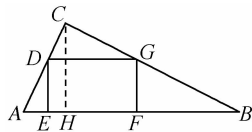
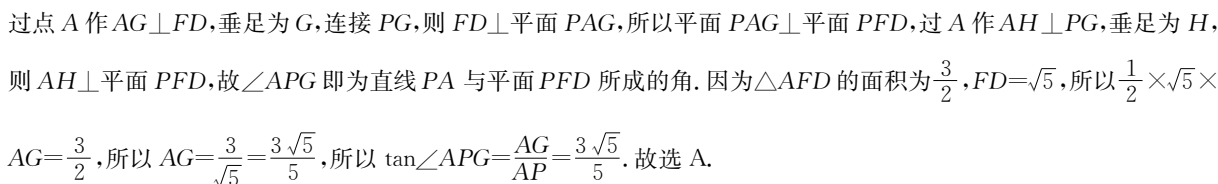
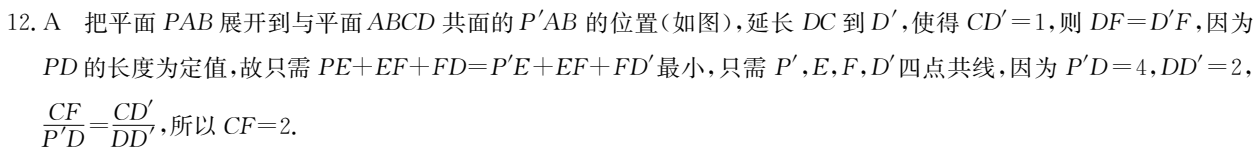


高三理科数学参考答案、提示及评分细则

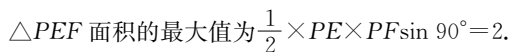
1. C 由 $z_1 = \overline{z_2}$, 得 $a+bi=2+bi$, 所以 $a=2, b=1$, 所以 $a+b=3$. 故选 C.
2. B 因为 $A=(-\infty, 3], B=[1, 5]$, 所以 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = (3, 5]$. 故选 B.
3. D 虚轴长为 $2\sqrt{b}=\sqrt{3}$, 解得 $\sqrt{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{b}}{1}x$, 即 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$. 故选 D.
4. C 对于 A, $\forall x < 1, \frac{1}{x} > 1$ 的否定为 $\exists x_0 < 1, \frac{1}{x_0} \leq 1$, 故 A 错误; 对于 B, “ $A > B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的既不充分也不必要条件, 故 B 错误; 对于 C, 若 $x < 1$, 则 $x^2 < 1$ 的逆命题为若 $x^2 < 1$, 则 $x < 1$, 因为 $x^2 < 1$ 时 $-1 < x < 1$, 所以 $x < 1$ 成立, 故 C 正确; 对于 D, 由 $\log_2 x > 2$ 得 $x > 4$, 若 $x > a$ 是 $\log_2 x > 2$ 的充分条件, 则 $a \geq 4$, 故 D 错误. 故选 C.
5. C 由题意, 得 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, 又 $f(1)=1$, 则 $f(-1)=-f(1)=-1$, 所以 $f(x_0) > f(-1)$, 所以 $x_0 > -1$, 即 x_0 的取值范围是 $(-1, +\infty)$. 故选 C.
6. B i 为计数变量, 由 $i > 5?$, 得执行了 5 次运算, 且是逐步进行的, 所以 $i=i+1$, 可排除 A 和 C; 又因为第一次求和为 $S=3$, 则可排除 D. 故选 B.
7. A 设从夏至开始到冬至, 各节气的晷长分别为 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{13}$, 则夏至时晷长为 $a_1=15$ (寸), 冬至时晷长为 $a_{13}=135$ (寸), 由每个节气晷长损益相同可知, $\{a_n\}$ 为等差数列, 设公差为 d , 则 $a_{13}=a_1+12d=15+12d=135$, 解得 $d=10$, 所以 $a_n=15+(n-1) \times 10=10n+5$, 由 $a_n=75$, 得 $n=7$, 即晷长七尺五寸对应的节气为从夏至开始的第七个节气, 即秋分; 设从冬至开始到夏至, 每个节气的晷长为 b_n , 则 $b_n=135+(n-1) \cdot (-10)=-10n+145$, 由 $b_n=75$, 得 $n=7$, 即晷长七尺五寸对应的节气是从冬至开始的第七个节气, 即春分. 所以晷长为七尺五寸时, 对应的节气为春分和秋分. 故选 A.
8. D $f(x)=\ln|x+1|-x^2-2x=\ln|x+1|-(x+1)^2+1$, $f(x)$ 的图象是由函数 $g(x)=\ln|x|-x^2+1$ 的图象向左平移一个单位长度得到, 由于 $g(x)=\ln|x|-x^2+1$ 为偶函数, 故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称. 又 $x > 0$ 时, $g(x)=\ln x - x^2 + 1, g'(x)=\frac{1}{x} - 2x = \frac{1-2x^2}{x}$, 所以在 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 上, $g'(x) > 0$, 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 上, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在极值点, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上存在极值点. 综上可知, 只有选项 D 符合条件. 故选 D.
9. A 由题意知: $AB=5$, AB 边上的高为 $\frac{12}{5}$. 设 $DE=x, 0 < x < \frac{12}{5}$, 因为 $DG \parallel AB$, 所以 $\frac{\frac{12}{5}-x}{\frac{12}{5}} = \frac{DG}{\frac{12}{5}}$, 所以 $DG = \frac{5(12-5x)}{12}$, 所以矩形 $DEFG$ 的面积为 $x \cdot \frac{5(12-5x)}{12} = \frac{(12-5x) \cdot 5x}{12} \leq \frac{1}{12} \times \left(\frac{12-5x+5x}{2}\right)^2 = 3$ (当且仅当 $12-5x=5x$, 即 $x=\frac{6}{5}$ 时等号成立), 又 $\triangle ABC$ 的面积为 6, 故所求的概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. 故选 A.
10. D 由图象可知, $A = \frac{1-(-3)}{2} = 2, b = \frac{1+(-3)}{2} = -1$, 再由 $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{\omega}$, 得 $\omega=2$, 故①不正确, ②正确; 由于 $(\frac{\pi}{3}, -1)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心, 又 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 故其全部的对称中心为 $(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, -1) (k \in \mathbf{Z})$, 当 $k=1$ 时, 对称中心为 $(\frac{5\pi}{6}, -1)$, 故③错误; 由于 $[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$ 为 $f(x)$ 的单调递减区间, $f(x)$ 的最小正周期为 π , 故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi] (k \in \mathbf{Z})$, 当 $k=-2$ 时即为 $[-\frac{23\pi}{12}, -\frac{17\pi}{12}]$, 故④正确. 故选 D.
11. B 如图, 设准线与 x 轴的交点为 K , 作 $AA_1 \perp l, BB_1 \perp l$, 垂足分别为 A_1, B_1 , 则 $BB_1 \parallel FK \parallel AA_1$, 又 $\overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{BF}$, 所以 $|BB_1| = |BF| = \frac{1}{4}|DB|$, 设 $\angle DBB_1 = \theta$, 则 $\cos \theta = \frac{|BB_1|}{|DB|} = \frac{1}{4}$. 因为 $BB_1 \parallel AA_1$, 所以 $\angle FAA_1 = \angle DBB_1 = \theta$, 所以 $\cos \angle FAA_1 = \frac{1}{4}$, 所以 $|KF| = |AA_1| - \frac{1}{4}|AF| = 4 - 1 = 3$, 即 $p=3$. 故选 B.





14. -509 令 $x=1$, 得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=2$, 令 $x=0$, 得 $a_0=2^9=512$, 由二项式定理知 x^{10} 的系数为 -1 , 所以 $a_1+a_2+\cdots+a_9=2-512-(-1)=-509$.

图, PE 和 PF 都是圆锥 PO 的母线, 则 $PE=PF=2$, 设圆锥 PO 经过 PO, PE 的截面为 $\triangle PAE$, 在直角三角形 POE 中, $\angle OPE=60^\circ$, 可得 $\triangle PAE$ 的顶角为 120° , 所以



(C 为常数且 $C \neq 0$), 即 $\frac{b \cdot 2^{d(n+1)} - b + m}{b \cdot 2^{dn} - b + m} = C$, 所以 $b \cdot 2^{dn+d} + m - b = Cb \cdot 2^{dn} + C(m - b)$, 所以 $b \cdot 2^{dn} (2^d - C) + (m - b)(1 - C) = 0$ 对任意正整数 n 恒成立, 所以 $\begin{cases} 2^d - C = 0, \\ (m - b)(1 - C) = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m = b, \\ C = 2^d, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} C = 2^d, \\ C = 1 \end{cases}$ (舍), 所以数列 $\{c_n + m\}$ 为等比

【高三2月·理科数学参考答案 第2页(共6页)】

17. 解:(1)由正弦定理及 $B=2A$, 得 $\frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{5}}{\sin 2A}$, 2 分

即 $\frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{5}}{2\sin A \cos A}$, 4 分

解得 $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{4}$ 5 分

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{11}}{4}$ 6 分

(2)法一:由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 7 分

即 $4 = c^2 + 5 - 2c \times \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{4}$,

解得 $c=2$, 或 $c=\frac{1}{2}$ 9 分

当 $c=2$ 时, $a=c=2$, 所以 $A=C$, 所以 $B=2A=2C$, 所以 $A=45^\circ$, 这与 $\cos A = \frac{\sqrt{5}}{4}$ 矛盾, 应舍去, 10 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{11}}{4} = \frac{\sqrt{55}}{16}$ 12 分

法二: $\sin B = \sin 2A = 2\sin A \cos A = 2 \times \frac{\sqrt{11}}{4} \times \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{55}}{8}$, 8 分

$\cos B = 2\cos^2 A - 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{8}$, 10 分

所以 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{\sqrt{11}}{4} \times \left(-\frac{3}{8}\right) + \frac{\sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{55}}{8} = \frac{\sqrt{11}}{16}$, 11 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{11}}{16} = \frac{\sqrt{55}}{16}$ 12 分

18. 解:(1)平均数为 $\frac{110+150+180+250+330+510+720+960}{8} = 401.25$ (万人次), 1 分

中位数为 $\frac{250+330}{2} = 290$ (万人次). 2 分

(2)不低于平均数的有 3 年, $X=0, 1, 2$,

则 $P(X=0) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$; $P(X=1) = \frac{C_5^1 C_3^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}$; $P(X=2) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

..... 4 分

故 $E(X) = 0 \times \frac{5}{14} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{28} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$ 6 分

(3)

x	2016	2017	2018	2019
y	330	510	720	960

简化变量:

$x' = x - 2016$	0	1	2	3
$y' = y - 630$	-300	-120	90	330

$\overline{x'} = 1.5, \overline{y'} = 0, \sum_{i=1}^4 x'_i y'_i = 1\ 050, \sum_{i=1}^4 x_i'^2 = 14$, 8 分

$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^4 x'_i y'_i - 4 \overline{x'} \overline{y'}}{\sum_{i=1}^4 x_i'^2 - 4 \overline{x'}^2} = \frac{1\ 050}{14 - 4 \times 1.5^2} = 210, \hat{a} = \overline{y'} - \hat{b} \overline{x'} = 0 - 210 \times 1.5 = -315.$

$$\hat{y}' = 210x' - 315, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

当 $x = 2\,021$ 时, $x' = 5, \hat{y}' = 735$, 所以 $\hat{y} - 630 = 735$, 所以 $\hat{y} = 1\,365$.

即 2021 年接待的游客约为 1 365 万人次. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19. (1) 证明: 取 BC 的中点 M , 连接 MF, QM .

因为点 F, M 为 BE, BC 的中点, 所以 $FM \parallel CE$,

又 $CE \subset \text{平面 } PCD, FM \not\subset \text{平面 } PCD$, 所以 $FM \parallel \text{平面 } PCD$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

同理 $QM \parallel \text{平面 } PCD$.

又 $QM \cap FM = M, QM, FM \subset \text{平面 } QFM$, 所以平面 $QFM \parallel \text{平面 } PCD$. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

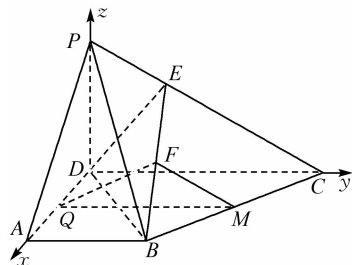
又 $QF \subset \text{平面 } QFM$,

所以 $QF \parallel \text{平面 } PCD$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 解: 由题意知 DP, DA, DC 两两垂直, 以 D 为坐标原点, 以直线 DA, DC, DP 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系(如图),

则 $D(0, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 2, 0), P(0, 0, 1)$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$\text{所以 } \overrightarrow{DB} = (1, 1, 0), \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{DP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} = (0, 0, 1) + \frac{1}{3}(0, 2, -1) = (0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), \overrightarrow{DP} = (0, 0, 1). \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$



$$\text{设平面 } EBD \text{ 的法向量 } \mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x_1 + y_1 = 0, \\ \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}z_1 = 0, \end{cases}$$

令 $y_1 = -1$, 则 $\mathbf{m} = (1, -1, 1)$; $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$$\text{设平面 } PBD \text{ 的法向量 } \mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} z_2 = 0, \\ x_2 + y_2 = 0, \end{cases}$$

令 $y_2 = -1$, 则 $\mathbf{n} = (1, -1, 0)$, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{2+1} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

由图知二面角 $P-BD-E$ 为锐二面角,

故二面角 $P-BD-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. (1) 解: 由题意, 得 $\frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = -\frac{3}{4} (x \neq \pm 2)$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

化简, 得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

所以曲线 C 为中心在坐标原点, 焦点在 x 轴上的椭圆, 不含 A, B 两点. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 证明: ①由题设知, 直线 MA, NB 的斜率存在且均不为 0.

设直线 AM 的方程为 $x = ty - 2 (t \neq 0)$,

由 $AM \perp AN$, 可知直线 NA 的斜率为 $k_{NA} = -t$, 方程为 $x = -\frac{1}{t}y - 2$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$\text{由 } \begin{cases} x = -\frac{1}{t}y - 2, \\ 3x^2 + 4y^2 = 12, \end{cases} \text{ 得 } (4t^2 + 3)y^2 + 12ty = 0, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } y_N = -\frac{12t}{4t^2 + 3}, \text{ 则 } x_N = -\frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{12t}{4t^2 + 3}\right) - 2 = \frac{6 - 8t^2}{4t^2 + 3}, \text{ 即 } N\left(\frac{6 - 8t^2}{4t^2 + 3}, -\frac{12t}{4t^2 + 3}\right). \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{直线 } NB \text{ 的斜率为 } k_{NB} = \frac{-\frac{12t}{4t^2 + 3} - 0}{\frac{6 - 8t^2}{4t^2 + 3} - 2} = \frac{3}{4t}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

则直线 BN 的方程为 $y = \frac{3}{4t}(x-2)$, 将 $y = \frac{3}{4t}(x-2)$ 代入 $x = ty - 2$, 解得 $x = -14$,

故点 P 在直线 $x = -14$ 上. 10 分

②由(1), 得 $k_{NA} \cdot k_{NB} = -\frac{3}{4}$, $k_{MA} \cdot k_{MB} = -\frac{3}{4}$, 11 分

所以 $k_{NA} \cdot k_{NB} \cdot k_{MA} \cdot k_{MB} = \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$.

结合 $k_{NA} \cdot k_{MA} = -1$, 得 $k_{MB} \cdot k_{NB} = -\frac{9}{16}$, 为定值. 即直线 NB 与直线 MB 的斜率之积为定值. 12 分

21. (1)解: $f'(x) = e^x + 2ae^{-x} - (2+a) = \frac{e^{2x} - (2+a)e^x + 2a}{e^x} = \frac{(e^x - 2)(e^x - a)}{e^x}$ 1 分

若 $a \leq 0$, 由 $e^x - 2 = 0$, 得 $x = \ln 2$; 由 $f'(x) < 0$ 得 $x < \ln 2$; 由 $f'(x) > 0$ 得 $x > \ln 2$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增; 2 分

若 $a > 0$, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = \ln 2$ 或 $x = \ln a$.

当 $0 < a < 2$ 时, 由 $f'(x) < 0$, 得 $\ln a < x < \ln 2$; 由 $f'(x) > 0$, 得 $x > \ln 2$ 或 $x < \ln a$,

所以 $f(x)$ 在 $(\ln a, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, \ln a)$, $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增; 3 分

当 $a = 2$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增; 4 分

当 $a > 2$ 时, 由 $f'(x) < 0$, 得 $\ln 2 < x < \ln a$; 由 $f'(x) > 0$, 得 $x > \ln a$ 或 $x < \ln 2$,

所以 $f(x)$ 在 $(\ln 2, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, \ln 2)$, $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增. 5 分

(2)证明: 由(1)知, 当 $\frac{2}{5} \leq a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(\ln a, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, \ln a)$, $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增, 所以

$$f(x)_{\text{极大值}} = f(\ln a), f(x)_{\text{极小值}} = f(\ln 2),$$

$$f(x)_{\text{极大值}} = f(\ln a) = a - 2 - (2+a)\ln a.$$

$$\text{令 } g(a) = a - 2 - (2+a)\ln a \left(\frac{2}{5} \leq a \leq \frac{1}{2} \right), \text{ 则 } g'(a) = -\frac{2+a\ln a}{a}.$$

$$\text{令 } m(a) = 2 + a\ln a \left(\frac{2}{5} \leq a \leq \frac{1}{2} \right), \text{ 则 } m'(a) = 1 + \ln a \geq 1 + \ln \frac{2}{5} = \ln \frac{2e}{5} > \ln 1 = 0,$$

所以 $m(a)$ 在 $\left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递增, 6 分

$$\text{所以 } m(a) \geq m\left(\frac{2}{5}\right) = 2 + \frac{2}{5}\ln \frac{2}{5} = 2 - \frac{2}{5}\ln \frac{5}{2} > 2 - \frac{2}{5}\ln e = \frac{8}{5} > 0,$$

所以 $g'(a) < 0$, 从而 $g(a)$ 在 $\left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递减,

$$\text{所以 } g(a) \geq g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\ln \frac{1}{2} = \frac{5\ln 2 - 3}{2} = \frac{\ln 32 - \ln e^3}{2} > 0, \text{ 即 } f(\ln a) > 0, \text{ 7 分}$$

$$\text{又当 } \frac{2}{5} \leq a \leq \frac{1}{2} \text{ 时, } -1 = \ln \frac{2}{2e} < \ln \frac{2}{5} \leq \ln a \leq \ln \frac{1}{2} < 0, \text{ 即 } \ln a \in (-1, 0),$$

又 $f(-2) = e^{-2} - 2ae^2 + 2(2+a) = 2(1-e^2)a + e^{-2} + 4$, 该式关于 a 单调递减,

$$\text{所以 } 2(1-e^2)a + e^{-2} + 4 \leq 2(1-e^2) \times \frac{2}{5} + e^{-2} + 4 = \frac{24-4e^2}{5} + \frac{1}{e^2} < \frac{24-4e^2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{25-4e^2}{5} < 0,$$

所以 $f(-2) < 0$, 8 分

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递增, 且 $f(-2)f(\ln a) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, \ln a)$ 上有且只有一个零点. 9 分

$$f(x)_{\text{极小值}} = f(\ln 2) = 2 - a - (2+a)\ln 2 = -(1+\ln 2)a + 2 - 2\ln 2.$$

$$\text{令 } h(a) = -(1+\ln 2)a + 2 - 2\ln 2 \left(\frac{2}{5} \leq a \leq \frac{1}{2} \right), \text{ 显然 } h(a) \text{ 单调递减,}$$

$$\text{所以 } h(a) \leq 2 - \frac{2}{5} - \left(2 + \frac{2}{5}\right)\ln 2 = \frac{8}{5} \left(1 - \frac{3}{2}\ln 2\right) = \frac{8}{5} (1 - \ln \sqrt{8}) < \frac{8}{5} (1 - \ln \sqrt{e^2}) = 0,$$

所以 $f(\ln 2) < 0$.

因为 $f(x)$ 在 $(\ln a, \ln 2)$ 上单调递减, 且 $f(\ln a)f(\ln 2) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(\ln a, \ln 2)$ 有且只有一个零点. 10 分

$f(2) = e^2 - 2ae^{-2} - (2+a) \times 2 = -2(e^{-2}+1)a + e^2 - 4$, 该式关于 a 单调递减,

所以 $-2(e^{-2}+1)a + e^2 - 4 \geq -2(e^{-2}+1) \times \frac{1}{2} + e^2 - 4 = e^2 - \frac{1}{e^2} - 5 > e^2 - 1 - 5 = e^2 - 6 > 0$.

因为 $f(x)$ 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(\ln 2)f(2) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上有且只有一个零点. 11 分

综上所述: 当 $\frac{2}{5} \leq a \leq \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 有且只有三个零点. 12 分

22. 解: (1) 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=4+t\cos\alpha, \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数). 2 分

将 $\rho^2 = x^2 + y^2$ 和 $y = \rho \sin \theta$ 代入 $\rho^2 = 8\rho \sin \theta$, 得 $x^2 + y^2 = 8y$,

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + (y-4)^2 = 16$ 4 分

(2) 由直线 l 与曲线 C 交于不同两点 M, N , 得 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 5 分

把直线 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程, 得 $t^2 + 8(\cos \alpha - \sin \alpha)t + 16 = 0$ 6 分

则 $\Delta = [8(\cos \alpha - \sin \alpha)]^2 - 64 = -128 \sin \alpha \cos \alpha > 0$.

设 M, N 对应的参数分别为 t_1, t_2 , 则 $t_1 + t_2 = 8(\sin \alpha - \cos \alpha)$, $t_1 t_2 = 16$ 7 分

因为 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, 所以 $t_1 + t_2 = 8(\sin \alpha - \cos \alpha) > 0$, $t_1 t_2 = 16 > 0$, 所以 $t_1 > 0, t_2 > 0$,

所以 $|PM| + |PN| = t_1 + t_2 = 8(\sin \alpha - \cos \alpha) = 8\sqrt{2} \sin(\alpha - 45^\circ)$,

所以当且仅当 $\alpha = 135^\circ$ 时, $|PM| + |PN|$ 的最大值为 $8\sqrt{2}$ 10 分

23. (1) 解: $|x-1| + 2|x+1| = \begin{cases} -3x-1, & x \leq -1, \\ x+3, & -1 < x \leq 1, \\ 3x+1, & x > 1. \end{cases}$ 1 分

当 $x \leq -1$ 时, $-3x-1 \leq x+7$, 得 $-2 \leq x \leq -1$; 2 分

当 $-1 < x \leq 1$ 时, $x+3 \leq x+7$, 得 $-1 < x \leq 1$; 3 分

当 $x > 1$ 时, $3x+1 \leq x+7$, 得 $1 < x \leq 3$ 4 分

综上, 不等式 $|x-1| + 2|x+1| \leq x+7$ 的解集 $M = [-2, 3]$ 5 分

(2) 证明: 由 (1), 得 $m=3$, 则 $a+b=1, x+y=3$ 6 分

由 a, b, x, y 都是正数及基本不等式, 得 $\sqrt{a \cdot \frac{x}{3}} \leq \frac{a+\frac{x}{3}}{2}, \sqrt{b \cdot \frac{y}{3}} \leq \frac{b+\frac{y}{3}}{2}$, 当且仅当 $a = \frac{x}{3}, b = \frac{y}{3}$, 等号成立,

以上两式相加, 得 $\sqrt{\frac{ax}{3}} + \sqrt{\frac{by}{3}} \leq \frac{a+\frac{x}{3}}{2} + \frac{b+\frac{y}{3}}{2}$ 7 分

因为 $a+b=1, \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$, 所以 $\frac{a+\frac{x}{3}}{2} + \frac{b+\frac{y}{3}}{2} = \frac{a+b+\frac{x+y}{3}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$, 9 分

即 $\sqrt{\frac{ax}{3}} + \sqrt{\frac{by}{3}} \leq 1$, 故 $\sqrt{ax} + \sqrt{by} \leq \sqrt{3}$ 10 分