

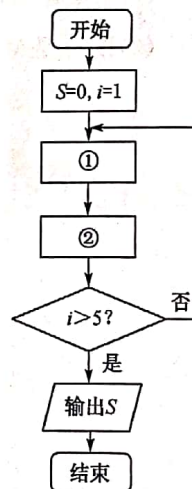
高三文科数学

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本试卷主要命题范围:高考范围。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | x \leq 3\}$, $B = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$, 则 $A \cup B =$
A. $\{3\}$ B. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
C. $\{0, 1, 2, 3\}$ D. $\{1, 3\}$
2. 若复数 $\frac{4+ai}{1+i}$ (i 为虚数单位, $a \in \mathbf{R}$) 为纯虚数, 则 a 的值为
A. -4 B. -3
C. 3 D. 5
3. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, 2^{-x} + 2^x \geq 1$ ”的否定是
A. $\forall x \in \mathbf{R}, 2^{-x} + 2^x < 1$ B. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, 2^{-x_0} + 2^{x_0} \geq 1$
C. $\forall x \notin \mathbf{R}, 2^{-x} + 2^x < 1$ D. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, 2^{-x_0} + 2^{x_0} < 1$
4. 若双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b} = 1 (b > 0)$ 的虚轴长为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线的方程是
A. $y = \pm 3x$ B. $y = \pm \frac{3}{2}x$
C. $y = \pm \sqrt{3}x$ D. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$
5. 在区间 $[-10, 10]$ 内任取一数 x , 则 $\log_2(3-x) \leq 3$ 成立的概率为
A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$
C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{4}$
6. 为了计算 $S = 3 + 33 + 333 + 3\ 333 + 33\ 333$, 设计了如图所示的程序框图, 则①和②处的框内可以分别填入
A. $S = S + 3 \times 10^{i-1}$ 和 $i = i + 2$
B. $S = S + (10^i - 1) \div 3$ 和 $i = i + 1$
C. $S = S + 3 \times 10^i$ 和 $i = i + 3$
D. $S = S + (10^{i-1} - 1) \div 3$ 和 $i = i + 1$
7. 已知函数 $f(3x)$ 的图象仅关于点 $(2, 0)$ 对称, 若 $f(3x+m)$ 为奇函数, 则 $m =$
A. 0 B. 2 C. 3 D. 6



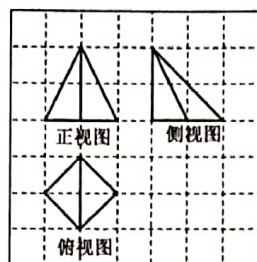
8. 某四棱锥的三视图(图中每个小方格的边长为 1)如图所示,则该四棱锥的体积为

A. 4

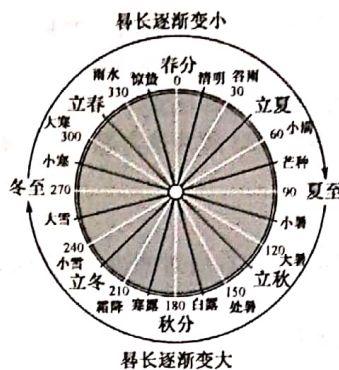
B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. 1



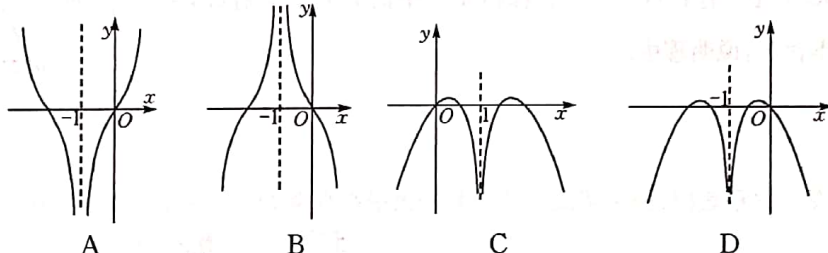
第 8 题图



第 9 题图

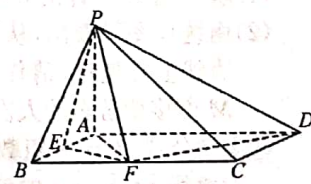
9. “春雨惊春清谷天,夏满芒夏暑相连,秋处露秋寒霜降,冬雪雪冬小大寒”,这首二十四节气歌,记录了中国古代劳动人民在田间耕作长期经验的积累和智慧. “二十四节气”已经被列入联合国教科文组织人类非物质文化遗产代表作名录. 我国古代天文学和数学著作《周髀算经》中记载:一年有二十四个节气,每个节气的晷长损益相同(晷是按照日影测定时刻的仪器,晷长即为所测量影子的长度). 二十四节气及晷长变化如图所示,相邻两个节气晷长减少或增加的量相同,周而复始. 已知每年冬至的晷长为一丈三尺五寸,夏至的晷长为一尺五寸(一丈等于十尺,一尺等于十寸),则晷长为七尺五寸时,对应的节气为
- A. 春分、秋分 B. 雨水、处暑 C. 立春、立秋 D. 立冬、立夏

10. 函数 $f(x) = \ln |x+1| - x^2 - 2x$ 的图象大致为



11. 已知函数 $f(x) = \sin x$ 和 $g(x) = \cos x$ 图象的一个公共点为 $P(x_0, y_0)$, 现给出以下结论:
- ① $f(x_0) = g(x_0)$; ② $f'(x_0) = g'(x_0)$; ③ $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象在点 P 处的切线的倾斜角互补;
- ④ $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象在点 P 处的切线互相垂直. 其中正确结论的序号是
- A. ①③ B. ②④ C. ②③ D. ①④

12. 《九章算术》卷五《商功》中描述几何体“阳马”为“底面为矩形,一棱垂直于底面的四棱锥”. 现有阳马 $P-ABCD$ (如图), $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AB = 1$, $AD = 3$, 点 E, F 分别在 AB, BC 上, 当空间四边形 $PEFD$ 的周长最小时, 三棱锥 $P-ADF$ 外接球的表面积为
- A. 9π B. 11π C. 12π D. 16π



二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 a, b , 满足 $|a| = 1, |b| = 2$, 当 $|2a - b| = 2\sqrt{3}$ 时, 向量 a, b 的夹角为 _____.

14. 某校高二 20 名学生学业水平考试的数学成绩如下表:

学生编号	成绩	学生编号	成绩	学生编号	成绩	学生编号	成绩
1	80	6	80	11	71	16	70
2	88	7	85	12	78	17	68
3	80	8	69	13	79	18	90
4	81	9	83	14	83	19	63
5	73	10	76	15	65	20	76

用系统抽样法从这 20 名学生学业水平考试的数学成绩中抽取容量为 5 的样本, 若在第一分段里用随机抽样抽取的成绩为 88, 则这个样本中最小的成绩是 _____.



15. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 过点 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 与 C 在第二象限的交点为 A , 若 $\angle AOF = 60^\circ$, 则 C 的离心率为_____.

16. 已知公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 S_3, S_5, S_6 成等差数列, 则 q^3 的值为_____; 设 a_k 是 a_4 与 a_7 的等差中项, 则 k 的值是_____. (本小题第一空 3 分, 第二空 2 分)

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a = 2, b = \sqrt{5}, B = 2A$.

(1) 求 $\sin A$ 的值;

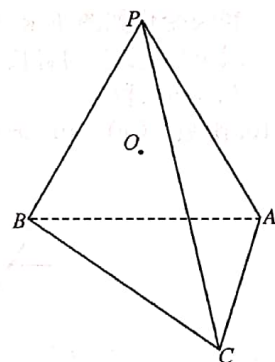
(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle PAB$ 为正三角形, O 为 $\triangle PAB$ 的重心, $PB \perp AC$, $\angle ABC = 60^\circ, BC = 2AB$.

(1) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC ;

(2) 在棱 BC 上是否存在点 D , 使得直线 $OD \parallel$ 平面 PAC ? 若存在, 求出 $\frac{BD}{DC}$ 的值; 若不存在, 说明理由.



19. (本小题满分 12 分)

如图是 M 市旅游局宣传栏中标题为“2012~2019 年我市接待游客人次”的统计图. 根据该统计图提供的信息解决下列问题.

(1) 求 M 市所统计的 8 年中接待游客人次的平均值和中位数;

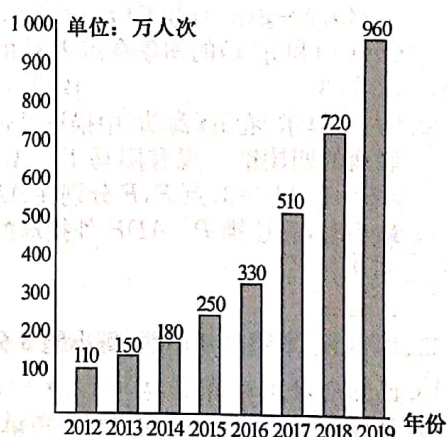
(2) 由统计图可看出, 从 2016 年开始, M 市接待游客的人次呈直线上升趋势, 请你用线性回归分析的方法预测 2021 年 M 市接待游客的人次.

① 参考公式: 对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘法估计分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

② 参考数据:

$x' = x - 2016$	0	1	2	3
$y' = y - 630$	-300	-120	90	330



20. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 动圆 M 经过点 $Q(1,0)$, 且与直线 $x=-1$ 相切. 记动圆圆心 M 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程, 并说明 C 是什么样的曲线?

(2) 设过点 $P(2,0)$ 的直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 且点 $N(\frac{9}{2}, 0)$ 满足 $|NA|=|NB|$, 求直线 l 的方程.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=(2-x)e^x+a(x^2-2x)(a>0)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $f(x)$ 有 3 个零点, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中, 直线 l 过点 $P(4,0)$, 倾斜角为 α . 以直角坐标系的坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=8\sin\theta$.

(1) 写出直线 l 的一个参数方程, 并求曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设直线 l 与曲线 C 交于不同两点 M, N , 求 $|PM|+|PN|$ 的最大值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

设不等式 $|x-1|+2|x+1|\leq x+7$ 的解集为 M .

(1) 求集合 M ;

(2) 设 m 是 M 中元素的最大值, 正数 a, b, x, y 满足 $a+b=\frac{m}{3}, x+y=m$. 求证: $\sqrt{ax}+\sqrt{by}\leq\sqrt{m}$.

