

意:
以下项目填
不清而影响
绩责任自负

考证号

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

名

试地点

场号

属区县

(密封线内不要答题)

高考理科数学模拟试卷(一)

(满分:150分 时间:120分钟)

题号	一	二	三	总分	统分人签字
得分					

得分	评卷人

一、选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分.

- 已知全集 $U=\mathbf{R}$, 集合 $P=\{x|x^2\leq 1\}$, 那么 $\complement_U P=(\quad)$
A. $(-\infty, -1)$ B. $(1, +\infty)$
C. $(-1, 1)$ D. $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$
- 设 $\alpha\in\left\{-1, 1, \frac{1}{2}, 3\right\}$, 则使函数 $y=x^\alpha$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且为奇函数的所有 α 值为 $(\quad)$
A. 1, 3 B. -1, 1
C. -1, 3 D. -1, 1, 3
- 若 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $\omega^2+\omega+1=(\quad)$
A. 1 B. 0
C. $3+\sqrt{3}i$ D. $-1+\sqrt{3}i$
- 若平面向量 $\mathbf{b}$ 与向量 $\mathbf{a}=(2, 1)$ 平行, 且 $|\mathbf{b}|=2\sqrt{5}$, 则 $\mathbf{b}=(\quad)$
A. $(4, 2)$ B. $(-4, -2)$
C. $(6, -3)$ D. $(4, 2)$ 或 $(-4, -2)$
- 若 $f(x)=x^2-x+a$, $f(-m)<0$, 则 $(\quad)$
A. $f(m+1)>0$ B. $f(m+1)<0$
C. $f(m+1)\geq 0$ D. $f(m+1)\leq 0$
- 如图1, 某几何体的正(主)视图与侧(左)视图都是边长为1的正方形, 且体积为 $\frac{1}{2}$. 则该几何体的俯视图可以是 $(\quad)$

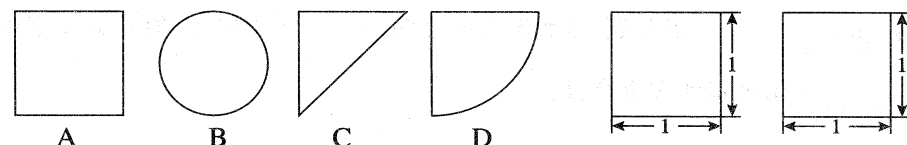


图1

7. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq x \\ 4x+3y\leq 12 \end{cases}$, 则 $\frac{2y+2}{x+1}$ 的最大值是 $(\quad)$

A. 5 B. 6 C. 8 D. 10

8. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期函数 $f(x)$, 周期 $T=2$, 直线 $x=2$ 是它的图象的一条对称轴, 且 $f(x)$ 在 $[-3, -2]$ 上是减函数, 如果 A, B 是锐角三角形的两个内角, 则 $(\quad)$

A. $f(\sin A)>f(\cos B)$ B. $f(\cos B)>f(\sin A)$
C. $f(\sin A)>f(\sin B)$ D. $f(\cos B)>f(\cos A)$

得分	评卷人

二、填空题:本大题共6小题,每小题5分,共30分.

9. 函数 $y=\frac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$ 的定义域是_____.
10. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4=4$, 则 $a_2\cdot a_6$ 等于_____.
11. 曲线 $y=x^2+11$ 在点 $x=1$ 处的切线与 y 轴交点的纵坐标是_____.
12. 函数 $f(x)$ 的定义域为 A , 若 $x_1, x_2\in A$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$ 时总有 $x_1=x_2$, 则称 $f(x)$ 为单函数. 例如, 函数 $f(x)=2x+1(x\in\mathbf{R})$ 是单函数. 下列命题中是真命题的有_____. (写出所有真命题的编号)
- ①函数 $f(x)=x^2(x\in\mathbf{R})$ 是单函数;
②指数函数 $f(x)=2^x(x\in\mathbf{R})$ 是单函数;
③若 $f(x)$ 为单函数, $x_1, x_2\in A$ 且 $x_1\neq x_2$, 则 $f(x_1)\neq f(x_2)$;
④在定义域内是单调函数的函数一定是单函数.
13. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 所对边分别为 a, b, c . 若 $a=b=1, c=\sqrt{3}$, 则 $\angle C=_____$.
14. 若关于 x 的方程 $x-\frac{1}{x}+k=0$ 在 $x\in(0, 1]$ 时没有实数根, 则 k 的取值范围是_____.

得分	评卷人

三、解答题:本大题共 6 小题,共 80 分,解答必须写出文字说明、证明过程和演算步骤.

15. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\sin x \cos x - \sqrt{3}$,

- (1) 求函数的最小正周期及最小值;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

16. (本小题满分 12 分)

某批发市场对某种成衣的周销售量(单位:千件)进行统计,最近 100 周的统计结果如下表所示:

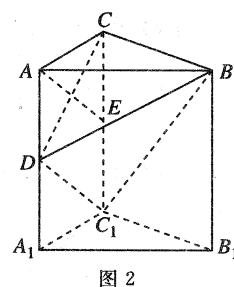
周销售量/千件	2	3	4
频数	20	50	30

- (1) 根据上面统计结果,求周销售量分别为 2 千件,3 千件和 4 千件的频率;
- (2) 已知每千件该种成衣的销售利润为 2 千元, ξ 表示该种成衣两周销售利润的和(单位:千元).若以上述频率作为概率,且各周的销售量相互独立,求 ξ 的分布列和数学期望.

密封线内不要答题

17. (本小题满分 14 分)

如图 2, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC$, $AC=BC=1$, $CC_1=2$, 点 D, E 分别是 AA_1, CC_1 的中点.



- (1) 求证: $AE \parallel \text{平面 } BC_1D$;
- (2) 证明: 平面 $BC_1D \perp \text{平面 } BCD$;
- (3) 求 CD 与平面 BC_1D 所成角的正切值.

18. (本小题满分 14 分)

某制造商生产一种儿童玩具, 其成本为 5 元/件, 经销过程中每件成品需付给代理商 m 元 ($1 \leq m \leq 3$) 的劳务费, 经制造商研究决定, 新玩具投放市场后定价为 x 元/件 ($9 \leq x \leq 11$), 预计一年的销售量为 $(20-x)^2$ 万件.

- (1) 求该制造商一年的利润 L (万元) 与每件玩具的定价 x 的函数关系式;
- (2) 当每件玩具的定价为多少元时, 该制造商一年的利润 L 最大? 并求出 L 的最大值 $R(m)$.

19. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点 F 与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合, 且截抛物线的准线所得弦长为 $\sqrt{2}$, 倾斜角为 45° 的直线 l 过点 F .

(1) 求该椭圆的方程;

(2) 设椭圆的另一个焦点为 F_1 , 问抛物线 $y^2 = 4x$ 上是否存在一点 M , 使得 M 与 F_1 关于直线 l 对称? 若存在, 求出点 M 的坐标; 若不存在, 说明理由.

20. (本小题满分 14 分)

已知数列 $\{a_n\}$, $a_1 = a_2 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} (n \geq 2)$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2) 当 $n \geq 2$ 时, 求证: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 3$;

(3) 若函数 $f(x)$ 满足: $f(1) = a_1$, $f(n+1) = f^2(n) + f(n) (n \in \mathbf{N}^*)$,

求证: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)+1} < \frac{1}{2}$.

密
封
线
内
不
要
答
题

注意:
以下项目填
写不清而影响
成绩责任自负

准考证号
姓名
考试地点

考场号
所属区县

密封线内不要答题

高考理科数学模拟试卷(二)

(满分:150分 时间:120分钟)

题号	一	二	三	总分	统分人签字
得分					

得分	评卷人

一、选择题:本大题共10个小题,每小题5分,共50分.

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ \sqrt{-x}, & x < 0, \end{cases}$ 若 $f(a) + f(-1) = 2$, 则 $a =$ ()

A. -3 B. ± 3 C. -1 D. ± 1

2. 关于 x 的不等式 $ax + b < 0$ 的解集为 $\{x | x > 1\}$, 则关于 x 的不等式 $\frac{ax-b}{x-2} > 0$ 的解集为 ()

A. $\{x | -1 < x < 2\}$ B. $\{x | 1 < x < 2\}$
C. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$ D. $\{x | x > 2\}$

3. $(1 - \sqrt{x})^6 (1 + \sqrt{x})^4$ 的展开式中 x 的系数是 ()

A. -4 B. -3 C. 3 D. 4

4. 下列说法中, 正确的是 ()

A. 命题“若 $am^2 < bm^2$, 则 $a < b$ ”的逆命题是真命题
B. 命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x > 0$ ”的否定是: “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x \leq 0$ ”
C. 命题“ p 或 q ”为真命题, 则命题“ p ”和命题“ q ”均为真命题
D. 已知 $x \in \mathbf{R}$, 则“ $x > 1$ ”是“ $x > 2$ ”的充分不必要条件

5. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $(x+2)f'(x) < 0$, 又 $a = f(\log_{\frac{1}{2}} 3)$, $b = f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{0.3}\right)$, $c = f(\ln 3)$, 则 ()

A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

6. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $2S_5 - 13a_4 + 5a_8 = 10$, 则下列数中恒为常数的是 ()

A. a_8 B. S_9 C. a_{17} D. S_{17}

7. 观察等式: $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ = \frac{3}{4}$;

$$\sin^2 20^\circ + \cos^2 50^\circ + \sin 20^\circ \cos 50^\circ = \frac{3}{4};$$

$$\sin^2 15^\circ + \cos^2 45^\circ + \sin 15^\circ \cos 45^\circ = \frac{3}{4}.$$

由此猜想下列推广命题不正确的是 ()

A. $\sin^2(\alpha - 30^\circ) + \cos^2 \alpha + \sin(\alpha - 30^\circ) \cos \alpha = \frac{3}{4}$

B. $\sin^2(\alpha - 15^\circ) + \cos^2(\alpha + 15^\circ) + \sin(\alpha - 15^\circ) \cos(\alpha + 15^\circ) = \frac{3}{4}$

C. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta + \sin \alpha \cos \beta = \frac{3}{4}$

D. $\sin^2 \alpha + \cos^2(\alpha + 30^\circ) + \sin \alpha \cos(\alpha + 30^\circ) = \frac{3}{4}$

8. 已知直线 $l \perp$ 平面 α , 直线 $m \subset$ 平面 β , 下面有三个命题: ① $\alpha \parallel \beta \Rightarrow l \perp m$; ② $\alpha \perp \beta \Rightarrow l \parallel m$; ③ $l \parallel m \Rightarrow \alpha \perp \beta$ 其中假命题的个数为 ()

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

9. 已知 $x > 0, y > 0$, 若 $\frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} > m^2 + 2m$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $m \geq 4$ 或 $m \leq -2$ B. $m \geq 2$ 或 $m \leq -4$
C. $-2 < m < 4$ D. $-4 < m < 2$

10. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , 在长轴 A_1A_2 上任取一点 M , 过 M 作垂直于 A_1A_2 的直线交椭圆于点 P , 则使得 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} < 0$ 的点 M 的概率为 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

得分	评卷人

二、填空题:本大题共5小题,每小题5分,共25分.

11. 某学校高二年级期中考试数学成绩 ξ 服从 $N(110, 10^2)$ 正态分布, 若规定 90 分以下为不及格, 则这次考试的不及格率大约是 _____. (临界值: 0.683; 0.954; 0.997)

12. 已知 $\triangle ABC$ 的面积是 30, 其内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c , 且满足 $\cos A = \frac{12}{13}, c - b = 1$, 则 $a =$ _____.

13. 对于一切实数 x , 令 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数, 则函数 $f(x) = [x]$ 称为高斯函数或取整函数. 计算 $f(-0.3) + f(1) + f(1.3) =$ _____; 若 $a_n = f\left(\frac{n}{3}\right), n \in \mathbf{N}^*, S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_{3n} =$ _____.

14. 已知抛物线 $y^2 = 8x$ 的准线与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 相交于 A, B 两点,

双曲线的一条渐近线方程是 $y=2\sqrt{2}x$, 点 F 是抛物线的焦点, 且 $\triangle FAB$ 是直角三角形, 则双曲线的标准方程是_____.

15. 设集合 $A_{(p,q)} = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + px + q = 0\}$, 当实数 p, q 取遍 $[-1, 1]$ 的所有值时, 所有集合 $A_{(p,q)}$ 的并集为_____.

得分	评卷人

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

16. (本小题 12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 向量 $m = (b, 2a - c), n = (\cos B, \cos C)$, 且 $m \parallel n$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 设 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{B}{2}\right) + \sin \omega x (\omega > 0)$, 且 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

17. (本小题 12 分)

某研究机构准备举行一次数学新课程研讨会, 共邀请 50 名一线教师参加, 使用不同版本教材的教师人数如下表所示:

版本	人教 A 版	人教 B 版	苏教版	北师大版
人数	20	15	5	10

(1) 从这 50 名教师中随机选出 2 名, 求 2 人所使用版本相同的概率;

(2) 若随机选出 2 名使用人教版的教师发言, 设其中使用人教 A 版的教师人数为 ζ , 求随机变量 ζ 的分布列和期望.

密封线内不要答题

18. (本小题 12 分) 如图 1, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ADC = 90^\circ$, 平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, Q 为 AD 的中点, M 是棱 PC 上的点, $PA = PD = 2$, $BC = \frac{1}{2}AD = 1$, $CD = \sqrt{3}$.

(I) 求证: 平面 $PQB \perp$ 平面 PAD ;

(II) 若二面角 $M-BQ-C$ 为 30° , 设 $PM = tMC$, 试确定 t 的值.

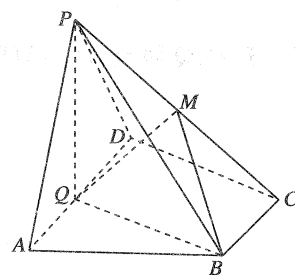


图 1

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + mx + n$ 的图象过点 $(1, 3)$, 且 $f(-1+x) = f(-1-x)$ 对任意实数都成立, 函数 $y = g(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图象关于原点对称.

(1) 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的解析式;

(2) 若 $F(x) = g(x) - \lambda f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上是增函数, 求实数 λ 的取值范围.

20. (本小题满分 13 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \ln x - ax + a$.

(I) 若 $a = \frac{3}{2}$, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(II) 若对任意的 $x \in (1, 3)$, 都有 $f(x) > 0$ 成立, 求 a 的取值范围.

21. (本小题 14 分) 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 下顶点为 A , 线段 OA 的中点为 B (O 为坐标原点), 如图 2. 若抛物线 $C_2: y = x^2 - 1$ 与 y 轴的交点为 B , 且经过 F_1, F_2 点.

(I) 求椭圆 C_1 的方程;

(II) 设 $M(0, -\frac{4}{5})$, N 为抛物线 C_2 上的一动点, 过点 N 作抛物线 C_2 的切线交椭圆 C_1 于 P, Q 两点, 求 $\triangle MPQ$ 的面积的最大值.

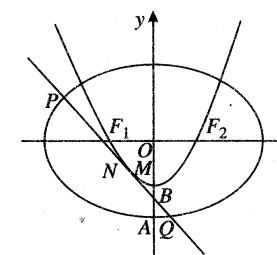


图 2

密
封
线
内
不
要
答
题

意:
以下项目填
不清而影响
绩责任自负

考
证
号

考
生
名
姓
考
试
地
点

考
场
号

属
区
县

密
封
线
内
不
要
答
题

高考理科数学模拟试卷(三)

(满分:150分 时间:120分钟)

题号	一	二	三	总分	统分人签字
得分					

得分	评卷人

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分.

- 已知集合 $M=\{m|m=i^n, n\in\mathbf{N}\}$, 其中 $i^2=-1$, 则下面属于 M 的元素是()
A. $\frac{1+i}{1-i}$ B. $(1+i)-(1-i)$
C. $(1+i)(1-i)$ D. $(1+i)+(1-i)$
- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5=30, a_8=15$, 则 $(x-1)^5+(x-1)^6$ 的展开式中含 x^4 项的系数是该数列的()
A. 第 13 项 B. 第 9 项
C. 第 7 项 D. 第 6 项
- 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x+3 & (x\leq 1) \\ -x^2+2x+3 & (x>1) \end{cases}$, $g(x)=3^x$, 这两个函数图象的交点个数为()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- 在 $(0, 2\pi)$ 内, 使 $\sin x \geq |\cos x|$ 成立的 x 的取值范围为()
A. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ B. $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$
C. $[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ D. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$
- 圆心在曲线 $y=\frac{2}{x}(x>0)$ 上, 且与直线 $2x+y+1=0$ 相切的面积最小的圆的方程为()
A. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ B. $(x-2)^2+(y-1)^2=5$
C. $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ D. $(x-2)^2+(y-1)^2=25$

6. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是双曲线上一点, PF_1 的中点在 y 轴上, 线段 PF_2 的长为 $\frac{4}{3}$, 则双曲线的实轴长为()

A. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. 3 D. 6

7. 某几何体的三视图如图 1, 其正视图中的曲线部分为半个圆弧, 则该几何体的表面积为()

A. $19+\pi\text{cm}^2$
B. $22+4\pi\text{cm}^2$
C. $10+6\sqrt{2}+4\pi\text{cm}^2$
D. $13+6\sqrt{2}+4\pi\text{cm}^2$

8. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, CE 与 BF 相交于 G 点. 若 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{AG}=($

$\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, CE 与 BF 相交于 G 点. 若 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{AG}=($

A. $\frac{2}{7}\mathbf{a}+\frac{1}{7}\mathbf{b}$ B. $\frac{2}{7}\mathbf{a}+\frac{3}{7}\mathbf{b}$
C. $\frac{3}{7}\mathbf{a}+\frac{1}{7}\mathbf{b}$ D. $\frac{4}{7}\mathbf{a}+\frac{2}{7}\mathbf{b}$

9. 若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 对任意的实数 x , 都有 $f(x+4)\leq f(x)+4$ 和 $f(x+2)\geq f(x)+2$ 且 $f(1)=4$, 则 $f(2009)$ 的值是()

A. 2 009 B. 2 010 C. 2 011 D. 2 012

10. 定义区间 (m, n) , $[m, n]$, $(m, n]$, $[m, n)$ 的长度均为 $n-m$, 其中 $m<n$, 已知关于

x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{6}{x+1}>1 \\ \log_2 x+\log_2(tx+t)<\log_2 30 \end{cases}$ 的解集构成的各区间的长度和为 5, 则实数 t

的取值范围是()

A. $(0, 1]$ B. $[1, +\infty)$ C. $(0, 5]$ D. $[5, +\infty)$

得分	评卷人

二、填空题:本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分.

11. 设 a, b, c 均为正数, 且 $3^a=\log_{\frac{1}{3}} a$, $(\frac{1}{3})^b=\log_{\frac{1}{3}} b$, $(\frac{1}{3})^c=\log_3 c$. 则 a, b, c 的大小

关系为_____ (用“<”连接).

12. 图 2 是一个空间几何体的三视图, 则该几何体的体积是_____.

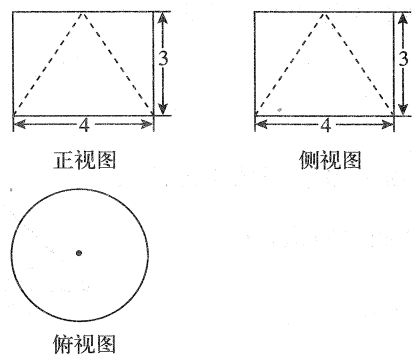


图 2

13. $\triangle ABC$ 的三边 a, b, c 和面积 S 满足: $S = a^2 - (b - c)^2$, 且 $\triangle ABC$ 的外接圆的周长为 17π , 则面积 S 的最大值等于_____.

14. 已知函数 $f(x) = \cos x, x \in \left(\frac{\pi}{2}, 3\pi\right)$, 若方程 $f(x) = m$ 有三个不同的实根, 且三个实根从小到大依次成等比数列, 则 m 的值为_____.

15. 观察下列几个三角恒等式:

- ① $\tan 10^\circ \tan 20^\circ + \tan 20^\circ \tan 60^\circ + \tan 60^\circ \tan 10^\circ = 1$;
- ② $\tan 13^\circ \tan 35^\circ + \tan 35^\circ \tan 42^\circ + \tan 42^\circ \tan 13^\circ = 1$;
- ③ $\tan 5^\circ \tan 100^\circ + \tan 100^\circ \tan(-15^\circ) + \tan(-15^\circ) \tan 5^\circ = 1$;
- ④ $\tan(-160^\circ) \tan(-22^\circ) + \tan(-22^\circ) \tan 272^\circ + \tan 272^\circ \tan(-160^\circ) = 1$.

一般地, 若 $\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma$ 都有意义, 你从这四个恒等式中猜想得到的一个结论是_____.

得分	评卷人	三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分, 解答必须写出文字说明、证明过程和演算步骤.

16. (本小题 12 分) 如图 3, 某市准备在道路 EF 的一侧修建一条运动比赛道, 赛道的前一部分为曲线段 FBC , 该曲线段是函数 $y = A \sin\left(\omega x + \frac{2\pi}{3}\right) (A > 0, \omega > 0)$ 当 $x \in [-4, 0]$ 时的图象, 且图象的最高点为 $B(-1, 2)$, 赛道的中间部分为长 $\sqrt{3}$ 千米的直线跑道 CD , 且 $CD \parallel EF$, 赛道的后一部分是以 O 为圆心的一段圆弧 DE .

- (1) 求 ω 的值和 $\angle DOC$ 的大小;
- (2) 若要在圆弧赛道所对应的扇形 ODE 区域内建一个矩形草坪, 矩形的一边在道路

EF 上, 一个顶点在半径 OD 上, 另外一个顶点 P 在圆弧 DE 上, 且 $\angle POE = \theta$, 求当矩形草坪的面积取最大值时 θ 的值.

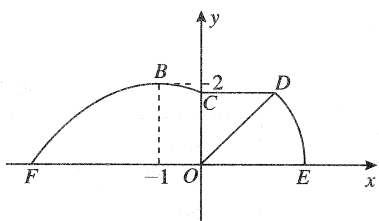


图 3

17. (本小题 12 分) 甲、乙两位篮球运动员进行定点投篮, 每人各投 4 个球, 甲投篮命中的概率为 $\frac{1}{2}$, 乙投篮命中的概率为 $\frac{2}{3}$.

- (1) 求甲至多命中 2 个且乙至少命中 2 个的概率;
- (2) 若规定每投篮一次命中得 3 分, 未命中得 -1 分, 求乙所得分数 η 的概率分布和数学期望.

密封线内不要答题

18. (本小题 12 分) 四面体 $A-BCD$ 中, O, E 分别是 BD, BC 的中点,

$$AC=BC=CD=BD=2, AB=AD=\sqrt{2}$$

- (1) 求证: $AO \perp$ 平面 BCD ;
- (2) 求异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦值;
- (3) 求点 C 到平面 AED 的距离。

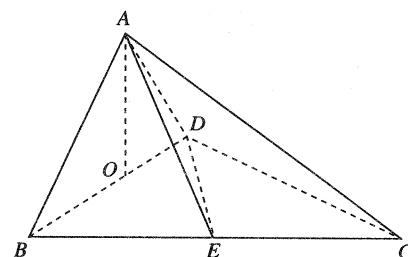


图 4

19. (本小题 12 分) 设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A 是

椭圆 E 上一点, $AF_1 \perp F_1F_2$, 原点到直线 AF_2 的距离是 $\frac{1}{3}|OF_1|$.

- (1) 求椭圆 E 的离心率 e ;
- (2) 若 $\triangle AF_1F_2$ 的面积是 e , 求椭圆 E 的方程;
- (3) 在 (2) 的条件下, 若直线 $l: y = x + m$ 与椭圆 E 交于 B, C 两点, 问: 是否存在实数 m 使 $\angle BF_2C$ 为钝角? 如果存在, 求出 m 的范围; 如果不存在, 说明理由.

20. (本小题 13 分) 若实数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{k-1} + a_{k+1} \geq 2a_k$ ($k=2, 3, \dots$), 则称数列 $\{a_n\}$ 为凸数列.

(1) 若 $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 判断数列 $\{a_n\}$ 是否是凸数列;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为凸数列, $k, n, m \in \mathbf{N}^*$, 且 $k < n < m$,

(i) 求证: $\frac{a_m - a_n}{m - n} \geq \frac{a_n - a_k}{n - k}$;

(ii) 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 求证: $\frac{m-n}{k} S_k + \frac{n-k}{m} S_m \geq \frac{m-k}{n} S_n$.

21. (本小题 14 分) 设函数 $f(x) = x^2 + b \ln(x+1)$, 其中 $b \neq 0$.

(1) 若 $b = -12$, 求 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 的最小值;

(2) 如果 $f(x)$ 在定义域内既有极大值又有极小值, 求实数 b 的取值范围;

(3) 是否存在正整数 N , 使得当 $n \geq N$ 时, 不等式 $\ln \frac{n+1}{n} > \frac{n-1}{n^3}$ 恒成立?