

2021 年江西省高考数学试卷答案以解析【理科】

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1. 设 $2(z+\bar{z})+3(z-\bar{z})=4+6i$ ，则 $z=(\quad)$.

A: $1-2i$

B: $1+2i$

C: $1+i$

D: $1-i$

答案: C.

解析: 设 $z=a+bi$ ，则 $\bar{z}=a-bi$ ， $2(z+\bar{z})+3(z-\bar{z})=4a+6bi=4+6i$ ，所以 $a=1$ ， $b=1$ ，所以 $z=1+i$.

2. 已知集合 $S=\{s|s=2n+1, n\in\mathbf{Z}\}$ ， $T=\{t|t=4n+1, n\in\mathbf{Z}\}$ ，则 $S\cap T=(\quad)$.

A: $\emptyset$

B: S

C: T

D: $\mathbf{Z}$

答案: C.

解析: $s=2n+1$ ， $n\in\mathbf{Z}$ ；

当 $n=2k$ ， $k\in\mathbf{Z}$ 时， $S=\{s|s=4k+1, k\in\mathbf{Z}\}$ ；当 $n=2k+1$ ， $k\in\mathbf{Z}$ 时，

$S=\{s|s=4k+3, k\in\mathbf{Z}\}$. 所以 $T\subseteq S$ ， $S\cap T=T$. 故选 C.

3. 已知命题 $p: \exists x\in\mathbf{R}$ ， $\sin x < 1$ ；命题 $q: x\in\mathbf{R}$ ， $e^{|x|} \geq 1$ ，则下列命题中为真命题的是 $(\quad)$.

A: $p\wedge q$

B: $\neg p\wedge q$

C: $p\wedge\neg q$

D: $\neg(p\wedge q)$

答案: A.

解析: p 真， q 真. 故选 A.

4. 设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ ，则下列函数中为奇函数的是 $(\quad)$.

A: $f(x-1)-1$

B: $f(x-1)+1$

C: $f(x+1)-1$

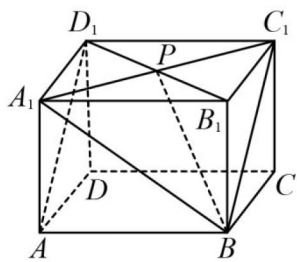
D: $f(x+1)+1$ 答案:

B.

解析: $f(x)=-1+\frac{2}{x+1}$ 关于 $(-1, -1)$ 中心对称.

向右 1 个单位，向上 1 个单位后关于 $(0, 0)$ 中心对称. 所以 $y=f(x-1)+1$ 为奇函数.

5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成的角为 ().



- A: $\frac{\pi}{2}$ B: $\frac{\pi}{3}$ C: $\frac{\pi}{4}$ D: $\frac{\pi}{6}$

答案: D.

解析: 如图, $\angle PBC_1$ 为直线 PB 与 AD_1 所成角的平面角.

易知 $\triangle A_1BC_1$ 为正三角形, 又 P 为 A_1C_1 中点, 所以 $\angle PBC_1 = \frac{\pi}{6}$.

6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训, 每名志愿者只分配到 1 个项目, 每个项目至少分配 1 名志愿者. 则不同的分配方案共有 ().

- A: 60 种 B: 120 种 C: 240 种 D: 480 种

答案: C.

解析: 所求分配方案数为 $C_5^2 A_4^4 = 240$.

7. 把函数 $y = f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图像, 则 $f(x) =$ ().

- A: $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{12}\right)$ B: $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$ C: $\sin\left(2x - \frac{7\pi}{12}\right)$ D: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$

答案: B.

解析: 逆向:

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\text{左移}\frac{\pi}{3}} y = \sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) \xrightarrow{\text{横坐标变为原来的2倍}} y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12}\right). \text{ 故选}$$

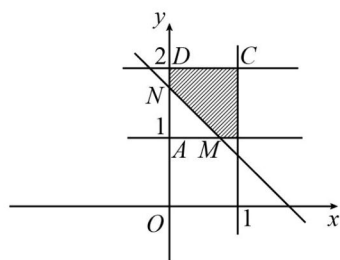
B.

8. 在区间 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 中各随机取1个数, 则两数之和大于 $\frac{7}{4}$ 的概率为().

- A: $\frac{7}{9}$ B: $\frac{23}{32}$ C: $\frac{9}{32}$ D: $\frac{2}{9}$

答案: B.

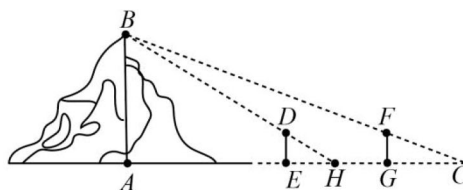
解析: 由题意记 $x \in (0,1)$, $y \in (1,2)$, 题目即求 $x+y > \frac{7}{4}$ 的概率. 绘图如下所示.



$$\text{故 } P = \frac{S_{\text{阴}}}{S_{\text{正 } ABCD}} = \frac{1 \times 1 - \frac{1}{2} AM \cdot AN}{1 \times 1} = \frac{1 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}}{1} = \frac{23}{32}.$$

9. 魏晋时期刘徽撰写的《海岛算经》是关于测量的数学著作, 其中第一题是测量海岛的高, 如图, 点 E, H, G 在水平线 AC 上, DE 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度, 称为“表高”, EG 称为“表距”, GC 和 EH 都称为“表目距”, GC 与 EH 的差称为“表目距的差”. 则海岛的高 $AB = ()$.

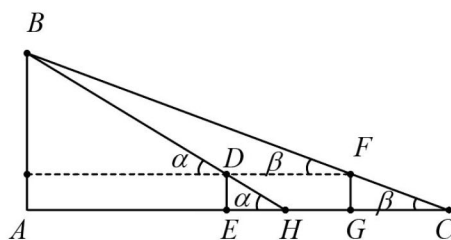
- A: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$ B: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$
C: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$ D: $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$



(第9题图)

答案: A.

解析: 连接 DF 交 AB 于 M , 则 $AB = AM + BM$.



记 $\angle BDM = \alpha$ ， $\angle BFM = \beta$ ，则 $\frac{MB}{\tan \beta} - \frac{MB}{\tan \alpha} = MF - MD = DF$ 。而 $\tan \beta = \frac{FG}{GC}$ ，

$\tan \alpha = \frac{ED}{EH}$ 。所以

$$\frac{MB}{\tan \beta} - \frac{MB}{\tan \alpha} = MB \left(\frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\tan \alpha} \right) = MB \cdot \left(\frac{GC}{FG} - \frac{EH}{ED} \right) = MB \cdot \frac{GC - EH}{ED}.$$

故 $MB = \frac{ED \cdot DF}{GC - EH} = \frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}}$ ，所以高 $AB = \frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$ 。

10. 设 $a \neq 0$ ，若 $x = a$ 为函数 $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，则 ()。

A: $a < b$

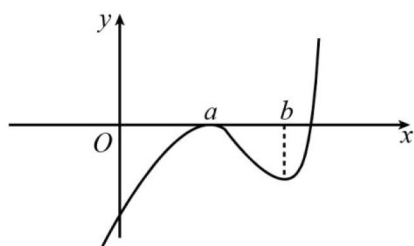
B: $a > b$

C: $ab < a^2$

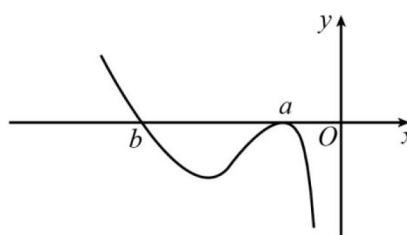
D: $ab > a^2$

答案: D.

解析: 若 $a > 0$ ，其图像如图 (1)，此时， $0 < a < b$ ；若 $a < 0$ ，其图像如图 (2)，此时， $b < a < 0$ 。



(1)



(2)

综上， $ab < a^2$ 。

11. 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点, 若 C 上的任意一点 P 都满足

$|PB| \leq 2b$, 则 C 的心率的取值范围是 ().

A: $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ B: $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ C: $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ D: $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

答案: C.

解析: 由题意, 点 $B(0, b)$. 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x_0^2 = a^2 \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right)$. 故

$$|PB|^2 = x_0^2 + (y_0 - b)^2 = a^2 \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right) + y_0^2 - 2by_0 + b^2 = -\frac{c^2}{b^2}y_0^2 - 2by_0 + a^2 + b^2,$$

$y_0 \in [-b, b]$. 由题意, 当 $y_0 = -b$ 时, $|PB|^2$ 最大. 则 $-\frac{b^3}{c^2} \leq -b$, $b^2 \geq c^2$, $a^2 - c^2 \geq c^2$,

$$e = \frac{c}{a} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即 } e \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

12. 设 $a = 2\ln 1.01$, $b = \ln 1.02$, $c = \sqrt{1.04} - 1$, 则 ().

A: $a < b < c$ B: $b < c < a$ C: $b < a < c$ D: $c < a < b$

答案: B.

解析: 设 $f(x) = \ln(1+x) - \sqrt{1+2x} + 1$, 则 $b - c = f(0.02)$. 易得

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{2\sqrt{1+2x}} = \frac{\sqrt{1+2x} - (1+x)}{(1+x)\sqrt{1+2x}}.$$

当 $x \geq 0$ 时, $1+x = \sqrt{(1+x)^2} \geq \sqrt{1+2x}$, 故 $f'(x) \leq 0$.

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(0.02) < f(0) = 0$. 故 $b < c$.

再设 $g(x) = 2\ln(1+x) - \sqrt{1+4x} + 1$, 则 $a - c = g(0.01)$. 易得

$$g'(x) = \frac{2}{1+x} - \frac{4}{2\sqrt{1+4x}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{1+4x} - (1+x)}{(1+x)\sqrt{1+4x}}.$$

当 $0 \leq x < 2$ 时, $\sqrt{1+4x} \geq \sqrt{1+2x+x^2} = 1+x$. 所以 $g'(x)$ 在 $[0, 2)$ 上 ≥ 0 .

故 $g(x)$ 在 $[0, 2)$ 上单调递增, 所以 $g(0.01) > g(0) = 0$. 故 $a > c$.

综上, $a > c > b$.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1 (m > 0)$ 的一条渐近线为 $\sqrt{3}x + my = 0$, 则 C 的焦距为_____.

答案: 4.

解析: 易知双曲线渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 由题意得 $a^2 = m$, $b^2 = 1$, 且一条渐近线方程为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{m}x$, 则有 $m = 0$ (舍去), $m = 3$. 故焦距为 $2c = 4$.

14. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 4)$, 若 $(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, 则 $\lambda =$ _____.

答案: $\frac{3}{5}$.

解析: 由题意得 $(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$, 即 $15 - 25\lambda = 0$, 解得 $\lambda = \frac{3}{5}$.

15. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 $\sqrt{3}$. $B = 60^\circ$, $a^2 + c^2 = 3ac$, 则 $b =$ _____.

答案: $2\sqrt{2}$.

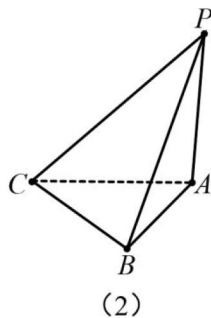
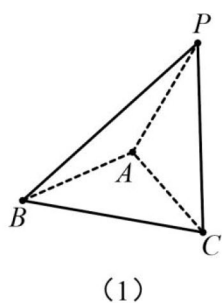
解析: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac = \sqrt{3}$, 所以 $ac = 4$.

由余弦定理, $b^2 = a^2 + c^2 - ac = 3ac - ac = 2ac = 8$, 所以 $b = 2\sqrt{2}$.

16. 以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图, 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为_____ (写出符合要求的一组答案即可).

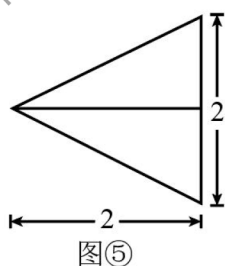
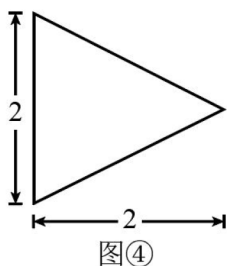
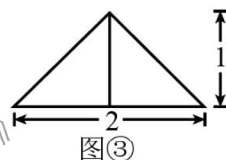
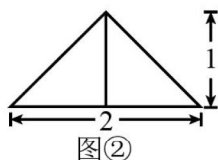
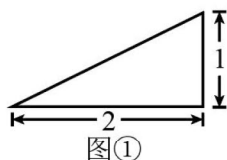
答案: ②⑤或③④.

解析: 由高度可知, 侧视图只能为②或③.



侧视图为②，如图（1）. 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ， $PA = PC = \sqrt{2}$ ， $BA = BC = \sqrt{5}$ ， $AC = 2$. 俯视图为⑤.

俯视图为③，如图（2）. $PA \perp$ 平面 ABC ， $PA = 1$ ， $AC = AB = \sqrt{5}$ ， $BC = 2$. 俯视图为④.



（第 16 题图）

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答；第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 5 小题，每小题 12 分，共 60 分.

17. （12 分）

某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ ，样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2 。

(1) 求 $\bar{x}$ ， $\bar{y}$ ， s_1^2 ， s_2^2 ；

(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高（如果 $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}$ ，则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则不认为有显著提高）。

解：(1) 各项所求值如下所示。

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(9.8 + 10.3 + 10.0 + 10.2 + 9.9 + 9.8 + 10.0 + 10.1 + 10.2 + 9.7) = 10.0,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{10}(10.1 + 10.4 + 10.1 + 10.0 + 10.1 + 10.3 + 10.6 + 10.5 + 10.4 + 10.5) = 10.3,$$

$$s_1^2 = \frac{1}{10} \times [(9.7 - 10.0)^2 + 2 \times (9.8 - 10.0)^2 + (9.9 - 10.0)^2 + 2 \times (10.0 - 10.0)^2 + (10.1 - 10.0)^2 + 2 \times (10.2 - 10.0)^2 + (10.3 - 10.0)^2] = 0.036,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{10} \times [(10.0 - 10.3)^2 + 3 \times (10.1 - 10.3)^2 + (10.3 - 10.3)^2 + 2 \times (10.4 - 10.3)^2 + 2 \times (10.5 - 10.3)^2 + (10.6 - 10.3)^2] = 0.04.$$

(2) 由 (1) 中数据得 $\bar{y} - \bar{x} = 0.3$ ， $2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}} \approx 0.0304$ 。

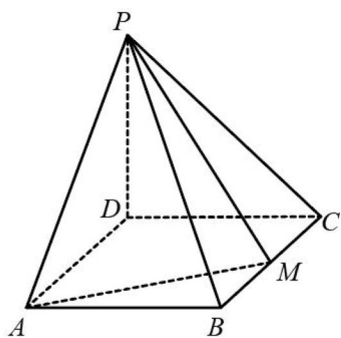
显然 $\bar{y} - \bar{x} > 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}}$ ，所以认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高。

18. (12 分)

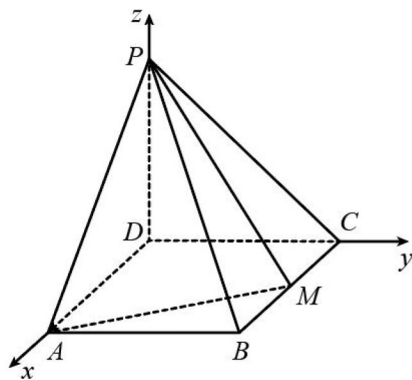
如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是矩形， $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PD = DC = 1$ ， M 为 BC 的中点，且 $PB \perp AM$ 。

(1) 求 BC ；

(2) 求二面角 $A-PM-B$ 的正弦值。



题图



解析图

解：(1) 因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ，且矩形 $ABCD$ 中， $AD \perp DC$ ，所以以 $\overrightarrow{DA}$ ， $\overrightarrow{DC}$ ， $\overrightarrow{DP}$ 分别为 x ， y ， z 轴正方向， D 为原点建立空间直角坐标系 $D-xyz$ 。

设 $BC=t$ ， $A(t,0,0)$ ， $B(t,1,0)$ ， $M\left(\frac{t}{2},1,0\right)$ ， $P(0,0,1)$ ，所以 $\overrightarrow{PB}=(t,1,-1)$ ，

$$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{t}{2},1,0\right).$$

因为 $PB \perp AM$ ，所以 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AM} = -\frac{t^2}{2} + 1 = 0$ ，所以 $t = \sqrt{2}$ ，所以 $BC = \sqrt{2}$ 。

(2) 设平面 APM 的一个法向量为 $\mathbf{m}=(x,y,z)$ ，由于 $\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{2},0,1)$ ，则

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AP} = -\sqrt{2}x + z = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AM} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + y = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = \sqrt{2}, \text{ 得 } \mathbf{m} = (\sqrt{2}, 1, 2).$$

设平面 PMB 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(x',y',z')$ ，则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = \sqrt{2}x' = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB} = \sqrt{2}x' + y' - z' = 0 \end{cases}.$$

令 $y'=1$ ，得 $\mathbf{n}=(0,1,1)$ 。

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{3}{\sqrt{7} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$ 。所以二面角 $A-PM-B$ 的正弦值为

$$\frac{\sqrt{70}}{14}.$$

19. (12 分)

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, b_n 为数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项积, 已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$.

(1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解: (1) 由已知 $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$, 则 $\frac{b_n}{b_{n-1}} = S_n (n \geq 2)$.

$$\Rightarrow \frac{2b_{n-1}}{b_n} + \frac{1}{b_n} = 2 \Rightarrow 2b_{n-1} + 2 = 2b_n \Rightarrow b_n - b_{n-1} = \frac{1}{2} (n \geq 2), \quad b_1 = \frac{3}{2}.$$

故 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列.

(2) 由 (1) 知 $b_n = \frac{3}{2} + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{n+2}{2}$, 则 $\frac{2}{S_n} + \frac{2}{n+2} = 2 \Rightarrow S_n = \frac{n+2}{n+1}$.

$$n=1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = \frac{3}{2}.$$

$$n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\text{故 } a_n = \begin{cases} \frac{3}{2}, & n=1, \\ -\frac{1}{n(n+1)}, & n \geq 2. \end{cases}$$

20. (12 分)

设函数 $f(x) = \ln(a-x)$, 已知 $x=0$ 是函数 $y = xf(x)$ 的极值点.

(1) 求 a ;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{x+f(x)}{xf(x)}$, 证明: $g(x) < 1$.

解: (1) $[xf(x)]' = x'f(x) + xf'(x)$.

当 $x=0$ 时, $[xf(x)]' = f(0) = \ln a = 0$, 所以 $a=1$.

(2) 由 $f(x) = \ln(1-x)$, 得 $x < 1$.

当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = \ln(1-x) < 0$, $xf(x) < 0$; 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \ln(1-x) > 0$, $xf(x) < 0$.

故即证 $x + f(x) > xf(x)$, $x + \ln(1-x) - x \ln(1-x) > 0$.

令 $1-x=t$ ($t > 0$ 且 $t \neq 1$), $x=1-t$, 即证 $1-t + \ln t - (1-t)\ln t > 0$.

令 $f(t) = 1-t + \ln t - (1-t)\ln t$, 则

$$f'(t) = -1 + \frac{1}{t} - \left[(-1)\ln t + \frac{1-t}{t} \right] = -1 + \frac{1}{t} + \ln t - \frac{1-t}{t} = \ln t.$$

所以 $f(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 故 $f(t) > f(1) = 0$, 得证.

21. (12 分)

已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 且 F 与圆 $M: x^2 + (y+4)^2 = 1$ 上点的距离的最小值为 4.

(1) 求 p ;

(2) 若点 P 在 M 上, PA, PB 是 C 的两条切线, A, B 是切点, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

解: (1) 焦点 $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ 到 $x^2 + (y+4)^2 = 1$ 的最短距离为 $\frac{p}{2} + 3 = 4$, 所以 $p = 2$.

(2) 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(x_0, y_0)$, 则

$$l_{PA}: y = \frac{1}{2}x_1(x - x_1) + y_1 = \frac{1}{2}x_1x - \frac{1}{4}x_1^2 = \frac{1}{2}x_1x - y_1,$$

$$l_{PB}: y = \frac{1}{2}x_2x - y_2, \text{ 且 } x_0^2 = -y_0^2 - 8y_0 - 15.$$

$$l_{PA}, l_{PB} \text{ 都过点 } P(x_0, y_0), \text{ 则 } \begin{cases} y_0 = \frac{1}{2}x_1x_0 - y_1, \\ y_0 = \frac{1}{2}x_2x_0 - y_2. \end{cases} \text{ 故 } l_{AB}: y_0 = \frac{1}{2}x_0x - y, \text{ 即}$$

$$y = \frac{1}{2}x_0x - y_0.$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x_0x - y_0, \\ x^2 = 4y \end{cases}, \text{ 得 } x^2 - 2x_0x + 4y_0 = 0, \Delta = 4x_0^2 - 16y_0.$$

所以 $|AB| = \sqrt{1 + \frac{x_0^2}{4}} \cdot \sqrt{4x_0^2 - 16y_0} = \sqrt{4 + x_0^2} \cdot \sqrt{x_0^2 - 4y_0}$, $d_{P \rightarrow AB} = \frac{|x_0^2 - 4y_0|}{\sqrt{x_0^2 + 4}}$.

所以

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d_{P \rightarrow AB} = \frac{1}{2} |x_0^2 - 4y_0| \cdot \sqrt{x_0^2 - 4y_0} = \frac{1}{2} (x_0^2 - 4y_0)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} (-y_0^2 - 12y_0 - 15)^{\frac{3}{2}}$$

.

而 $y_0 \in [-5, -3]$. 故当 $y_0 = -5$ 时, $S_{\triangle PAB}$ 达到最大, 最大值为 $20\sqrt{5}$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】(10 分)

在直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的圆心为 $C(2,1)$, 半径为 1.

(1) 写出 $\odot C$ 的一个参数方程;

(2) 过点 $F(4,1)$ 作 $\odot C$ 的两条切线. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求这两条切线的极坐标方程.

解: (1) 因为 $\odot C$ 的圆心为 $(2,1)$, 半径为 1. 故 $\odot C$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) .

(2) 设切线 $y = k(x-4)+1$, 即 $kx - y - 4k + 1 = 0$. 故 $\frac{|2k - 1 - 4k + 1|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$.

即 $|2k| = \sqrt{1+k^2}$, $4k^2 = 1+k^2$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故直线方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)+1$,

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)+1.$$

故两条切线的极坐标方程为 $\rho \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \theta - \frac{4}{3} \sqrt{3} + 1$ 或

$$\rho \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \theta + \frac{4}{3} \sqrt{3} + 1.$$

23. 【选修 4-5：不等式选讲】(10 分)

已知函数 $f(x) = |x-a| + |x+3|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集;

(2) 若 $f(x) > -a$, 求 a 的取值范围.

解: (1) $a=1$ 时, $f(x) = |x-1| + |x+3|$, 即求 $|x-1| + |x+3| \geq 6$ 的解集.

当 $x \geq 1$ 时, $2x+2 \geq 6$, 得 $x \geq 2$;

当 $-3 < x < 1$ 时, $4 \geq 6$, 此时没有 x 满足条件;

当 $x \leq -3$ 时, $-2x-2 \geq 6$, 得 $x \leq -4$.

综上, 解集为 $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$.

(2) $f(x)$ 最小值 $> -a$, 而由绝对值的几何意义, 即求 x 到 a 和 -3 距离的最小值.

当 x 在 a 和 -3 之间时最小, 此时 $f(x)$ 最小值为 $|a+3|$, 即 $|a+3| > -a$. $a \geq -3$ 时,

$2a+3 > 0$, 得 $a > -\frac{3}{2}$; $a < -3$ 时, $-a-3 > -a$, 此时 a 不存在. 综上, $a > -\frac{3}{2}$.