

太原市2021年高三年级模拟考试(二)

数学试卷(理科)

(考试时间:下午3:00—5:00)

注意事项:

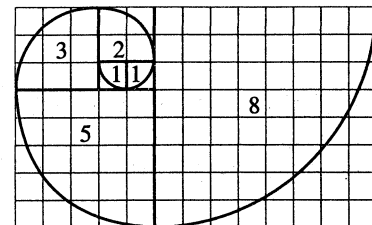
1. 本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分,第I卷1至4页,第II卷5至8页。
2. 回答第I卷前,考生务必将自己的姓名、考试编号填写在答题卡上。
3. 回答第I卷时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,写在本试卷上无效。
4. 回答第II卷时,将答案写在答题卡相应位置上,写在本试卷上无效。
5. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第I卷

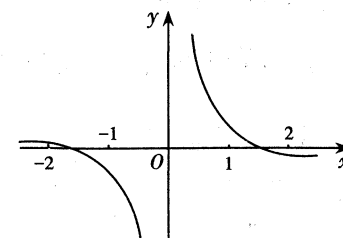
一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $z(1+i)=2i$,则其共轭复数 $\bar{z} =$
 - A. $1-i$
 - B. $1+i$
 - C. $-1-i$
 - D. $-1+i$
2. 已知集合 $A = \{(x,y) | y = x^2\}$, $B = \{(x,y) | y = x\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. $\{0,1\}$
 - B. $\{(0,0)\}$
 - C. $\{(1,1)\}$
 - D. $\{(0,0), (1,1)\}$

3. 已知斐波那契螺旋线被誉为自然界最完美的“黄金螺旋线”,它的画法是:以斐波那契数列(即 $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in \mathbb{N}^*)$)的各项为边长的正方形拼成长方形,然后在每个正方形中画一个圆心角为 90° 的圆弧,将这些圆弧依次连起来的弧线就是斐波那契螺旋线.自然界存在很多斐波拉契螺旋线的图案,例如向日葵、鹦鹉螺等.下图为该螺旋线的一部分,则第七项所对应的扇形的弧长为
 - A. $\frac{169\pi}{4}$
 - B. $\frac{21\pi}{2}$
 - C. $\frac{13\pi}{2}$
 - D. 4π



4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2^2 = -2, a_2 + a_4 = 2$, 则 $a_5 =$
 - A. 3
 - B. 4
 - C. 5
 - D. 7
5. 从1,2,3,4,5这5个数中随机抽取2个数,分别记为 m, n , 则 $\frac{m}{n}$ 为整数的概率为
 - A. $\frac{2}{5}$
 - B. $\frac{1}{4}$
 - C. $\frac{1}{5}$
 - D. $\frac{4}{25}$
6. 已知点 $P(m, m) (m \neq 0)$ 是抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点,且点 P 到该抛物线焦点的距离为30, 则 $p =$
 - A. 10
 - B. 12
 - C. 20
 - D. 30
7. 已知函数 $y = f(x)$ 部分图象的大致形状如图所示, 则 $y = f(x)$ 的解析式最可能是
 - A. $f(x) = \frac{\cos x}{e^x - e^{-x}}$
 - B. $f(x) = \frac{\sin x}{e^x - e^{-x}}$
 - C. $f(x) = \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}$
 - D. $f(x) = \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}}$



8. 已知圆 $M: (x-a)^2 + (y-b)^2 = 3 (a, b \in \mathbf{R})$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = \sqrt{3}$,

给出以下结论: ① $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 是定值; ② 四边形 $OAMB$ 的面积是定值; ③ $a + b$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$; ④ $a \cdot b$ 的最大值为 2, 则其中正确结论的个数是

- A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

9. 在钝角 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

若 $AG \perp BG$, 则 $\cos C$ 的取值范围是

- A. $(0, \frac{\sqrt{6}}{3})$
B. $[\frac{4}{5}, \frac{\sqrt{6}}{3})$
C. $(\frac{\sqrt{6}}{3}, 1)$
D. $[\frac{4}{5}, 1)$

10. 已知三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB = BD = DA = 2\sqrt{3}, DC = 2\sqrt{2}, BC = 2\sqrt{5}$, 二面角 $A-BD-C$

的大小为 135° , 则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为

- A. 64π
B. 52π
C. 40π
D. 32π

11. 已知直线 $x - 2y + n = 0 (n \neq 0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别相交

于 A, B 两点, 点 P 的坐标为 $(n, 0)$, 若 $|PA| = |PB|$, 则该双曲线的离心率是

- A. $\sqrt{2}$
B. $\sqrt{3}$
C. $\frac{\sqrt{15}}{3}$
D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

12. 已知函数 $f(x) = a^2 x^2 + x - 2\ln a (a > 1), g(x) = -e^x - 2\ln x$, 若 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象在

$[1, +\infty)$ 上恰有两对关于 x 轴对称的点, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(\frac{e}{2}, +\infty)$
B. $[\sqrt{e}, +\infty)$
C. $(\frac{e}{2}, \sqrt{e}]$
D. $(1, \frac{e}{2})$

太原市2021年高三年级模拟考试(二)

数学试卷(理科)

第II卷(非选择题 共90分)

本卷包括必考题和选考题两部分,第13题~第21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22题、第23题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知 a, b 是单位向量,且 $|a + b| = \sqrt{3}$,则向量 a 与 b 的夹角为_____.

14. 已知 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,则 $\sin 2\alpha =$ _____.

15. 已知点 $A(0,1)$ 和 $B(m, -2)$,点 $M(x, y)$ 是函数 $y = 2^x$ 图象上的一个动点,若对于任意的点 $M(x, y)$,不等式 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ (其中 O 是坐标原点)恒成立,则实数 $m =$ _____.

16. 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4, AD = 3$,点 E 是边 CD 上的动点,将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折起至 $\triangle PAE$,使得平面 $PAB \perp$ 平面 ABC ,过 P 作 $PG \perp AB$,垂足为 G ,则 AG 的取值范围为_____.

三、解答题:共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分.

17. (本小题满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 3$,且满足 $\frac{a_{n+1}}{n(a_{n+2} - a_{n+1})} = \frac{a_n}{(n+1)(a_{n+1} - a_n)} + \frac{1}{2n(n+1)} (n \in \mathbb{N}^*)$.

(I) 设 $b_n = \frac{na_n}{a_{n+1} - a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$,证明: $\{b_n\}$ 是等差数列;

(II) 若 $c_n = \frac{b_n}{a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$,求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本小题满分12分)

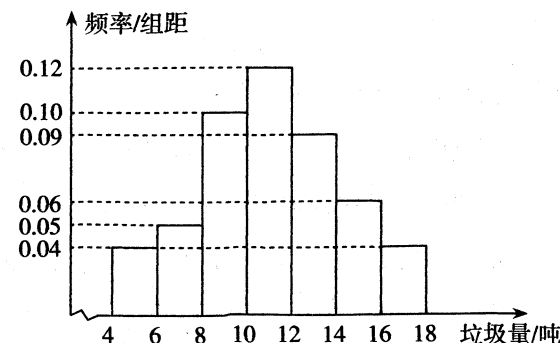
2017年国家发改委、住建部发布了《生活垃圾分类制度实施方案》,规定46个城市在2020年底实施生活垃圾强制分类,垃圾回收、利用率要达35%以上.某市在实施垃圾分类之前,对该市大型社区(即人口数量在1万左右)一天产生的垃圾量(单位:吨)进行了调查.已知该市这样的大型社区有200个,下图是某天从中随机抽取50个社区所产生的垃圾量绘制的频率分布直方图.现将垃圾量超过14吨/天的社区称为“超标”社区.

(I) 根据上述资料,估计当天这50个社区垃圾量的平均值 $\bar{x}$ (精确到整数);

(II) 若当天该市这类大型社区的垃圾量 $X \sim N(\mu, 9)$,其中 μ 近似为(I)中的样本平均值 $\bar{x}$,请根据 X 的分布估计这200个社区中“超标”社区的个数(四舍五入精确到整数);

(III) 市环保部门决定对样本中“超标”社区的垃圾来源进行调查,现从这些社区中随机抽取3个进行重点监控,设 Y 为其中当天垃圾量至少为16吨的社区个数,求 Y 的分布列与数学期望.

附: $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827; P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545; P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9974$.

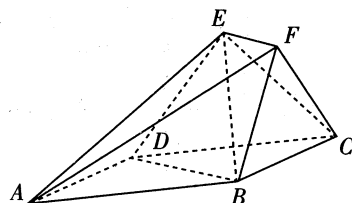


19. (本小题满分12分)

如图,在几何体 $ABCDEF$ 中,四边形 $ABCD$ 是边长为2的菱形,且 $\angle BAD = 60^\circ$, $CE = DE$, $EF \parallel DB$, $DB = 2EF$,平面 $CDE \perp$ 平面 $ABCD$.

(I)求证:平面 $BCF \perp$ 平面 $ABCD$;

(II)若平面 AEF 与平面 BCF 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$,求直线 BE 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.



20. (本小题满分12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别是点 A, B ,直线 $l: x = \frac{2}{3}$ 与椭圆 C 相交于 D, E 两个不同点,直线 DA 与直线 DB 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$, $\triangle ABD$ 的面积为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

(I)求椭圆 C 的标准方程;

(II)若点 P 是直线 $l: x = \frac{2}{3}$ 的一个动点(不在 x 轴上),直线 AP 与椭圆 C 的另一个交点为 Q ,过 P 作 BQ 的垂线,垂足为 M ,在 x 轴上是否存在定点 N ,使得 $|MN|$ 为定值,若存在,请求出点 N 的坐标;若不存在,请说明理由.

21. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$, $g(x) = \sin x + \cos x$.

(I)当 $x \geq -\frac{\pi}{4}$ 时,求证: $f(x) \geq g(x)$;

(II)若不等式 $f(x) + g(x) \leq ax + 2$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立,求实数 a 的取值范围.

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. (本小题满分10分)【选修4-4:坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2}t}{t^2 + 1} \\ y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \end{cases}$ (t 为参数),以坐标原点 O 为

极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(I)求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(II)已知点 A 在曲线 C 上,且点 A 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,求点 A 的直角坐标.

23. (本小题满分10分)【选修4-5:不等式选讲】

已知函数 $f(x) = |x + m^2| + |2x - m| (m > 0)$.

(I)当 $m = 1$ 时,求不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集;

(II)若 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$,且 $a + b = m (a > 0, b > 0)$,求证: $\sqrt{a} + 2\sqrt{b} \leq \sqrt{5}$.

太原市 2021 年高三年级模拟考试（二）

理科数学答题卡

姓 名 _____

准考证号

贴条形码区

注意
事
项

1. 答题前，考生务必首先认真核准条形码上的姓名、准考证号，然后使用0.5毫米的黑色笔迹签字笔将姓名、准考证号填写在相应位置，并在答题卡背面左上角填写姓名和准考证号末两位。准考证号的每个书写框内只能填写一个阿拉伯数字。要求字体工整，笔迹清晰。填写阿拉伯数字的样例：

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
2. 答第Ⅰ卷时，必须使用2B铅笔填涂。修改时，要用橡皮将修改处擦干净，规范填涂样例：

■

3. 答第Ⅱ卷时，必须使用0.5毫米的黑色笔迹签字笔书写，作图题可先用铅笔绘出，确认后再用0.5毫米的黑色笔迹签字笔描清楚，要求字迹工整，笔迹清晰，严格按题号所指示的答题区域作答，超出答案区域书写的答案无效，在试题、草稿纸上答题无效。
4. 保持答题卡清洁、完整，严禁折叠，严禁在答题卡上作任何标记，严禁使用涂改液、胶带纸和修正带。严禁污染答题卡上的黑色方块。
5. 未按上述要求填写、答题，影响评分质量，后果自负。

■

 此栏禁止考生填涂

缺考标记

 缺考考生由监考员贴条形码，并用2B铅笔填涂左边的缺考标记。

第Ⅰ卷（用2B铅笔填涂）

1 <table><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>					6 <table><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>					11 <table><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>				
2 <table><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>					7 <table><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>					12 <table><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>				
3 <table><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>					8 <table><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>									
4 <table><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>					9 <table><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>									
5 <table><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>					10 <table><tr><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td></tr></table>									

第Ⅱ卷（用0.5毫米的黑色笔迹签字笔书写）

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. _____ 14. _____

15. _____ 16. _____

三、解答题（共70分）

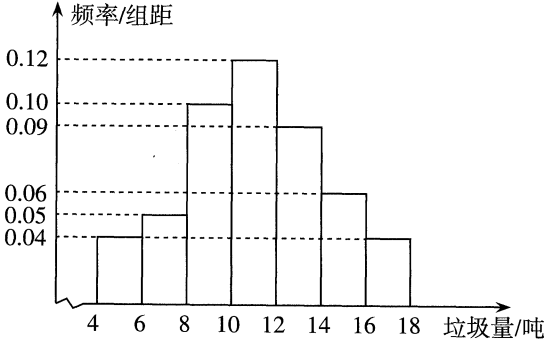
17.（12分）

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

续17题

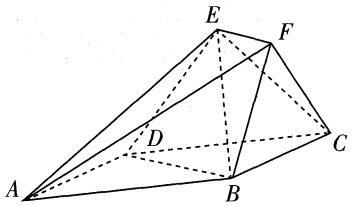
18.（12分）



请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

19.（12分）



请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

[illegible]