A_3^3=360$，$\dfrac{C_6^1C_5^1C_4^4}{A_2^2}\cdot A_3^3=90$，∴共有 $90+360+90=540$，故选 A．

9．如图 1，$SA=6$，$AC=2\sqrt{5}$，$SC=4\sqrt{2}$，$\cos\angle SAC=\dfrac{36+20-32}{2\times6\times2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\angle SAC=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，∴ $S_{\triangle SAC}=\dfrac{1}{2}\cdot SA\cdot AC\cdot\sin\angle SAC=12$，∴ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 2\times4=4$，∴ $S_{\triangle SAB}=4\sqrt{2}$，∴ $S_{\triangle SBC}=8\sqrt{2}$，∴表面积为$16+12\sqrt{2}$，故选 B．

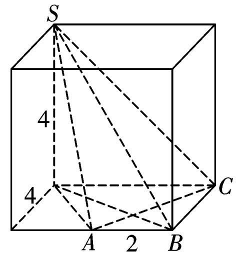

图 1

10．由 $f(x)=x^2$，得 $f'(x)=2x$，则 $f'(1)=2$，又 $f(1)=1$，所以函数 $f(x)=x^2$ 的图象在 $x=1$ 处的切线为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$．设 $y=2x-1$ 与函数 $g(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{a}}$ 的图象相切于点 $(x_0,\ y_0)$，由 $g'(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{a}}$，可得 $\begin{cases} g'(x_0)=\dfrac{e^{x_0}}{\sqrt{a}}=2, \\ g(x_0)=\dfrac{e^{x_0}}{\sqrt{a}}=2x_0-1, \end{cases}$ 解得 $x_0=\dfrac{3}{2}$，$\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}=\dfrac{e\sqrt{e}}{2}$，$a=\left(\dfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}\right)^2=\dfrac{e^3}{4}$，故选 B．

11．依题意可得双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x$，设 $P(x,\ y)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，因为 $\overline{PA}=-2\overline{PB}$，所以有 $\begin{cases} x_1-x=-2(x_2-x), \\ y_1-y=-2(y_2-y), \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+2x_2}{3}, \\ y=\dfrac{y_1+2y_2}{3}, \end{cases}$ 又 $\begin{cases} y_1=\dfrac{1}{2}x_1, \\ y_2=-\dfrac{1}{2}x_2, \end{cases}$ 所以 $y_1+2y_2=\dfrac{1}{2}x_1-x_2$，所以 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+2x_2}{3}, \\ y=\dfrac{\frac{1}{2}x_1-x_2}{3}, \end{cases}$ 因为点 P 在双曲线上，所以 $\dfrac{\left(\dfrac{x_1+2x_2}{3}\right)^2}{4}-\left(\dfrac{\frac{1}{2}x_1-x_2}{3}\right)^2=1$，解得 $x_1x_2=\dfrac{9}{2}$，故选 C．

12. 对命题 P：设 $f(x)=2020^x+1$，则 $a=\dfrac{f(3)}{f(4)}$，$b=\dfrac{f(4)}{f(5)}$，$\therefore 1-a=\dfrac{f(4)-f(3)}{f(4)}=\dfrac{2020^4-2020^3}{2020^4+1}$

$=\dfrac{2019\times 2020^3}{2020^4+1}=\dfrac{2019\times 2020^4}{2020^5+2020}$，　$1-b=\dfrac{f(5)-f(4)}{f(5)}=\dfrac{2020^5-2020^4}{2020^5+1}=\dfrac{2019\times 2020^4}{2020^5+1}$，

$\because 2020^5+2020>2020^5+1$，$\therefore 1-a<1-b$，即 $a>b$，故 P 为真命题，命题 Q 为假命题，例如 $A=120°$，$B=30°$，可知命题 Q 为假命题，故选 A.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	4	$\sqrt{5}$	$4\sqrt{3}\pi$	①③④

【解析】

13．画出不等式组表示的可行域，如图 2 中阴影部分所示．由 $z=x-2y$，可得 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{z}{2}$．平移直线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{z}{2}$，结合图形可得，当直线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{z}{2}$ 经过可行域内的点 A 时，直线在 y 轴上的截距最大，此时 z 取得最小值．由题意得 A 点坐标为 $(4,\ 0)$，$\therefore z_{\min}=4-0=4$，即 $z=x-2y$ 的最小值是 4.

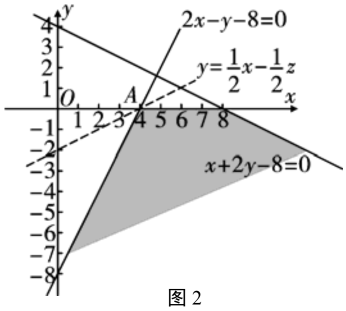

图 2

14．用点到直线的距离公式可得双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 中焦点到渐近线的距离为 b.

15．三棱锥 $S-ABC$ 各条棱都相切的球相当于棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正方体的内切球，则 $R=\sqrt{3}$，所以体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$.

16． $f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)-\cos(x+2\pi)+\sqrt{2}\sin(x+2\pi)\cos(x+2\pi)=\sin x-\cos x+\sqrt{2}\sin x\cos x$ $=f(x)$，①是真命题；$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+\sqrt{2}\sin(-x)\cos(-x)=-\sin x-\cos x-\sqrt{2}\sin x\cos x$，$f(-x)+f(x)\neq 0$，②是假命题；$f\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)=\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)-\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)+\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)=-\cos x+\sin x+\sqrt{2}\sin x\cos x=f(x)$，③是真命题；令

$t=\sin x-\cos x$，则 $t^2=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$，故 $\sqrt{2}\sin x\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2$，故

函数可看做 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+t+\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，当 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$y_{\max}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，④是真命题.

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意可得 $a_2=2a_1-4+3=10-4+3=9$，

$a_3=2a_2-8+3=18-8+3=13$，

……………………………………………………………（2 分）

由数列 $\{a_n\}$ 的前三项可猜想数列 $\{a_n\}$ 是以 5 为首项，4 为公差的等差数列，

即 $a_n=4n+1$．　　……………………………………………………………（3 分）

证明如下：当 $n=1$ 时，$a_1=5$ 成立；

假设 $n=k$ 时，$a_k=4k+1$ 成立，

那么 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=2a_k-4k+3=2(4k+1)-4k+3=4k+5=4(k+1)+1$ 也成立，

则对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，

都有 $a_n=4n+1$ 成立.　　…………………………………………………（6 分）

（2）由（1）可知，$a_n\bullet 3^n=(4n+1)\bullet 3^n$，

$S_n=5\times 3+9\times 3^2+13\times 3^3+\cdots+(4n-3)\bullet 3^{n-1}+(4n+1)\bullet 3^n$，①

$3S_n=5\times 3^2+9\times 3^3+13\times 3^4+\cdots+(4n-3)\bullet 3^n+(4n+1)\bullet 3^{n+1}$，②

…………………………………………………（8 分）

由①－②得 $-2S_n=15+4\times(3^2+3^3+\cdots+3^n)-(4n+1)\bullet 3^{n+1}$

$=15+4\times\frac{3^2\times(1-3^{n-1})}{1-3}-(4n+1)\bullet 3^{n+1}=-(4n-1)\bullet 3^{n+1}-3$，

即 $S_n=\frac{(4n-1)}{2}\bullet 3^{n+1}+\frac{3}{2}$．

……………………………………………………………（12 分）

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意得列联表如下：

	不太了解	比较了解	总计
男性	250	400	650
女性	150	400	550
总计	400	800	1200

……………………………………………………（2 分）

K^2 的观测值 $k=\dfrac{1200\times(250\times400-150\times400)^2}{400\times800\times650\times550}\approx16.783$，

……………………………………………………………（4 分）

因为 $16.783>6.635$， ………………………………………………………（5 分）

所以有 99%的把握认为居民对数字人民币的了解程度与性别有关.

……………………………………………………………（6 分）

（2）由题意知，分层抽样抽取的 10 人中，男性 6 人，女性 4 人，

……………………………………………………………（7 分）

随机变量 ξ 的所有可能取值为 0，1，2，3，

其中 $P(\xi=0)=\dfrac{C_{n+6}^0C_4^3}{C_{n+10}^3}$，$P(\xi=1)=\dfrac{C_{n+6}^1C_4^2}{C_{n+10}^3}$，

$P(\xi=2)=\dfrac{C_{n+6}^2C_4^1}{C_{n+10}^3}$，$P(\xi=3)=\dfrac{C_{n+6}^3}{C_{n+10}^3}$， ……………………………………………（9 分）

所以随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{C_{n+6}^0C_4^3}{C_{n+10}^3}$	$\dfrac{C_{n+6}^1C_4^2}{C_{n+10}^3}$	$\dfrac{C_{n+6}^2C_4^1}{C_{n+10}^3}$	$\dfrac{C_{n+6}^3}{C_{n+10}^3}$

$E(\xi)=\dfrac{C_{n+6}^0C_4^3}{C_{n+10}^3}\times0+\dfrac{C_{n+6}^1C_4^2}{C_{n+10}^3}\times1+\dfrac{C_{n+6}^2C_4^1}{C_{n+10}^3}\times2+\dfrac{C_{n+6}^3}{C_{n+10}^3}\times3\geqslant2$，

……………………………………………………………（10 分）

$C_{n+6}^1C_4^2\times1+C_{n+6}^2C_4^1\times2+C_{n+6}^3\times3\geqslant2C_{n+10}^3$，

可得，$6(n+6)+4(n+6)(n+5)+\dfrac{1}{2}(n+6)(n+5)(n+4)\geqslant\dfrac{1}{3}(n+10)(n+9)(n+8)$，

$3(n+6)(n^2+17n+72)\geqslant 2(n+10)(n+9)(n+8)$，

$3(n+6)\geqslant 2(n+10)$，解得 $n\geqslant 2$，

$\therefore n$ 的最小值为 2. ……………………………………………………（12 分）

19．（本小题满分 12 分）

（1）证明：如图 3，连接 B_1C，

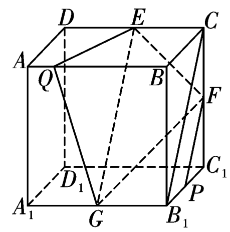

图 3

在 $\triangle C_1CB_1$ 中，P，F 分别是 B_1C_1，C_1C 的中点，

所以 PF 是 $\triangle C_1CB_1$ 的中位线，

则 $PF\parallel B_1C$.

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$DC\parallel A_1B_1$，G，E 分别是 A_1B_1，DC 的中点，

则 $EC\parallel GB_1$，$EC=GB_1$，

所以四边形 GB_1CE 是平行四边形，则 $B_1C\parallel GE$，

所以 $PF\parallel GE$，

所以 $PF\subset$ 平面 GEF. ………………………………（6 分）

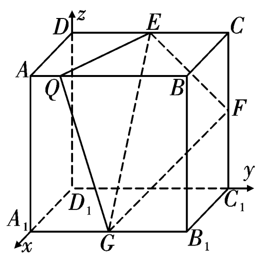

图 4

（2）解：以 D_1 为原点，建立如图 4 所示空间直角坐标系，$E(0，1，2)$，

$F(0，2，1)$，$G(2，1，0)$，$\overrightarrow{GE}=(-2，0，2)$，$\overrightarrow{EF}=(0，1，-1)$，

因为 $AQ=\lambda AB(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，所以 $Q(2，2\lambda，2)$，

$\overrightarrow{QE}=(-2，1-2\lambda，0)$. ………………………………………………………（7 分）

设平面 EFG 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_1，y_1，z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{GE}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x_1+2z_1=0,\\ y_1-z_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，则 $z_1=1$，$y=1$，

所以 $\vec{m}=(1，1，1)$. ……………………………………………………………（8 分）

设平面 QEG 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_2，y_2，z_2)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{GE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{QE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x_2+2z_2=0,\\ -2x_2+(1-2\lambda)y_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=1-2\lambda$，则 $z_2=1-2\lambda$， $y_2=2$，

所以 $\vec{n}=(1-2\lambda，2，1-2\lambda)$． ……………………………………………………（9 分）

因为二面角 $Q-EG-F$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $|\cos\langle\vec{m}，\vec{n}\rangle|=\dfrac{|\vec{m}\bullet\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{|4-4\lambda|}{\sqrt{3}\bullet\sqrt{4+2(1-2\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{5}{2}$(舍去)， ……………………………………………………（11 分）

所以，当二面角 $Q-EG-F$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$\lambda=\dfrac{1}{2}$．

……………………………………………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意可得 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{2b^2}{a}=1$，

$\therefore a=2$，$b=1$，

C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$． ……………………………………………………………（4 分）

（2）设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$Q(x_0，0)$，

设直线 l：$x=my+1$，将其代入 $x^2+4y^2-4=0$，

得 $(4+m^2)y^2+2my-3=0$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{-2m}{4+m^2}$，$y_1y_2=\dfrac{-3}{4+m^2}$，

$\therefore x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=\dfrac{8}{4+m^2}$，

$x_1x_2=m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1=\dfrac{4-4m^2}{4+m^2}$， ……………………………………（8 分）

$\overrightarrow{QA}\bullet\overrightarrow{QB}=t$，则 $t=(x_1-x_0，y_1)\bullet(x_2-x_0，y_2)=x_1x_2+x_0^2-(x_1+x_2)x_0+y_1y_2$

$=\dfrac{4-4m^2}{4+m^2}-\dfrac{8}{4+m^2}x_0-\dfrac{3}{4+m^2}+x_0^2$， ……………………………………（10 分）

$=\dfrac{17-8x_0}{4+m^2}+x_0^2-4$，

这是一个与 m 无关的常数，

$\therefore x_0=\dfrac{17}{8}$，$t$ 为常数，此时存在定点 $Q\left(\dfrac{17}{8},\ 0\right)$，使 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$ 为定值.

…………………………………………………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）因为 $f(x)=x-\ln x$，故 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

…………………………………………………………（1 分）

令 $f'(x)>0$，得 $x>1$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<1$，

故 $f(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上单调递减，在 $(1,\ +\infty)$ 上单调递增， ……………………（3 分）

故函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$. …………………………………………（4 分）

（2）由题意知 $x-\ln x+a\mathrm{e}^{2x}+\ln a\geqslant 0$，即 $a\mathrm{e}^{2x}+x+\ln a\geqslant\ln x$，

两边同时加上 x，得 $a\mathrm{e}^{2x}+2x+\ln a\geqslant x+\ln x$，

即 $a\mathrm{e}^{2x}+\ln(a\mathrm{e}^{2x})\geqslant x+\ln x$， …………………………………………（7 分）

设 $h(x)=x+\ln x(x>0)$，则 $h'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$，故 $h(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，

$a\mathrm{e}^{2x}+\ln(a\mathrm{e}^{2x})\geqslant x+\ln x$ 恒成立，即 $h(a\mathrm{e}^{2x})\geqslant h(x)$ 恒成立，

…………………………………………………………（9 分）

即 $a\mathrm{e}^{2x}\geqslant x$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上恒成立，即 $a\geqslant\dfrac{x}{\mathrm{e}^{2x}}$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上恒成立，

设 $\varphi(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{2x}}(x>0)$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1-2x}{\mathrm{e}^{2x}}$，

则当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时，$\varphi'(x)>0$，故 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增；

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$\varphi'(x)<0$，故 $\varphi(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$ 上单调递减，

故 $\varphi(x)_{\max}=\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$， …………………………………………（11 分）

故 $a\geqslant\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$，故所求实数 a 的取值范围为 $\left[\dfrac{1}{2\mathrm{e}},\ +\infty\right)$. ……………………（12 分）

22.（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

（1）解：由 $x^2+y^2=(2\cos\theta-2\sqrt{3}\sin\theta)^2+(2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta)^2=16$，

得曲线 C 为 $x^2+y^2=16$． ……………………………………………………（5 分）

（2）证明：直线 l 的极坐标方程展开为 $\rho\cos\alpha+\sqrt{3}\rho\sin\alpha=8$，

故 l 的直角坐标方程为 $x+\sqrt{3}y=8$．

显然 M 的坐标为(8，0)，不妨设过点 M 的直线方程为 $\begin{cases}x=8+t\cos\beta,\\ y=t\sin\beta,\end{cases}$ (t 为参数)，

代入 C 得 $t^2+16\cos\beta t+48=0$，设 P，Q 对应的参数为 t_1， t_2，

所以 $|t_1t_2|=48$ 为定值． ……………………………………………………（10 分）

23.（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

（1）证明：当 $m=5$ 时， $f(x)=|x+5|+|3-x|\geqslant|(x+5)+(3-x)|=8>\mathrm{e}^2$，

则 $\ln f(x)\geqslant\ln 8>\ln\mathrm{e}^2=2$ 成立． ……………………………………………（5 分）

（2）解：关于 x 的不等式 $g(x)\geqslant f(x)+\frac{3}{2}m$ 可化为 $|2x-2m^2-7|-|x-3|\geqslant\frac{3}{2}m$，

令 $h(x)=|2x-2m^2-7|-|x-3|=\begin{cases}-x+2m^2+4,\ x\leqslant 3,\\ -3x+2m^2+10,\ 3<x<m^2+\dfrac{7}{2},\\ x-2m^2-4,\ x\geqslant m^2+\dfrac{7}{2},\end{cases}$

则 $h(x)_{\min}=h\left(m^2+\frac{7}{2}\right)=-m^2-\frac{1}{2}$，即 $-m^2-\frac{1}{2}\geqslant\frac{3}{2}m$，

则有 $m^2+\frac{3}{2}m+\frac{1}{2}\leqslant 0$，

解得 $-1\leqslant m\leqslant-\frac{1}{2}$． ……………………………………………………（10 分）