

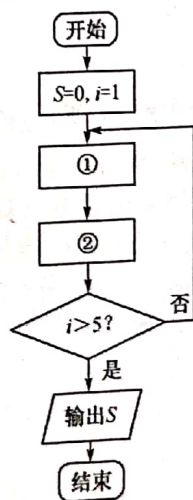
高三理科数学

考生注意：

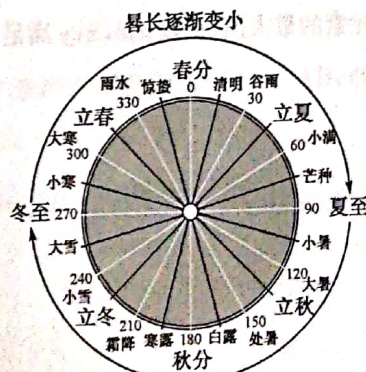
1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ，复数 $z_1 = a + i, z_2 = 2 - bi$ (i 为虚数单位)，若 $z_1 = \overline{z_2}$ ，则 $a + b =$
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. 已知全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | x \leq 3\}, B = \{x | x^2 - 6x + 5 \leq 0\}$ ，则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B =$
A. $[1, 3]$ B. $(3, 5]$ C. $[3, 5)$ D. $[1, 3)$
3. 若双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b} = 1 (b > 0)$ 的虚轴长为 $\sqrt{3}$ ，则其渐近线的方程是
A. $y = \pm 3x$ B. $y = \pm \sqrt{3}x$ C. $y = \pm \frac{3}{2}x$ D. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$
4. 下列说法正确的是
A. “ $\forall x < 1, \frac{1}{x} > 1$ ”的否定为“ $\exists x_0 \geq 1, \frac{1}{x_0} \leq 1$ ”
B. “ $A > B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的必要条件
C. 若 $x < 1$ ，则 $x^2 < 1$ 的逆命题为真命题
D. 若“ $x > a$ ”是“ $\log_2 x > 2$ ”的充分条件，则 $a \leq 4$
5. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = 2^x - 1$ 。若 $f(x_0) > -1$ ，则 x_0 的取值范围是
A. $(-2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1)$
6. 为了计算 $S = 3 + 33 + 333 + 3\ 333 + 33\ 333$ ，设计了如图所示的程序框图，则①和②处的框内可以分别填入
A. $S = S + 3 \times 10^{i-1}$ 和 $i = i + 2$
B. $S = S + (10^i - 1) \div 3$ 和 $i = i + 1$
C. $S = S + 3 \times 10^i$ 和 $i = i + 3$
D. $S = S + (10^{i-1} - 1) \div 3$ 和 $i = i + 1$



第 6 题图

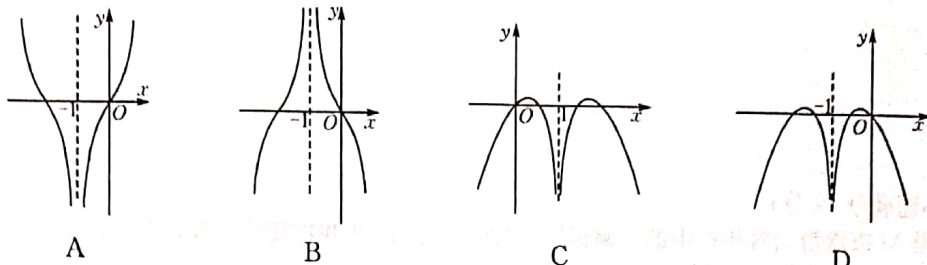


第 7 题图



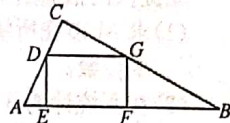
7. “春雨惊春清谷天，夏满芒夏暑相连，秋处露秋寒霜降，冬雪雪冬小大寒”，这首二十四节气歌，记录了中国古代劳动人民在田间耕作长期经验的积累和智慧。“二十四节气”已经被列入联合国教科文组织人类非物质文化遗产代表作名录。我国古代天文学和数学著作《周髀算经》中记载：一年有二十四个节气，每个节气的晷长损益相同（晷是按照日影测定时刻的仪器，晷长即为所测量影子的长度）。二十四节气及晷长变化如图所示，相邻两个节气晷长减少或增加的量相同，周而复始。已知每年冬至的晷长为一丈三尺五寸，夏至的晷长为一尺五寸（一丈等于十尺，一尺等于十寸），则晷长为七尺五寸时，对应的节气为
- A. 春分、秋分 B. 雨水、处暑 C. 立春、立秋 D. 立冬、立夏

8. 函数 $f(x) = \ln|x+1| - x^2 - 2x$ 的图象大致为



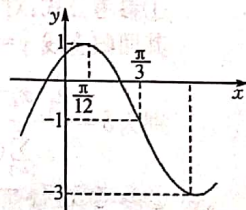
9. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = \frac{\pi}{2}$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，点 D, G 分别在边 AC, BC 上，点 E, F 在 AB 上，且四边形 $DEFG$ 为矩形（如图所示），当矩形 $DEFG$ 的面积最大时，在 $\triangle ABC$ 内任取一点，该点取自矩形 $DEFG$ 内的概率为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$



10. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，给出下列结论：

- ① $A = 2, \omega = 1, b = -1$;
② $A = \omega = 2, b = -1$;
③ 点 $(\frac{2\pi}{3}, -1)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心;
④ $f(x)$ 在 $[-\frac{23\pi}{12}, -\frac{17\pi}{12}]$ 上单调递减.

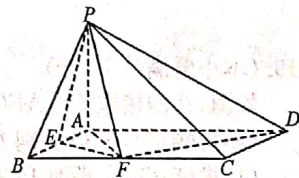


其中所有正确结论的序号是

- A. ①② B. ②③ C. ③④ D. ②④
11. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F ，准线为 l ，过 F 的直线与抛物线 C 交于点 A, B ，与 l 交于点 D ，若 $\overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{BF}$ ， $|AF| = 4$ ，则 $p =$
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 6

12. 《九章算术》卷五《商功》中描述几何体“阳马”为“底面为矩形，一棱垂直于底面的四棱锥”。现有阳马 $P-ABCD$ (如图)， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PA = AB = 1$ ， $AD = 3$ ，点 E, F 分别在 AB, BC 上，当空间四边形 $PEFD$ 的周长最小时，直线 PA 与平面 PFD 所成角的正切值为

- A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $2\sqrt{3}$



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 a, b ，满足 $|a| = 1, |b| = 2$ ，当 $|2a - b| = 2\sqrt{3}$ 时，向量 a, b 的夹角为 _____。
14. 已知 $(1+x)(2-x)^9 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$ ，则 $a_1 + a_2 + \dots + a_9 =$ _____。
15. 已知圆锥的顶点为 P ，底面圆心为 O ，底面半径为 $\sqrt{3}$ ，高为 1， E 和 F 是底面圆周上两点，则圆锥 PO 的侧面展开图的圆心角为 _____； $\triangle PEF$ 面积的最大值为 _____。（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）
16. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，设 $c_n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3} + \dots + 2^{a_n}$ ，若存在常数 m ，使得数列 $\{c_n + m\}$ 为等比数列，则 m 的值为 _____。



三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a=2, b=\sqrt{5}, B=2A$.

- (1)求 $\sin A$ 的值;
- (2)求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

下图是 M 市旅游局宣传栏中的一幅标题为“2012~2019 年我市接待游客人次”的统计图. 根据该统计图提供的信息解决下列问题:

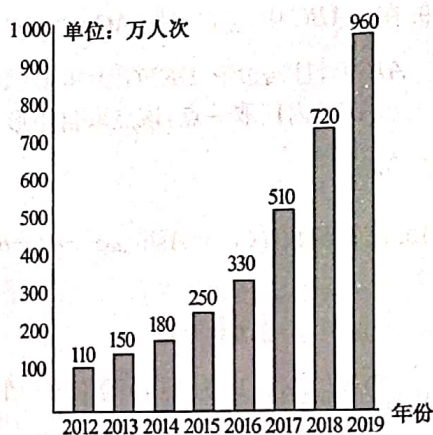
- (1)求 M 市在所统计的这 8 年中所接待游客人次的平均数和中位数;
- (2)在所统计的 8 年中任取两年, 记其中接待游客人次不低于平均数的年份数为 X , 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$;
- (3)从该统计图上看, 从 2016 年开始, M 市接待游客的人次呈直线上升趋势, 请你用线性回归分析的方法预测到 2021 年 M 市接待游客的人次.

①参考公式: 对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘法估计分

$$\text{别为 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

②参考数据:

$x' = x - 2016$	0	1	2	3
$y' = y - 630$	-300	-120	90	330

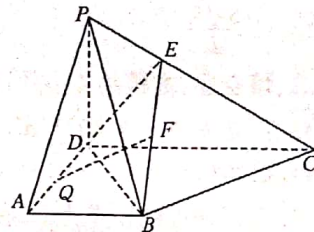


19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是梯形, $AB \parallel CD$, $CD = 2AB$, 点 E 是棱 PC 上的动点 (不含端点), F, Q 分别为 BE, AD 的中点.

(1)求证: $QF \parallel$ 平面 PCD ;

(2)若 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp DC$, $PD = AD = AB = 1$, $\overrightarrow{PC} = 3\overrightarrow{PE}$, 求二面角 $P-BD-E$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知点 $A(-2,0)$, $B(2,0)$, 动点 $S(x,y)$ 满足直线 AS 与 BS 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$. 记动点 S 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程, 并说明曲线 C 是什么样的曲线;

(2) 设 M, N 是曲线 C 上的两个动点, 直线 AM 与 NB 交于点 P , 且 $\angle MAN = 90^\circ$.

① 求证: 点 P 在定直线上;

② 求证: 直线 NB 与直线 MB 的斜率之积为定值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - 2ae^{-x} - (2+a)x$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求证: 当 $\frac{2}{5} \leq a \leq \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 有且只有三个零点.

(参考数据: $e \approx 2.72$, $e^2 \approx 7.39$, $e^3 \approx 20.01$)

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中, 直线 l 过点 $P(4,0)$, 倾斜角为 α . 以直角坐标系的坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 8 \sin \theta$.

(1) 写出直线 l 的一个参数方程, 并求曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设直线 l 与曲线 C 交于不同两点 M, N , 求 $|PM| + |PN|$ 的最大值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

设不等式 $|x-1| + 2|x+1| \leq x+7$ 的解集为 M .

(1) 求集合 M ;

(2) 设 m 是 M 中元素的最大值, 正数 a, b, x, y 满足 $a+b=\frac{m}{3}$, $x+y=m$. 求证: $\sqrt{ax} + \sqrt{by} \leq \sqrt{m}$.

