

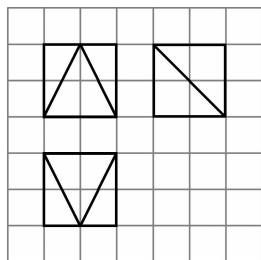
高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \log_3 x \leq 1\}$, $B = \{x | 0 < x < a\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是
A. $[3, +\infty)$ B. $(3, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$
2. 设复数 z 满足 $1 - 3z = iz$ (i 为虚数单位), 则 $|z| =$
A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{10}$
3. 已知向量 a, b 满足 $|a| = \sqrt{6}$, $|b| = \sqrt{2}$, $(a - b) \cdot b = 1$, 则向量 a, b 夹角的大小等于
A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°
4. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , P 是 C 上一点, 若点 P 的纵坐标为 2, 且 $|PF| = 2$, 则 $p =$
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
5. 若 $(x+2)^n = x^n + \dots + ax^3 + bx^2 + cx + 2^n$ ($n \in \mathbf{N}, n \geq 3$), 且 $3a = 2b$, 则 n 的值为
A. 4 B. 6 C. 12 D. 18
6. 如图是某几何体的三视图, 图中小方格的边长为 1, 则该几何体的体积为



- A. $\frac{22}{3}$ B. $\frac{17}{3}$ C. 6 D. $\frac{20}{3}$
7. 碳-14 测年法是由美国科学家马丁·卡门与同事塞缪尔·鲁宾于 1940 年发现的一种测定含碳物质年龄的方法, 在考古中有大量的应用. 其原理为: 宇宙射线中的中子与氮-14 反应产生碳-14, 而碳-14 会发生衰变变成氮-14, 由此构建一个核素平衡. 空气中的碳-14 与氧反应生成的二氧化碳被生物圈接收, 活体生物体内的碳-14 和碳-12 浓度比例是一定的, 只有当生物死亡后, 碳循环中断, 碳-14 会衰

变并逐渐消失. 放射性元素的衰变满足规律 $N=N_0e^{-\lambda t}$ (表示的是放射性元素在生物体中最初的含量 N_0 与经过时间 t 后的含量 N 间的关系, 其中 $\lambda=\frac{\ln 2}{T}$ (T 为半衰期)). 已知碳-14 的半衰期为 5 730 年, $N_0=1.2\times 10^{-12}$, 经测量某地出土的生物化石中碳-14 含量为 4×10^{-13} , 据此推测该化石活体生物生活的年代距今约(结果保留整数, 参考数据 $\log_2 3\approx 1.585$)

- A. 7 650 年
- B. 8 890 年
- C. 9 082 年
- D. 10 098 年

8. 倾斜角为 45° 的直线 l 将圆 $C:x^2+y^2=4$ 分割成弧长的比值为 $\frac{1}{2}$ 的两段弧, 则直线 l 在 y 轴上的截距为

- A. 1
- B. $\sqrt{2}$
- C. ± 1
- D. $\pm\sqrt{2}$

9. 给出下列四种图象的变换方法:

- ①将图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度; ②将图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度;
- ③将图象向左平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度; ④将图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度.

利用上述变换中的某些方法, 能由函数 $y=\sin 4x$ 的图象得到函数 $y=-2\sin 2x\cos 2x$ 的图象的变换方法是

- A. ①②
- B. ②③
- C. ①④
- D. ③④

10. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA\perp$ 平面 ABC , $AC\perp CB$, 其外接球的体积为 36π , 若 $AC=x$, $BC=y$, $AP=z$, 则 $xy+yz+zx$ 的最大值为

- A. 36
- B. 32
- C. 24
- D. 12

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $3S_n=64-a_n$, 若 $a_m\cdot a_k=1$ ($1\leqslant m<k, m, k\in\mathbf{N}^*$), 则 k 的取值集合是

- A. $\{1, 2\}$
- B. $\{1, 2, 3\}$
- C. $\{4, 5\}$
- D. $\{3, 4, 5\}$

12. 已知函数 $f(x)=\sin x-x^2+\pi x$ 的定义域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, 则满足 $f(\pi-a)>f\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$ 的实数 a 的取值范围是

- A. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$
- B. $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right]$
- C. $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$
- D. $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 函数 $f(x)=x\ln x$ 的图象在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程为_____.

14. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y-4\leqslant 0, \\ x-y-1\geqslant 0, \\ 2x-6y-3\leqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=2x+3y$ 的最大值为_____.

15. “杨辉三角”是二项式系数在三角形中的一种几何排列. 在欧洲, 这个表叫做帕斯卡三角形. 帕斯卡(1623~1662)是在 1654 年发现这一规律的, 比杨辉要迟 393 年. “杨辉三角”是中国古代数学的杰出研究成果之一, 它把二项式系数图形化, 把组合数内在的一些代数性质直观地从图形中体现出来. 下面数表类似“杨辉三角”, 从上到下分别为第 1 行、第 2 行、第 3 行、 $\cdots$ 、第 n 行、 $\cdots$. 它满足: ①第 n 行首尾的数均为 n ; ②第 n ($n\geqslant 3$) 行除首尾的数外, 每一个数都等于它肩上(即第 $n-1$ 行)两个数之和. 记第 n ($n\geqslant 2$) 行的第二个数为 $f(n)$, 则 $f(60)=$ _____.

16. 已知曲线 $C: \frac{x|x|}{4} + y|y| = 1$, 点 $P(m, n)$ 为曲线 C 上任意一点, 若点 $A(-2, 1), B(4, -2)$, 则 $\triangle PAB$ 面积的最大值为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a \sin(A+B) = c \sin \frac{B+C}{2}$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若角 B 为钝角, 求 $\frac{b}{c}$ 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

德、智、体、美、劳是对人的素质定位的基本准则, 也是人类社会教育的趋向目标, 所以人类社会的教育就离不开德、智、体、美、劳这个根本. 随着国家对体育、美育的高度重视, 不少省份已经宣布将体育、美育纳入中考范畴. 在近期召开的教育部新闻发布会上, 教育部体育卫生与艺术教育司司长透露, 目前全国已有 4 个省份开展美育中考计分, 同时还有 6 个省份、12 个地市开始(启动)了中考美育计分, 分值在 10 分到 40 分之间. 到 2022 年力争全覆盖, 全面实行美育中考. 同时, 为体育、美育纳入高考做好前期准备工作. 某学校为了提升学生的体育水平, 决定本学期开设足球课, 某次体育课上, 体育器材室的袋子里有大小, 形状相同的 2 只黄色足球和 3 只白色足球, 现从袋子里依次随机取球.

(1) 若有放回地取 3 次, 每次取一个球, 求取出 1 个黄色足球 2 个白色足球的概率;

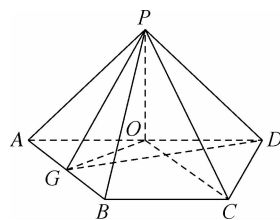
(2) 若无放回地取 3 次, 每次取一个球, 若取出每只黄色足球得 1 分, 取出每只白色足球不得分, 求得分 X 的分布列和数学期望.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD \perp CD$, 且 $AD = 2BC = 2CD = 4$, $PA = PD = 2\sqrt{2}$, AD, AB 的中点分别是 O, G .

(1) 求证: $GO \perp$ 平面 POC ;

(2) 求二面角 $D-PG-O$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 短轴长等于焦距, 且经过点 $P(0, 1)$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设过点 F 且不与坐标轴垂直的直线 l 与 E 交于 A, B 两点, 若以 AB 为直径的圆与 y 轴交于点 M , 且 $|MA| = |MB|$, 求直线 l 的方程.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{2a}{x} - \ln x + 2 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 设 $g(x) = f(x) + 2a \ln x + x$, 若 $g(x)$ 有三个零点, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 - t, \\ y = \frac{t}{3} \end{cases} (t \text{ 为参数})$, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴且取相

同的单位长度建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4 \sin \theta$.

(1) 求 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设 C_1 与 C_2 交于 A, B 两点, 点 $P(4, 0)$, 求 $|PA| \cdot |PB|$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |2x - 5| + |2x + 1|$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 10$ 的解集;

(2) 若 $-x^2 + 2x - 1 + a \leq f(x)$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.